THIRD EDITION

THE STRUCTURE Of ECONOMICS

A MATHEMATICAL ANALYSIS

经济学的结构

——数量分析方法

第3版

[美] Eugene Silberberg
Wing Suen 著

张 研 张排清 胡杨梅
高 峰 顾佳峰 颜清华 译

清华大学出版社

欢迎访问清华商务出版在线
http://www.tupub.com

ISBN 7-302-07227-2
9 787302 072270 >
定价：58.00元

The Structure of Economics

经济学的结构

——数量分析方法

第 3 版

[美] Eugene Silberberg
Wing Suen 著

张 研 张排稍 胡杨梅
高 峰 顾佳峰 颜清华 译

清华大学出版社
北京

内容简介

本书比较全面地介绍了微观经济学各方面的基本内容。全书共分20章。主要内容包括消费者行为、需求函数、需求比较静态分析、不确定性情况下的消费者行为分析、生产者行为、供给函数、供给比较静态分析方法、不完全信息情况下的市场行为、生产者与消费者一般均衡分析、福利经济学以及动态经济系统的最优控制等。本书的特点是以方法论的角度来探讨经济学各部分知识之间的相互联系。

读者对象为高等院校经济管理各专业高年级本科生、研究生，从事经济研究的实际工作者。

Eugene Silberberg, Wing Suen
The Structure of Economics
International Edition 2001
ISBN: 0-07-118136-9

Copyright © 2001 by The McGraw-Hill Companies, Inc.
Original language published by The McGraw-Hill Companies, Inc. All Rights reserved. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Simplified Chinese translation edition is published and distributed exclusively by Tsinghua University Press under the authorization by McGraw-Hill Education(Asia)Co., within the territory of the People's Republic of China only, excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan. Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. Violation of this Law is subject to Civil and Criminal Penalties.
本书中文简体字翻译版由美国麦格劳-希尔教育出版(亚洲)公司授权清华大学出版社在中华人民共和国境内(不包括中国香港、澳门特别行政区和中国台湾)独家出版发行。未经许可之出口，视为违反著作权法，将受法律之制裁。未经出版者预先书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

北京市版权局著作权合同登记号　图字01-2002-4604号

版权所有，翻印必究。
本书封面贴有McGraw-Hill公司防伪标签，无标签者不得销售。

图书在版编目(CIP)数据

经济学的结构：数量分析方法．—3版／(美)修伯伯格，(美)苏恩著；张研等译．—北京：清华大学出版社，2003.12
书名原文：The Structure of Economics
ISBN 7-302-07227-2

Ⅰ.经…　Ⅱ.①修…②苏…③张…　Ⅲ.微观经济学－基本知识　Ⅳ.F016

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第080725号

出 版 者：清华大学出版社　　地　　址：北京清华大学学研大厦
　　http://www.tup.com.cn　　邮　　编：100084
　　社总机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
责任编辑：徐学军
封面设计：张剑平
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：三河市金元装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所\清华大学出版社出版发行
开　　本：185×260　印张：36　字数：809千字
版　　次：2003年12月第1版　2003年12月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-07227-2/F·621
印　　数：1～3000
定　　价：56.00元

序　言

自从本书1990年第2版出版以后，在微观经济学领域最令人感兴趣也是最重要的进展可以说是关于不完全信息情况下的选择问题。由于不确定性，使得个人选择将具有风险，并可能采取不利的策略，市场运动方面的变化也会导致这样的结果。所以在第3版，我们将本书内容进行扩充，使之包括在经济理论上有关这些方面的新进展。特别需要指出的是，新的第15章“合同与激励”包括了合同理论方面的新进展，新的第16章“不完全信息下的市场”包括了信息经济学的新进展。香港大学 Wing Suen 写作了这些章节。Wing Suen 还是第2版第13章“不确定情况下的行为”的作者。该章我们已经增加了一些例子。为了增加以上新内容，我们删去原来关于均衡稳定性的第19章。我们感觉到目前经济学课程中已经较少涉及这方面的内容，而是更多地涉及以上提及的新内容。

此外，由于目前的学生比本书第1版出版时的学生数学基础更好一些，所以我们删去“微积分(单变量)复习”中大部分内容。我们假设学生已经掌握单变量微积分运算的基本知识。我们保留了多变量微积分运算的讨论，但删去某些公式，主要是为了某些学生便于接受。本书其他部分的各种变动，包括第4章“利润最大化”中的区别性垄断，和第6章“比较静态学：传统的方法”中涉及生产互补要素的一个定理及应用，以及第7章“包络定理和对偶”中关于 LeChâtelier 效果的一个推广的简易讨论，还包括书中各种内容的校对与变动。

虽然本书所包含的所有的分析都来自微观经济学课题，但是本书可看做是超越经济学的，而并不仅是经济学自身；即我们将主要涉及实证经济学的方法论，特别是探讨经济学中有意义的定理的推导方法。萨缪尔森(Paul Samuelson)在其不朽名著：《经济分析基础》(哈佛大学出版社，1947)中说到，经济学中有用处的定理并不在于摆出各种均衡条件，它们难以观察因而实际上用处不大，而是在于预测当某些参数沿特定方向变动之后所产生的各种变化。我们说消费者要让他们的边际替代率与相应的价格比相等，这难以检测，除非可以测量出无差异曲线。然而，需求法则仅需要我们去检测可观察到的价格与需求量的变化，因而它是有意义的，也就是说，它是可驳斥定理。所以在本书新旧章节中，我们都致力于描述具有极大化假设的模型所产生相应定理的条件，这些定理至少在原理上是可驳斥的。

虽然我们所用到的数学知识是基本的，但却十分有用。已故的 G. H. Hardy 在其著作：《一个数学家的道歉》(剑桥大学出版社，1940)中写道：

“它是应用数学当中单调的、基本的部分，因为它是纯粹数学中单调的和基本的部分。时间可能会改变这一点。过去没有一个人可预见到矩阵理论和群论以及其他的纯粹数学理论对当代物理学会有重要应用，并且某些“自命高深的”应用数学中的某些部分可能会借助于某些意想不到的方法变得有用处，但是目前我们还看不清楚在各个数学课题中到底哪些对实际生活是没有用处的、单调的。”

他还写道：

“一般性的结论应该是十分易于理解的。如前所说，如果有用处的知识应该是不久的将来可以对人类实际的物质生活进行改善的话，那么那些只能用做一种纯粹的智力上满足的数学知识便没有什么用处了，由此看来大部分的数学知识也就没有什么用处了。”

但这也正是经济学家所期待的！Hardy 在数学工具对于自然科学应用方面正遵循着一种边际产出递减的法则。大的收益能够从初等代数和微积分的应用中获得。而从实证分析及拓扑中得到的收益好像较少一些。或许，如复分析以及代数拓扑如此神秘的领域，它们对科学分析来讲其边际产出可能就是 0，按照 Hardy 的观点应该是没有用处的。（尽管我们很有兴趣地注意到，数论长期以来被认为是一个最没有用处的知识，但是最近发现它在当代密码学中具有重要的应用。）

在这本书中我们看到基本的数学知识可以胜任实证经济学的研究。但我们并不指望用它们来进行最充分的一般性和严密性的论述。虽然一般性和严密性是非常重要的，但是如上面所讲到的由于边际收益递减法则，要学习这些知识要付出很大代价，它遵循边际成本递增法则。因此我们通常只对许多数学命题给出直观的有启发性的证明。我们让学生到标准的数学教科书中去寻找本书所涉及的各种定理严格证明的讨论。我们的目的在于让读者自己去掌握如何在学习更严密与更一般性知识时，让边际付出等于边际收入。借助许多例子，我们希望读者可借助这些基本工具掌握较深入的现代经济学知识。

学生以及老师应该注意的一点：从对这本书的长期教学以及作者自身的长期学习经验来看，掌握这些内容不做一定数量习题是不可能的。检验读者是否掌握了这些内容，关键在于是否在别处能解决相关问题。

Eugene Silberberg
Wing Suen

译者后记

本书由北京大学、清华大学及北京科技大学几位研究生共同翻译而成。翻译中，我们尽量注意到全书术语翻译的统一性，但由于是多位译者共同工作，各部分翻译风格等可能仍存在差异，请读者予以理解。各章翻译分工如下（按姓氏笔划为序）：

张　研（北京科技大学研究生）：翻译第 1～3 章和第 5 章。

张排梢（清华大学经管学院教授）：负责全书协调工作。

胡杨梅（清华大学博士研究生）：翻译第 4 章 、第 8～9 章 。

高　峰（清华大学博士研究生）：翻译第 6～7 章和第 14～16 章。

顾佳峰（北京大学博士研究生）：翻译第 10～13 章。

颜清华（北京大学研究生）：翻译第 17～20 章。

本书的主要特点是：从方法论的高度来探讨经济学各部分知识之间的相互联系。采用的数学工具也没有超出目前我国大学数学的一般水平。同时所阐述的内容不仅比较全面而且也具有一定的深度，是一本比较有参考价值的教材。该书可供我国经济管理各专业高年级本科生或者研究生作为中级以上的微观经济学教材，也可以供科研部门以及实际工作部门的研究人员作为参考书。

目　录

序言 …… i

第 1 章　比较静态学和经济学范例 …… 1

1.1　导论 …… 1

1.2　边际主义的范例 …… 2

1.3　理论和可驳斥命题 …… 6

1.4　对应模型的理论：比较静态学 …… 10

1.5　比较静态学的例子 …… 11

习题 …… 17

第 2 章　经济学中有关微积分运算的介绍(单变量) …… 19

2.1　函数、斜率和弹性 …… 19

2.2　极大与极小 …… 20

2.3　连续复利 …… 21

2.4　中值定理 …… 24

2.5　泰勒级数 …… 25

第 3 章　多变量函数 …… 29

3.1　多变量函数 …… 29

3.2　水平曲线 Ⅰ …… 29

3.3　偏导数 …… 31

3.4　链式法则 …… 36

3.5　水平曲线 Ⅱ …… 39

习题 …… 45

3.6　齐次函数与欧拉定理 …… 46

习题 …… 54

部分参考文献 …… 54

第 4 章　利润最大化 …… 55

4.1　无约束极值：一阶必要条件 …… 55

4.2　极值的充分条件：两个变量的情况 …… 56

习题 …… 60
4.3 脚注的扩展 …… 60
4.4 行为最大化的应用:企业利润的最大化 …… 62
4.5 需求函数和供给函数的齐次性:弹性 …… 68
4.6 长期和短期:Le Châtelier 法则举例 …… 69
习题 …… 72
4.7 对有限变化的分析:补充几句 …… 75
附录 …… 76
部分参考文献 …… 78

第 5 章 矩阵和行列式 …… 80
5.1 矩阵 …… 80
5.2 行列式,克莱姆法则 …… 82
5.3 隐函数理论 …… 88
习题 …… 92
附录 …… 92
习题 …… 97
部分参考文献 …… 97

第 6 章 比较静态学:传统的方法 …… 99
6.1 导言:再论利润最大化 …… 99
6.2 扩展到 n 个变量 …… 102
6.3 带约束的极大值和极小值理论:一阶必要条件 …… 107
6.4 多约束情况的极大化 …… 110
6.5 二阶条件 …… 112
6.6 一般方法论 …… 117
习题 …… 122
部分参考文献 …… 124

第 7 章 包络定理和对偶 …… 125
7.1 问题的历史 …… 125
7.2 利润函数 …… 126
7.3 一般比较静态分析:无约束模型 …… 129
7.4 带约束的模型 …… 131
习题 …… 140

部分参考文献…… 142

第 8 章 成本函数的推导…… 144
8.1 成本函数 …… 144
8.2 边际成本 …… 147
8.3 平均成本 …… 149
8.4 平均成本和边际成本之间的一般关系 …… 149
8.5 成本最小化问题 …… 151
8.6 要素需求函数 …… 156
8.7 比较静态分析:传统的方法…… 160
8.8 利用对偶理论推导比较静态关系式 …… 168
8.9 弹性:要素需求曲线的其他性质…… 175
8.10 平均成本曲线…… 180
8.11 企业的长期竞争均衡分析…… 181
习题…… 185
部分参考文献…… 186

第 9 章 成本函数和生产函数:专题 …… 187
9.1 齐次生产函数和同势生产函数 …… 187
9.2 成本函数:其他的性质…… 189
9.3 成本函数和生产函数的对偶性 …… 194
9.4 替代弹性:不变替代弹性生产函数…… 198
习题…… 207
部分参考文献…… 208

第 10 章 消费者需求函数的推导 …… 209
10.1 引论:有关消费者行为的各种假设…… 209
10.2 效用最大化 …… 216
10.3 效用最大化模型与成本最小化之间的关系 …… 226
10.4 效用最大化模型的比较静态分析与斯拉斯基等式的传统推导方式 …… 230
10.5 斯拉斯基等式的现代推导方法 …… 235
10.6 货币收入固定的需求曲线和真实收入固定的需求曲线的弹性形式 …… 242
10.7 专题讨论 …… 248
习题 …… 259
部分参考文献 …… 261

第 11 章 消费理论中的若干专题 …… 263
11.1 显示性偏好和交易 …… 263
11.2 显示性偏好强公理和积分问题 …… 270
11.3 复合商品定理 …… 279
11.4 家庭生产函数 …… 286
11.5 消费者剩余 …… 292
11.6 实证估计和函数形式 …… 300
习题 …… 305
有关理论方面的参考文献 …… 307
有关函数表达式方面的参考文献 …… 308

第 12 章 跨期选择 …… 309
12.1 n 期效用最大化 …… 309
12.2 利率的决定因素 …… 321
12.3 存量与流量 …… 324
习题 …… 328
部分参考文献 …… 329

第 13 章 不确定下的行为 …… 330
13.1 不确定情况下的行为 …… 330
13.2 细述偏好 …… 334
13.3 风险厌恶者 …… 338
13.4 比较静态分析 …… 345
习题 …… 349
部分参考文献 …… 350

第 14 章 不等式和非负约束下的最大化 …… 351
14.1 非负性 …… 351
14.2 不等式约束 …… 358
14.3 鞍点定理 …… 363
14.4 非线性规划 …… 366
14.5 加总定理 …… 369
习题 …… 371
附录 …… 372

部分参考文献 …… 374

第 15 章 合同与激励 …… 376
15.1 生产的组织 …… 376
15.2 委托代理模型 …… 377
15.3 业绩衡量 …… 383
15.4 高成本监控和效率工资 …… 385
15.5 团队生产 …… 388
15.6 不完全合同 …… 390
习题 …… 394
部分参考文献 …… 394

第 16 章 不完全信息下的市场 …… 396
16.1 制定决策时信息的价值 …… 396
16.2 搜寻模型 …… 397
16.3 逆向选择 …… 403
16.4 信号传递模型 …… 408
16.5 垄断甄别 …… 411
习题 …… 415
部分参考文献 …… 415

第 17 章 一般均衡Ⅰ:线性模型 …… 417
17.1 导言:固定系数技术 …… 417
17.2 线性活动分析模型:一个特别例子 …… 423
17.3 RYBCZYNSKI 定理 …… 428
17.4 STOLPER-SAMUELSON 定理 …… 430
17.5 对偶问题 …… 431
17.6 单纯形算法 …… 438
习题 …… 444
部分参考文献 …… 445

第 18 章 一般均衡Ⅱ:非线性模型 …… 447
18.1 相切条件 …… 447
18.2 一般比较静态结果 …… 453
18.3 要素价格均等化和相关定理 …… 457

18.4 两商品、两要素模型的应用 …… 471
18.5 总结 …… 474
习题 …… 476
部分参考文献 …… 477

第 19 章 福利经济学 …… 479
19.1 社会福利函数 …… 479
19.2 帕累托条件 …… 482
19.3 福利经济学的经典“定理” …… 490
19.4 一个关于税收的“非定理” …… 492
19.5 次优理论 …… 494
19.6 公共物品 …… 495
19.7 作为福利收益和损失度量尺度的消费者剩余 …… 498
19.8 所有权和交易成本 …… 501
习题 …… 510
部分参考文献 …… 510

第 20 章 在时间上的资源配置:最优控制理论 …… 513
20.1 动态的含义 …… 513
20.2 问题的求解 …… 516
20.3 微分方程的解 …… 524
20.4 解释和解答 …… 528
习题 …… 538
部分参考文献 …… 539

提示与答案 …… 540

词汇表 …… 547

第 1 章　比较静态学和经济学范例

1.1　导论

假如我们现在正在谈论发生在过去一个时代的社会变革，我们一定会讨论到这样一些问题：诸如妇女在竞争激烈的劳动力市场上，特别是在非贸易领域中，诸如工程、法律、医药等，参与程度的增加，双收入家庭的增长潜力，人们结婚年龄的增加与妇女解放运动的兴起等等。如果这时有人对你说，“让我来为所有这些事件做个经济学解释吧”，你会听到怎样的论述呢？“经济学解释”是什么意思，它与社会学解释和政治学解释有什么区别呢？解释一词又有什么深意呢？

单纯的摆事实并不称之为解释；我们用华丽的辞藻来描述大气的变化或股市的涨落，这也不叫解释；我们在文章中用图表列出一堆数字来说明问题，这也不叫解释。所有的这些只是对事实的采集，只能被称做资料。资料固然有趣，但它和解释却不同。解释是指对许多个别的、特殊的事件所做的一般的、概括的总结性论述，我们可以通过这些一般性的定理、规则来认识个别事物。比如，物理学家常引用牛顿的经典力学来解释物体的运动规律。

我们的兴趣不在于单纯地注意到在某时刻发生了什么事情，而在于构筑一个反映人们社会行为的总体框架，使我们能够用它来分析实际情况。本书的目的即致力于构建一个能被经济学家用来解释社会现象的框架或模型。

对经济学有较多学习的学生都会在经济学的标准教科书上看到诸如下述对经济学的定义：“经济学是一门研究基于有限与无限关系中的人类行为的科学，它的分析方法可被选择性地使用”。这就是根据不同的现象来做总体研究的经济学的要旨。但对于经济学家而言，最具挑战性的不是确定所要研究的目标，而是构造分析表层现象的具体框架或模型，虽然社会学家和政治家也同样关心如何配置稀缺资源和如何使个人与这个配置过程同步的问题。但经济学家更注重用方法、范例来解决问题。通常，经济学家把难以解决的问题划分在非经济学问题之列，这些问题难以用被称做新古典主义或边际主义的范例来解释。

历史上的科学，包含了许多的范例和学院思想。在托勒蜜对于行星移动的解释中，地球位于星座系的中央，这个理论被哥白尼的日心学说所代替。这时，关于星移动这个问题被大大地简化了，那些旧有的理论很快被取代了，尽管托勒蜜的范例事实上包括了航海学中的许多思想。牛顿的经典力学范例在物理学中表现得非常突出，而且直到今天仍在解释每天发生的一些日常问题。然而，对于解释一些基本的自然进化问题，它显得有一些不足之处，并

且有些方面被爱因斯坦的相对论所填补。

在经济学中史密斯、李嘉图、马克思的古典学说认为产量增长来自专业化生产和贸易(比较利益)等等。一个突出的问题仍然存在:钻石-水悖论。古典范例主要认为价值决定于投入,但它并不能解释为什么水这个对于人生存至关重要的东西,能用很低的价格购买到,然而钻石这个显然没什么用处的东西却卖得那么贵,即使它是被某个人轻而易举地发现在自家后院。随着19世纪70年代(1870年)边际分析的出现,并且在其后持续的几十年中,杰文斯、瓦尔拉斯、马歇尔、帕累托等人的理论逐渐取代了旧的经济范例。分析经济问题的时候,更多考虑的是个人选择。价值是由消费者的偏好和产品的成本所决定的,并且反映在产品的价值量不能仅仅是该产品"自身内在",价值更是由该产品和其他产品的数量所决定的。

随着希克斯、艾伦、萨谬尔森的新范例的建立,新范例的可用性和局限性逐渐显现,本书也涉及这些方面。

1.2 边际主义的范例

让我们更深一层次地考虑经济学的定义,经济学首先是"经验的科学"。实证经济学考虑的是用事实来论证一件事情是好的还是不好的,它与规范经济学不同,后者是建立在观察者的价值判断上,规范经济学研究或定义什么叫做好或不好,而不是去判断一件事是好还是不好。在本书中,我们主要讨论实证经济学(为了方便,把"实证"二字省略掉)。两个经济学家,其中一个喜欢将收入施舍给穷人,另外一个人并不喜欢这样做。但是,他们对施舍所产生的效果可以得出相同的结论。实证经济学是由命题所组成的,而命题的正确与错误由事实来测定。

但是什么是经济学,它与其他社会科学有何区别?要理解这一点,首先要了解什么是社会科学。社会科学是研究人的行为的科学。社会科学的一个特殊的范例被称为选择理论,也就是说,它是一个概念的框架,利用它来研究人的行为。本书将一直采用选择理论这个框架。它的基本的假设是个人行为由个人选择和个人决策来描述。这一个基本属性将社会科学与物理科学相区别。物理学、化学、生物学中的原子和分子结构并没有被察觉出具有有意识的思想。它们只不过是被动地反映自然界的规律。人们所进行的选择可以是愉快的或者是忧虑的(如,是购买青豆还是土豆来维持生命),总之,人们的选择是普遍存在的。

商品和服务的稀缺导致人们会做出选择。如果这种稀缺不存在,那么社会科学将大不同于现有的形式。尽管还没有独立的选择理论产生,商品和服务的缺乏仍是存在的。稀缺是我们头脑中的一个概念。如果对于某种产品或服务而言,你、我或是任何人能在需要它们的时候想占有多少就占有多少,那么我们常称这种产品为"不稀缺"产品。但我们实际很难想象有不稀缺的产品存在,即使是空气,如果是指新鲜空气也未必是不稀缺的。若要减少空

气污染，社会就要增加生产成本，牺牲对其他一些产品的消费。

稀缺性是建立在个人偏好假设基础上的，特别是指那些人们喜爱的商品。对于不是这种情况的商品，即使它们的数量很有限，也不能被必然地称为“稀缺”商品。

事实上，某种商品的稀缺性是指对于这些产品，选择将从产品生产的第一个阶段开始，直至最后将产品分配给消费者的最终的阶段，在每一阶段都期望得到更多的产品而不是更少。这个问题常被用来给经济学下定义，它有多种表现形式。消费者的偏好到底如何构成，它们是在资源的配置过程中形成的吗(内生的还是外生的)？产品分配应借助市场还是政治系统？应通过什么规则来约束个人选择？由于商品稀缺性涉及社会科学所有方面，对于如何选择这个问题也牵扯到了所有这些方面。

我们现在回到选择的基本概念上来，面这也正是新古典主义，或者说是边际主义学派范例建立的基础。我们认为在一个大的范围内，个人选择问题可决定于两类截然不同的现象的相互作用：

1. 偏好或爱好
2. 机会或约束

假设我们现在列出所有我们认为能影响个人选择的可测量的变量。这就构成了一系列的行为约束。然后会怎样呢？

当然，商品的价格和个人的收入起了主要作用。在每天大部分的决策里，价格和收入对于商品或服务的交换起了主要作用。然而，从根本上说，是特定社会的法律机制和产权规定制约了个人的行为，如果这些不存在的话，那么价格和收入应该大体上不相关。普通的交换很难成功——如果交易者没有明确谁是交易品所有者以及这种交易是否是可行的。法律也在交易上施加了各种约束。在 1973—1974 年的冬季，汽油按固定价格限量供应，但在这种价格下，许多国家的汽油生意是做不成的。如果在某种价格下做不成交易，则说明产品的价格失去了意义，同样的情况也曾发生在第二次世界大战中，那时采用的是调控价格。这时，个人在销售商品时就不能使用一个对于交易双方都满意的价格。因此，在一个给定的社会中，每个人进行选择的机会要受到法律机制与他所具有的产权的约束。

除了上述的约束之外，科学技术和报酬递减法则也同样约束了经济分析。将法律、产权、科技综合考虑，决定了社会的生产可能性即总消费约束。

假设我们现在有针对某个人的可用的、完整的上述变量，对于我们来说，这些信息对个人选择进行预测是否足够呢？我们能否据此来断定他或她吃饭时会吃肉制品还是蔬菜，或是闲暇时会参加古典音乐会还是摇滚音乐会？显然，即使一些约束是完整和肯定的，仍然存在一些不可预测的变量影响了人的行为。这些变量就是我们所指的偏好或者说是喜好。特别是它们构成了人们进行选择的前提。有了这些前提，我们就可以对产品的相关期望进行目标值估计。

进一步说，这些不可预测的偏好变量依个人之不同而不同。例如，某些人愿意用两磅的咖啡去换取一磅的茶叶，而此时另一些人的选择却正好相反。更有甚者，当某两个人的约束

完全一致时——拥有相同的收入，在同一个商店购物、受同一法律制约，他们却通常在商店中购得不相同的产品或服务。正如有些人愿意住小房子开大轿车，而另一些人宁可开小轿车住大房子。

因此。我们将那些影响个人作出选择的变量也称做约束，它们有些是可观测的，有些却不能。比如价格是可以公开的；收入的多少也通常为人所知；法律和产权比较难懂却也写在书面上；因而这些都是可被预知的。相反，人的偏好是不能一眼看出的。正因为如此，我们才会对人的偏好做出种种假设。如果人的偏好能一眼看出的话，这些臆断和假设也就不再需要了。

观察某人的消费习惯，但这并不构成他的偏好——特别是当购买行为很大程度上建立在偶然因素上的时候，因而需要对不能被观察的个人偏好属性做出假设。

这存在一个难题，即每个人的偏好以及约束都不同（在美国的调查数据显示，不同收入者之间和不同社会之间在这一点上都是一样的）。我们如何才能透过这纷繁复杂的表象来系统分析个人的选择问题呢？要回答这个问题就要用到经济学。

为了回答上述问题，我们要同时考虑偏好和机会，从而定义某个情形。即使这种情况不能被应用于现实，它也不失为一个好的分析方法。我们可以在经过大量调查的基础上对个人的偏好做出假设。我们可给出个人在做出选择时所拥有的偏好和所面对的机会。一旦面对个人的机会有所改变，我们可以预测个人的选择在这种机会下的变化。进一步讲，如果不可测定的偏好能用系统方法进行量化，从而使得个人行为显示出有规律性，那么即使当机会或约束改变时我们不能预测个人的初始选择，我们仍能在这时来预测这些选择将如何变化。

因此需要构建个人偏好结构，以便预测相对于约束变化的偏好改变。经济学家的种种假设总是受到经验测评的考验。特别地，我们认为人的行为都是有目的的。例如，我们称所有人喜欢“更多”而不是“更少”，人们会尽量减轻约束造成的破坏，特别是降低约束对机率的影响。我们将给出描述人类行为的方法——将其理论表示为在某种约束下的目标函数最大化（或最小化）问题。

对于方法论，在社会科学范畴中的经济学寻求基于可观察到的约束条件的变化而引起人类行为变化的可辩驳的解释，使用了关于行为和技术的一般假设，将不可测量的变量（即偏好）简化为常量。这就是经济学范例，目前将经济学区别于其他社会科学的范例。

值得注意的是，经济学并没有否认偏好的重要性，也没有把它一直当做常量来看。偏好事实上总是影响着个人选择，如前所述。经济学范例可以回答有关边际数量的问题，不管单个人的偏好是什么，以及这种偏好是如何形成的，它研究总量如何变化。

将偏好看做是不变的只不过是一种假设，但它却不是人的信条。之所以这样讲是因为它允许考察约束变化时所引起的相应的变化。当然，不可测量的变量不可能总是不变的。偏好是要改变的。但是要接受它来解释观察到的事件是为了抛弃寻找一种基于系统的、因而是可测量的行为的解释。观察到的现象与理论相符合，它认为某些不可测量的偏好变量突然间改变了。经济学挑战性的任务是不断地寻求基于约束条件变化的解释。而基于偏好

变化的解释则被看做是洞察不足。我们将这样的解释留给这样一些人，例如，这些人将“解释”美国人在 20 世纪大部分时间里为什么乘大型号轿车，这是因为美国特有的“恋爱事件”而乘小轿车，而不是由于相对较低的汽油零售价格(欧洲价格的 1/2 或者 1/3)。20 世纪 70 年代乘经济型轿车以及 90 年代乘高性能的轿车都是偏好所致。但这些事实都与一般的需求法则相一致。因为汽油价格在 70 年代中期上升，并且在 80 年代以及 90 年代下降。我们更倾向于采用基于轿车消费者所面对的约束条件的变化所引起的变化的理论，而不是主张偏好的变化。

我们如何才能将新古典主义的范例应用到本章的讨论中？我们认为偏好不变。曾有某种论断认为由于 20 世纪 60 年代至 70 年代初的年轻一代比他们的前辈更极端，因而引发了这一系列事件，这被作为一种假设，这也特指那些只能分析某一特定事件的理论，而这种理论往往是不能够解决除特定事件以外的其他事件的。用这种理论来分析事件还不如直接称：人们之所以这样做是因为他们这样做了。但究竟为什么人们的偏好会在那个时候忽然变得一致了呢？

为了给出经济学解释，我们需要寻找一个在 20 世纪 60 年代发生变化的约束，以此来解释在这个约束条件下发生的事件变化。一个经济学的解释来源于第二次世界大战后的婴儿数量激增，在战后北美发生的没有预兆的出生率的增加。1946—1950 年比 1941—1945 年多出生了 1/3 的儿童(出生率持续以高水平延续至 60 年代)

首先考虑一下这会如何影响 20 年后的婚姻状况，也就是对下一个生育周期的影响。男女比例一般是相当的，但是，女人总是倾向于嫁给比自己大一些的男人。当在出生比率高的时期出生的婴儿成年时，女人们面临着一个难题：20 多岁的男人(那些出生于 40 年代早期的男人)少于年龄相称的 20 多岁的女人(那些出生于 40 年代末期的女人)。事实上，有大约 20%的年轻女性不能维持原有的婚姻模式。因而也许就在此时发生了妇女解放运动。旧式的简单的结婚模式，养子的婚姻模式对于很多年轻女性变得不可能，而对良好职业的追求反而变得更富有吸引力了。

除了婚姻挤压还存在一个年轻人之间的追随和效仿，这造成了劳动力市场的劳动力增加和工资下降。随着工资水平下降，不难理解为什么双收入家庭变得更普遍。因为抚养婴儿的投入太大，许多人放弃喂养婴儿，导致 70 年代的出生率直线下降。

出生率下降导致了后来 90 年代的就业人口的减少。也正是这个原因，工资水平有了相对增加，在大部分地区最低工资水平超过了以往的法定最低工资水平。在这个时期，年轻女人们希望找收入水平丰厚且比自己大几岁的男性，人们的婚姻模式又往回倒退了。

这个讨论只是对经济学方法论的一个阐述，并不代表完整的理论。然而，它也是关于经济学范例的主要特性。除了通常的对市场现象以及由传统的非经济学工作者所调查的事件进行的分析，或许，我们称之为“偏好”的人力资本可用来解释经济学范例。事件的变化可以认为是一些不可测量的变量保持不变，并且在约束条件发生变化的情况下追求目标最大化的结果。

1.3 理论和可驳斥命题

在前几节我们已经用术语如:理论、命题以及证实与其他术语一起确保讨论的方便。特别地,什么是理论,理论在科学的解释中扮演什么角色?

有时解决一个给定问题的方法应该是"让事实自己说话"。假设一个人想要发现为什么汽车司机在1973—1974年冬季期间,即所谓能源危机期间,忽然间要为汽油而排队,常常需要排队等候几小时。通常要做的第一件事是收集数据。应从何处去找数据呢?或许地方大学图书馆中的政府文件中有助于找出数据。这就产生了一个问题。收集数据者可能会陷入数据的海洋中。由美国联邦政府以及其他政府部门收集的数据充满了许多房间。从何处入手?或许应考虑如下一些"事实":

1. 1973年秋季许多石油生产国家禁运石油给美国。
2. 美国国民生产总值上升,从1972年到1973年上升了11.5%。
3. 汽油以及燃油是石油的蒸馏物。
4. 当时工资以及其他产品价格的控制对石油工业产生了影响。
5. 由于采用抗污染装置,汽车每加仑汽油行驶的公里数下降。
6. 当时食品价格大幅上升。
7. 当时房屋租金上升,但是没有食品的价格上升得那么快。
8. 在林肯州和内布拉斯加州,1968年9月14号西红柿价格每磅39美分。
9. 纽约城区的大部分污染有固定的污染源,而不是来自移动的污染源。

可以一直列下去,有无限多的事实。大部分读者已经认为第8条事实是不相关的,并且可以确定列出的无限数目的事实中大部分是不相关的。为什么呢?为什么会得出这个结论?难道第8条事实被拒绝仅仅是因为我们中大部分人都同意拒绝它吗?第4和第5条事实怎么样?同意这些事实是有关联的理由可能不够充分。

事实本身并没有解释事件的原因。当我们寻求事物变动因果关系的解释时,如果没有关于自然界各种现象的一组公理、命题等,就无法从许多互不相关的事件中整理出相关的事件来。有的读者之所以认为以上第8条与能源危机不相关,是因为他们头脑中存在某些行为关系的基本知识,这些基本知识认为1968年西红柿市场不是能源危机的影响因素。这种基本知识就是理论的初级阶段。

理论的结构

在经验科学中,理论是一组关于现实世界各种客观事物运动的解释或预测。理论由三部分组成:

1. 一组断言或假设，利用 $A=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 来表示，它们与现实世界客观事物相联系，用来进行客观事物运动的概念化描述（或许是数学描述）。这些假设一般以命题的形式出现：所有 x 都具有性质 p。在经济学中，这种命题的例子有“厂商极大化财富或者利润”，“消费者极大化效用”等。这时在上述用于描述行为的断言或假设所涉及的术语如厂商、消费者、价格、数量等都是有待识别的概念。因此他们都作为理论的基本构成。

2. 如果关于理论基本构成的行为断言在经验科学中是有用的，那么这些断言或假设必须与实际客体有关。因此理论的第二个部分是一种设定或检测条件，它们用 $C=\{C_1,\cdots,C_n\}$ 来表示，用上述设定来检验行为断言。这些设定包括如下这样一些语句：“这样那样的变量 p，称为在理论断言中的面包价格，实际上对应于某个超级市场中某月某日面包的价格”。

请注意到术语假设与设定的区别。在经济学中，长期以来一直存在着争议，即是否需要这种现实主义的设定，如果明确地将理论（断言）的行为假设与检测特定理论的检测条件（设定）相区别，则可以将这种混淆大大地减少。

如果理论要付诸应用，那么这种设定或检测条件必须是可观察的。如果没有告知理论所对应的客体，那就不可能知道理论对事物运动解释的是好还是不好。假设或断言 A 是关于抽象物体的一般描述。它们是不可观测的；所以关于这些断言是否实际的争论就没有必要。而设定必须是实际的，也就是说，如果理论被给定的一组数据有效地检验，那么这种数据必须与理论基本构成相一致。举个例子，假如我们希望检验汽油价格上升是否会使得汽油需求量下降。我们将观察到第二次世界大战以来直至 20 世纪 80 年代汽油的货币价格一直上升，而汽油的消费也一直上升。这是否否定了以上的关于高价格将引起需求量下降的行为断言呢？或许这些数据特别是关于价格的设定是不现实的，所提供的价格的系列数据是否真实地反映了汽油价格（理论基本构成）预期中的特征呢？需求定律更准确的描述应当不仅仅考虑石油的货币价格，还应当考虑到其他价格以及收入的变化。并且假设它们保持不变。当考虑其他因素之后，汽油的实际价格，也就是除了 1973—1974 年以及 1979—1980 年之间石油供应中断期间之外，汽油相对于其他产品的实际价格确实在不断下降。这样一来，实际情况便与需求规律相一致了。但是，为了用这些数据检验需求规律，关于收入以及相关产品价格等的设定必须是实际的，也就是说，应当与理论的本质方面相一致。我们所说的理论基本构成的本质方面是因为在有限的时间与空间里我们不可能去描述给定实体的每一个属性。关于设定的现实主义的重要性是确保没有被指明的属性并不影响理论的检验。在上述例子中，石油的货币价格是石油价格的一种不现实的度量，也就是说，他们没有包含理论相一致的属性。理论的设定和检验条件必须是现实的，而断言或行为假设则永远是不现实的，因为他们是不可观察的。

3. 理论的第三部分由事件 $E=\{E_1,\cdots,E_n\}$ 组成，这些事件由理论所预测。理论告诉我们一个行为断言 A 意味着如果检验条件 C 是有效的（现实的），那么一定的事件 E 将发生。举个例子来说，消费者行为（商品间边际替代率递减的效用最大化）的通常假设用 A 来表

示，它意味着如果检验条件 C 成立，这里 C 含义为：在实际收入与其他产品价格保持不变时，汽油价格下降，即这些假设在所观察到的事实上是真的，那么事件 E——比较高的汽油消费——将会被观察到。注意到设定和检验条件 C 以及事件 E 都应该是可观测的，否则我们说不清理论是否可以应用。

因而理论的逻辑结构是：断言 A 意味着如果 C 是真的，则 E 也将为真，用符号表示可以记为：

$$A\rightarrow(C\rightarrow E)$$

其中符号→表示“蕴涵”。利用符号逻辑，符号语句又可以记为：

$$(A\cdot C)\rightarrow E$$

在条件 A 和假设 C 同时成立的情况下，事件 E 就会发生。

可驳斥命题

我们曾提到“检验理论”。我们要检验的是什么？我们如何进行检验？首先，对于假设 A，我们没有办法直接去验证它。假如我们采用经典的例子——某人想要验证某个厂商是否达到了利润最大，这时我们应怎么做？假设这时会计拿出厂商本年和去年的利润表和资产负债表。假如你发现厂商在本年度赚了 1 百万美元，你能依此断定厂商达到了利润最大吗？可能它还能赚 2 百万或者是 1 千万美元呢？你知道该是多少吗？

或许我们可提出一个简单的问题。现在厂商是否赢利最小？当然不是，你会说毕竟它还赚了 1 百万美元。好吧，或许这是个好厂商，它没有办法赚得少于 1 百万。不，你又说了，如果厂商想要达到利润最小的话，他只需扔掉产品、用天文数字般的高薪去雇工、把沙子投入机器或是杂乱无章地去管理。如果断言厂商希望赢利最小，那么将会预期到如果厂商有这样的行为，那么它将忙着去做上述的事情。由于所讨论的客体无疑是厂商，即检测条件或设定 C 是实际的，同时由于由利润最小化所预期的事件没有发生，因此，利润最小化的行为论断 A 被驳斥。但是，我们只能通过基于那些假设的现实的、可观测的事件，在设定的检测条件下，逻辑上给出预期，并且当预期为假的时候，假设才能被拒绝。假设是不能凭空来测定它的成立与否，只有依事实(事件)在可观测的检验条件下来检测它们成立与否。

目前还没有能够证明企业利润最大化。但是，我们也明确了一些事情。判断一个企业是否达到利润最大化不能靠我们想象，而是要看在某种假设下的行为是否验证了或否定了利润最大化的假定。如果被预测的事件发生了，我们就有了验证某个假设的论据，理论从而被肯定。但这就证明了吗？当然不是。如果单凭假设 C 和假设 E 成立就去断定假设 A 成立，这不符合逻辑。例如，命题“若两个三角形重叠，则这两个三角形相似”成立。但若两个三角形相似，它们未必重叠。

有一个有力的例子能说明为什么理论是不能被证明的，这个例子在图 1-1 中被展示出

来。小图(a)推测了地球是圆的这个理论。而在小图(b)中，同样的现象却得到不同结论——地球是平面状的，光线是向下凸向地球的，仅仅凭这一条是不能决定哪种理论是正确的。总有一种新的理论产生。能够解释已有的一系列现象。因而理论应该有富有逻辑的，却是不能被证明是完全正确的。我们只能不断地找到新的事实来肯定理论。一个理论所经历的时间越长，它就越可信。但我们永远也不能证明某一种理论就是正确的。

对于地球的形状的两种理论，图 1-1(a)表示了一种假设——光线是走直线的，但船由远至近时，我们观察到的船体越来越显露出来，这种现象论证了上面的假设。而在图 1-1(b)中，观察者所观察到的现象是相同的，而它也论证了另一种假设——光线的走向是凸向地球的，而地球却是平的。

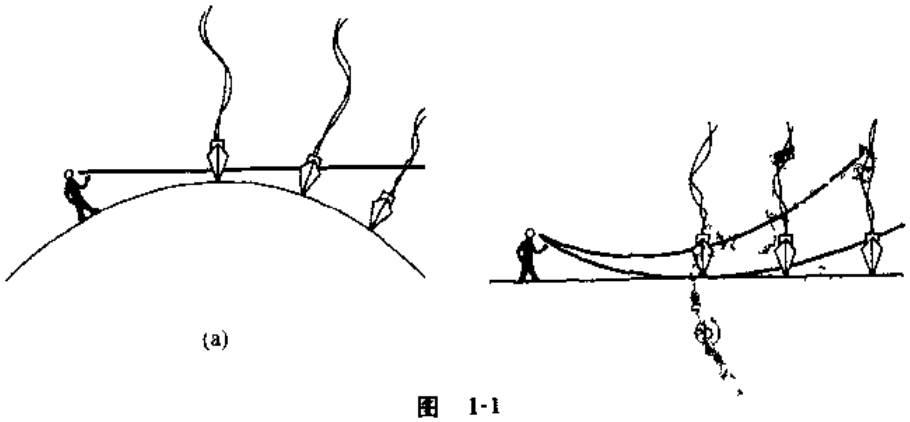

图　1-1

在经验主义的科学中哪种理论是有用的？那些正在使用的理论恐怕是那些看似错误，要被否定却又没被否定的理论。某个理论说：明天或者下雨或者不下雨，这并不能被称之为理论。因为它不可能被认为是"假"，这个事件总是成立的。"如果汽油价格上涨，消费水准也将上升或下降"，这种说法也是毫无意义的。真正有用的理论是由那些可驳斥的假设推理而来的。理论主张，若事件 E 会发生，那么事件 E 也可能不会发生。这种定理至少在原理上是可驳斥的。事实可能会驳斥理论。因为如果 E 为假，则根据逻辑判断 $(A \cdot C)$ 为假。(但如果 E 的不发生归因于虚假的或不真实的测试条件或是不现实的设定 C，则这个理论很有可能是不应被驳斥的。)

为了使其自身有用，经济学的范例必须包含可驳斥的定理。任何其他形式的论述都是没有用处的。在本书中，我们将说明这些经济学中可驳斥的假定是如何来自于关于人类行为的种种假设的。恐怕没有什么比一致的行为基础更有说服力了，特别是最大化行为假设。对这样一个理论基础的需要是无可争议的，否定它就是否定经济学。没有这样的一个理论基础，不给出任何结论。经济学家们认为，有些事情是不可能发生的，就像物理学家认为水不可能从山下倒流到山上一样。其他还有，价格的降低不会导致消费水平的降低；保持其他生产投入不变，边际产量终会下降。这些都不会有例外情况发生。

1.4 对应模型的理论：比较静态学

比较静态学对一个理论的测定包含着两个相对直观的过程。首先，考虑这个理论中所有逻辑可能的方面。也就是说，举出行为的假设暗含的理论上的某种行为变量。然后，理论的结构会被应用到实际数据中，从而理论被经验性地测定了。我们在本书中所要做的是这第一步。为了区分理论化的两个阶段，我们要用到 A. Papandreou 的差异论，后来其又被 M. Bronfenbrenner 引申了。纯粹的逻辑化理论应被称做“模型”。当猜想将理论结构与实际目标联系起来时，模型就变成了理论。模型因而也是逻辑系统。经验性地讲，它们非真也非假，既是逻辑有效的又是无效的。如果一个理论的模型不符合逻辑或是被经验否定，那么这个理论就是不成立的。

对于定理是可驳斥的观点同样保留于模型当中。在逻辑系统中，可驳斥定理意味着当某个概念性的测定条件发生时，理论变量将会得到限定的值。假设在某个模型中，变量 P 代表某种产品的价格，如果它的值上升，那么作为逻辑性的反映，产品的需求量 X 便会下降。这表示这个模型符合某种定理。值得争议的地方就在于 X 会随 P 的价格做怎样的变化。

在经济学中，通常用数学方法进行逻辑仿真或模拟来测试理论，我们称之为比较静态理论。静态一词被误用了，在对理论的测试中不存在什么静止的东西。在经济学中，测试理论往往是建立在当某测试条件或设定改变时变量改变的基础上。对“比较静态”这个词的理解应不是针对时间而言的，而是针对变量改变方向而言。

对理论的测定需要把变化的值分为两种：

1. 决策或是选择变量。

2. 参数，或指模型外在的变量，也就是说，它不是由政策制定者决定的因素。参数也代表理论的测试条件。

我们把决策或是选择变量称做 x，把模型的参数称做 α。为了使其更加有实用性，理论构造了一个关于 x 和测试条件 α 的函数：

$$x=f(\alpha) \tag{1-1}$$

也就是说，给定了行为假设 A，如果测定条件 C 决定的参数 α 一定，则会产生相应的 x 值。因而，x 值是由 α 值决定的，如式(1-1)所示。

从经验角度来看，经济学家很少能够直接测定式(1-1)中的关系。如前所述，做到这一点需要充分的偏好和机会方面的经验。新古典主义范例因而也就建立在对边际数量观察的基础上。边际数量实际反映了针对于 α 变化的数量改变。

在数学上，若函数为可导，则：

$$\frac{dx}{d\alpha}=f'(\alpha) \tag{1-2}$$

它代表一个在经济学中潜在的可驳斥假设。例如，在需求理论中，价格 P 是外部因素，为参数，而需求数量 x 为选择变量。需求法则(在通常条件下)认为 $dx/dp<0$，因为 $dx/dp>0$ 也是有可能的，所以 $dx/dp<0$ 为潜在的可驳斥假设。只是这样讲违背了模型原意。比较静态学是指某种调查经济模型的驳斥性假设是否成立的一种方法。如果不成立，这种实际的经验测定就是浪费时间，因为没有任何数据能推翻这种理论。

1.5　比较静态学的例子

为了阐述前面的原理，让我们来考虑三个关于企业行为的选择性假设。特别地，若我们有如下假设：

1. 厂商最大化利润 π，π 是代表收入减成本。

2. 厂商总想让自己的效用函数 $U(\pi)$ 达到最大，其中 $U'(\pi)>0$，高的收益即意味着高的效用。因此，期望得到利润不是由于利润本身能带来什么，而是由于它提供了生产者效用。

3. 生产者追求销售数量最大化，也就是说仅仅追求总收入最大化。

用什么方法才能验证和比较这三个理论呢？不可能仅仅用反思的办法来验证它们。思考一下这些假设听起来是否合理，这不应是对这些假设的经验性可信的验证。询问企业所有者是否他们的行为符合这些方式也不是不可能的验证。验证这些假设成立的惟一方法就是先看这些假设是否为潜在性可驳斥假设，再看是否实际的企业符合这些理论预测。

什么样的可驳斥性假设是来源于这些行为论断的呢？

例 1. 令

$R(x)$＝总收入函数(依赖于产出量 x)

$C(x)$＝总成本函数

tx＝总税收收入，这里 t 为单位税率，t 为超出企业控制范围处的参数。

如果在完全竞争的市场上销售产品，也就是说厂商是价格 p 的接受者，那么：

$$R(x)=px$$

其中，p 为产品的价格，它是一个参数。但如果企业处于非完全竞争的市场上时，价格由产量 x 决定，x 由需求决定，因而收入仅仅为产出量的函数 $R(x)$。

在一般情况下，税率为惟一参数，在模型中为惟一测试条件。因此第一个模型变为：

利润最大化

$$\pi(x)=R(x)-C(x)-tx \tag{1-3}$$

通过简单计算，函数最大化的一阶条件为：

$$R'(x)-C'(x)-t=0 \tag{1-4}$$

其中，一撇表示一阶导数

函数最大化的二阶条件为：

$$R''-C''<0 \tag{1-5}$$

条件(1-4)是以隐函数形式表示的企业决策函数。它表示企业将会选择当边际收入(MR)等于边际成本(MC)减税率(t)时的产生量。如果企业是完全竞争者，则 $R'(x)=P$，且 $R''(x)=0$。方程(1-4)和(1-5)则分别变为：

$$P-C'(x)-t=0 \tag{1-4'}$$

$$-C''(x)<0 \tag{1-5'}$$

我们应当寻找一个立足企业的非特殊化的收入函数 $R(x)$。而对于将上述模型应用于完全竞争情况将作为一个习题留给同学们去讨论。

方程(1-4)是一个众所周知的"边际"推理的应用。方程(1-4)表示企业的产出应当定在某水平上，而产出在这种水平下时，企业的增量(边际)所得应确切地决定于其增量成本(包括税)。然而，只满足这一个条件并不能保证利润最大化。因为在这种条件下，即在满足该一阶条件时，也有可能为利润最小化。我们在此要说明的是，只要边际收入大于边际成本，企业就会增加产出；若边际收入小于边际成本，企业会减少产出量。这一点在式(1-5)中被体现出来，它代表收入的增长速度总是要慢于成本的增长速度。用图来说明就是，边际成本曲线在边际收入曲线的下部与其相切。

值得注意的是，我们并没有说只有当边际收入等于边际成本时企业状况最好，这只是一个价值判断，而不是行为模式。方程(1-4)不等于企业处于均衡状态。式(1-4)为利润最大论断在逻辑上导出的必然发生的事件。如果事实不符合式(1-4)，则构成了一个对不是非均衡、非最佳行为模型的驳斥。因而我们假设企业行为服从式(1-4)和(1-5)，并据此对它们的行为做预测。

但是简单地称 $MR=MC+t$，这样做并没有用。一个人不可能观察到这些边际关系。就像偏好是很难观察到的，总收入和总成本函数以及它们的导数也是很难观察到的。然而预测企业对周围变化的反映，例如税率变化，还是有可能的。即使利润最大化、边际收入、边际成本不能被直接观测到，而税率和销售数量都是潜在的可观测值。利润最大化包括考虑这些可观测值。

式(1-4)与(1-5)如何被用于预测对应的边际值？通过进一步的观察，我们注意到式(1-4)是关于 x 与 t 的隐函数关系式。在一定的数字条件下，这种隐函数关系可被表示为显函数形式：

$$x=x^*(t) \tag{1-6}$$

也就是说，一旦我们确定了 MR 曲线和 MC 曲线的方程，则只要企业近似地服从这个边际关系，无论税率变成什么样，我们都能在理论上通过解上面的显函数来决定究竟在某种税率下应生产多少产品。虽然期望能得到式(1-6)的确切形式，经济学家仍无法得到更多。因此，关于总量的预测总是无法进行。但我们仍然能够预测边际数量。

将式(1-6)代入式(1-4)，得恒等式：

$$R'(x^*(t))-C'(x^*(t))-t\equiv 0 \tag{1-7}$$

式(1-7)中，无论 t 为何值，等式左边值都为 0。这是由于随着 t 的变化，总会产生一个相应的产生值 $x^*(t)$ 使得式(1-7)左边值为 0。也就是说，无论税率怎么变，企业总是让 MR 等于 MC 加上税率。由于我们感兴趣的是随 t 的变化 x 将会怎样变化，将式(1-7)对 t 求导，注意式(1-6)。同学们必须注意这个求导只有当 x 为 t 的函数时才有意义。否则符号 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 便没有了含意。在没有正式确定方程的独立性之前就贸然对式(1-4)求导为时过早。正是由于企业在边际处均等，也就是服从式(1-4)，这导致了式(1-6)的具体形式存在性：x 相对于 t 的函数独立性。恒等式(1-7)两边可被求导。而式(1-4)不能。例如，$(x+1)^2\equiv x^2+2x+1$ 两边可被求导，而 $2x=6$ 不能。

将式(1-7)求导，得：

$$R''(x)\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t}-C''(x)\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t}-1=0 \tag{1-8}$$

设 $(R''-C'')\neq 0$ 有：

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{1}{R''-C''} \tag{1-9}$$

因为 $R''-C''<0$，这是由利润最大化二阶导数条件得来，所以有：

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t}<0$$

注意，由式(1-3)所示的利润最大法则(不可观测)推出了产出量会随厂商所面对的税率的增加而降低的可驳斥命题。

例 2. 我们来思考第二个行为假设。我们假设获取利润并不是主要目的，而想要得到的是来源于其内在的效用。我们现在称企业所有者追求效用最大化，且 $U'(\pi)>0$，这意味着利润的增加带来效用的增加。效用函数 $U(\pi)$ 衡量了企业所有者来自效用增加的满意程度。

目标函数现在为：

最大化

$$U(R(x)-C(x)-tx)=U(\pi) \tag{1-10}$$

企业的决策函数，如前述，是通过建立 $U(\pi)$ 的对于 x 的导数求得的。

应用链式法则：

$$\frac{dU}{d\pi}\frac{d\pi}{dx}=0$$

或者：

$$U'(\pi)[R'(x)-C'(x)-t]=0 \tag{1-11}$$

因为 $U'(\pi)>0$，所以决策函数 (1-11)等价于：

$$R'(x)-C'(x)-t=0 \tag{1-4}$$

因为隐函数(1-4)和(1-11)等价，所以它们的结果相同：

$$x=x^*(t) \tag{1-12}$$

因而，无论是为了追求利润最大化还是满意度最大，企业将会采取相同的行为。相同的显函数结果(1-6)和(1-12)表明产出会如何随税率的变化而变化。我们还不能忘了要检验这一点处利润是取最大值而不是最小值，特别是要通过二阶导数条件来检验。首先列出一阶导数条件：

$$\frac{dU(\pi)}{dx}=U'(\pi)[\pi'(x)]=0$$

应用乘积的求导法则：

$$\frac{d^2U(\pi)}{dx^2}=U'(\pi)[\pi''(x)]+[\pi'(x)]\{[U''(\pi)][\pi'(x)]\}$$

因为由一阶导数条件有 $\pi'(x)=0$

$$\frac{d^2U(\pi)}{dx^2}=U'(\pi)\pi''(x) \tag{1-13}$$

因为 $U'(\pi)>0$，当且仅当 $d^2\pi/dx^2<0$ 时 $d^2U(\pi)/dx^2<0$。也就是说，两个模型的二阶导数条件是相同的。

这两个行为理论带来了相同的可驳斥假设，因而在某种意义上它们是等价的。即使有更多的参数被引入到 $\pi(x)$之中，所得到的一阶、二阶方程却会是相同的。因此没有数据或事实可以区别出厂商是最大化利润 π，还是最大化利润的任意一个增函数 $U(\pi)$。我们将永远不可能知道厂商是最大化利润 π，还是 e^{π}，或 π^3(为什么?)或其他，这些行为断言或假设总是给出相同的可驳斥命题。

例 3. 现在，我们来考虑三个企业的行为假设中的最后一个，最大化总销售额。如果企业被征收的税率为 t，则目标函数将为：

最大化

$$\phi(x)=R(x)-tx \tag{1-14}$$

企业最大化的一阶决策函数为：

$$\phi'(x)=R'(x)-t=0 \tag{1-15}$$

$\phi''(x)$最大化的充分二阶导数条件是：

$$\phi''(x)=R''(x)<0 \tag{1-16}$$

由税率决定的厂商显决策函数是式(1-15)的解：

$$x=x^{**}(t) \tag{1-17}$$

这个决策函数在一般情况下给出了对应于任意给定税率情况下的不同产出水平，它与式(1-6)或(1-12)决策函数不同。如果收入函数 $R(x)$确实是已知的，那么这个理论(销售总额最大化)与前面两个理论有所区别，因为它们包含着不同的决策函数。然而，如果收入函数 $R(x)$是不能直接观察到的(从经验来说好像是这种情况)，那么惟一可拒绝的假设将涉及 $\mathrm{d}x^{**}/\mathrm{d}t$ 的符号。在本模型以及上一个模型中，该导数的符号应是负的。将式(1-17)代入式(1-15)，再对 t 求导：

$$R''(x)\frac{\mathrm{d}x^{**}}{\mathrm{d}t}\equiv 1$$

或利用式(1-16)的二阶充分条件，可得到：

$$\frac{\mathrm{d}x^{**}}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{1}{R''(x)}<0 \tag{1-18}$$

由此，除非收入以及成本函数是已知的，销售额最大化与利润最大化假设是等价的，这是由于没有税率的变化以及销售额的变化的观测值来区分这两个假设。如果是不可观测的，并且对任意的 $R(x)$以及 $C(x)$都有 $\mathrm{d}x^{*}/\mathrm{d}t<0$，并且它们都存在二阶条件，那么对 $C(x)\equiv 0$ 来讲，观测结果是相同的。例如，对于企业的长期发展来说，极大化利润以及极大化销售额可能是不一样的。

例 4. 假设企业的所有者要极大化“净灵敏度”，也就是没有征税情况下的灵敏度，这里灵敏度已经用两年的数据利用最小二乘法的回归技术被估计出来，可以得到关于灵敏度的公式如下：

$$S(x)=\frac{\alpha\log[\tan(\mathrm{e}^{\beta x}+\mathrm{e}^{\sin x})+\cot(\beta x+\log(1+\mathrm{e}^{\beta x}))]}{\log(\alpha+\beta x x)}$$

其中，α,β 是函数 S 的正参数。那么对于税率增加以后，厂商应该如何反应？

目标函数为：

最大化

$$S(x)-tx$$

假设一阶以及二阶条件存在，那么再将包含一个显决策函数 $x=x^{*}(t)$。这个模型的结构与例 3 的结果必是一致的。在目标函数当中所利用的特殊的函数形式是没有关系的。有关系的有如下几点：

1. 一阶及二阶条件成立。

2. 税率参数 t 在目标函数当中出现时，具有如下的性质，在一阶恒等式中关于时间 t 求

导的时候，在这个恒等式的左边产生一个负的值，并且等式右边出现了一个正的值。（当税率参数 t 在目标函数当中以 $-tx$ 出现的时候，等式右边出现了一个正 1 的值。）

这样所得到的表达式 $\mathrm{d}x^*/\mathrm{d}t$，将总是具有这样的形式：它是由正的项除以由目标函数的二阶导数所组成的项，由于充分的二阶条件所决定，该二阶导数必是负值项。因此在所有这种情况下，我们将得到 $\mathrm{d}x^*/\mathrm{d}t<0$。我们没有必要去求导一个杂乱且复杂的目标函数来得到以上结果。

例 5. 对于非竞争的企业有着不同于前面所述的分析方法。对于完全竞争企业，产品价格 p 是给定的。企业是价格的接受者，它不能靠自我的选择行为来影响价格。对于完全竞争企业来说，企业的收入 $R(x)$ 简单说来就是 px，是价格乘以数量。因为这是 $R(x)$ 的一个特殊情况，所以前面的分析也同样适用于竞争企业：对产出征税会导致产出量下降。

面在这个模型中，出现了一个新的参数 p。利润最大假设是否暗示了一个针对 p 变化的可驳斥性假设？下面为目标函数：

最大化

$$\pi(x)=px-C(x) \tag{1-19}$$

最大化的一阶条件得出隐决策函数：

$$p-C'(x)=0 \tag{1-20}$$

这里，边际收入＝价格 p。因此，这个关系式表明企业将会调整使得边际成本等于价格。但是，除非我们知道成本函数，否则这个结论不是太有用。

π 最大化的充分二阶条件为：

$$\frac{\mathrm{d}^2\pi}{\mathrm{d}x^2}=-C''(x)=-MC'(x)<0 \tag{1-21}$$

也就是说，企业的边际成本函数的斜率应当是向上的。式(1-20)给出决策函数：

$$x=x^*(p) \tag{1-22}$$

这个方程就代表了企业的供给函数，它表示对于给定价格 p，企业愿意提供多少产品销售。严格地讲，边际成本函数并不是企业的供给函数。在 MC 函数中，产出 x 是自变量，而边际成本是应变量。在供给函数中，产出是应变量，而价格是自变量。因此，供给函数是 MC 函数的反函数。当 p 变化时 x 如何变化？将(1-22)代入(1-20)，有恒等式：

$$p-C'(x^*(p))\equiv 0 \tag{1-23}$$

等式左边总为零，因为我们现在假定无论市场价格如何变，企业总能将价格调整到大小等于能适应任何价格水平之下的边际成本。

若求导数 $\mathrm{d}x^*/\mathrm{d}p$，则首先等式(1-23)两边对 p 求导，对 $C'(x^*(p))$ 应用链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}p}-\frac{\mathrm{d}C'(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}p}\equiv 0$$

或：

$$-C''(x)\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}p}\equiv -1$$

并且，因为 $C''\neq 0$，由二阶充分条件有 $C''(x)>0$，

则有：

$$\frac{dx^*}{dp}\equiv\frac{1}{C''(x)}>0 \tag{1-24}$$

因此，利润最大的行为假设带来了可驳斥假设，即竞争企业的产品价格若增高，则产出水平会增加。供给函数的图形是向上斜的。如赋予这个模型数学性质，我们可以比较由理论构架的企业与实际企业，并用真实数据测试这个理论。但只有当模型具有要驳斥推断时，这种测试才有意义。

习题

1. 考虑如下被称之为需求法则的例外情形："随着钻石价格的降低，对钻石的需求也会下降，因为对钻石的拥有欲会下降"。为什么这不是需求法则的例外？什么样的测试条件被违反了？一个人如何去测定钻石的需求法则？（提示：如果珠宝商一味地降低钻石价格，结果会怎样？）。
2. 论断和假定的区别是什么？哪一个是可观察到的，哪一个不是？哪一个会是"真的"？
3. 许多年轻人认为他们的父母和祖父母既严肃又保守。考虑到新程序的投资和实验代价很大，解释为什么会期望年轻人比老年人更易于接受新方法（或者说，小狗为什么比老狗易于学习新技巧，为什么老狗更擅长旧技巧）。
4. 为什么经济学家将分析局限于边际数量而不是总量？难道是经济学家认为研究边际数量比研究相应的总量更有用？
5. 理论和模型的区别是什么？
6. 是否可以在理论设定的现实性与理论的易处理性（即经验的有用性）之间相互补充。
7. 关于问题 6，有必要拥有最新的原子运动理论来生产盘尼西林和其他奇特的药吗？如何描述一个预测关税对工业影响的理论？
8. 考虑某垄断者，他的成本函数为 $C=kx^2$，他面对的需求曲线为 $x=a-bp$。
   (a) 你认为参数 a,b,k 的数值有何限制？
   (b) 求显函数 $x=x^*(t)$。证实在以上(a)a,b,k 的数值限制之上，$x^*(t)$的一阶导数小于 0，即产出随税率的上升而下降。
   (c) 用利润最大化假设代替以上 a,b,k 的数值限制的假设将是什么样的？它比先前的假设更弱还是更强？
   (d) 将你所求出的 $x^*(t)$函数代入极大化的一阶条件中，并证实关于 t 是恒等式。
   (e) 对于本模型所示情况，证实利润最大化仅意味着 $x^*(t)$的一阶导数小于 0。
   (f) 是什么因素影响使需求曲线右移？
9. 证明对完全竞争者增收单位税会降低其产出量。
10. 证明为什么垄断者不存在供给函数。（提示：在本章的例 1 中，是如何定义 $x^*=x^*(p)$的？）
11. 如果企业只考虑成本最小而不考虑收入，这种理论与本章例 1 至例 3 所讨论的情况有何不同？

12. 思考企业的"毛利"$R(y)-C(y)$和"净利"$R(y)-C(y)-ty$，这里 t 为单位税。证明在利润最大情况下，如果税率增加，毛利与净利都会随之降低。
13. 铝罐要制成高度为 h，直径为 D 的圆柱形圆筒，假设在下料切割圆筒侧面展开的正方形的形状时没有浪费，而切割圆筒底部的圆形的时候，要从正方形中切下一个圆，余下的下脚料被废弃了。
    (a) 求证在给定的体积下，金属片浪费最小时铝罐的形状尺寸为 $h/D=4/\pi=1.27$。
    (b) 到你家附近的超级市场上去看一看，铝罐是否是这种形状？
    (c) 可能存在某些特殊的情况，如金枪鱼太短，有些东西又太长，在这种情况以及你所看到的其他情况下，生产者将如何处理？
    (d) 现在假设铝罐底部的圆形下料以后的原料所剩下的边角料可加以利用，利用系数为 k，证明减少浪费以后，铝罐的形状尺寸近似为 $h/D=1$。
    (e) 当然，除了铝罐的费用以外，还要考虑铝罐内容物的价值。如果考虑铝罐内容物的价值，如何考虑对上述所讨论的成本的影响(参考第 11.3 节 Alchian 及 Allen 关于"替代定理"的讨论)。

第 2 章　经济学中有关微积分运算的介绍(单变量)

我们估计许多读者都在基础课上学到过单变量函数的基本运算法则,并且已经耳熟能详了,但经济学中的函数运算往往结合着经济学自身的概念,也是以往的基础课不能反映出来的,因此,我们认为有必要在这一章介绍一下在经济学中经常用到的函数运算方面的有关问题(我们不妨假设函数都是可微的)。

2.1　函数、斜率和弹性

我们用函数 $y=f(x)$来表示变量 x 与 y 之间关系。在这里,导函数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f'(x)$表示函数随自变量 x 变化速度的快慢。从几何观点来看,$f'(x)$是 $f(x)$的斜率,而二阶导数 $f''(x)$是 $f(x)$变化速度的快慢。在物理学上,如果 $y=f(t)$表示在时刻 t 物体的高度,那么 $f'(t)$就表示物体的运动速度,而 $f''(t)$则表示物体的加速度。

斜率是指当自变量变化时,应变量变化占自变量变化的百分比,斜率的大小就是曲线的弹性。假设 $x=f(p)$是需求(或供给)曲线,这里 p 为价格,x 为需求量。需求(或供给)弹性定义为:

$$\epsilon=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta x/x}{\Delta p/p}=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{p}{x}\frac{\Delta x}{\Delta p}=\frac{p}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} \tag{2-1}$$

如果$|\epsilon|>1$,那么该曲线被称为是富有弹性的。如果$0<|\epsilon|<1$,那么该曲线被称为是缺乏弹性的。注意到需求曲线以及供给曲线在笛卡儿坐标系当中通常都是将水平轴作为需求量或者供给量 x。所以斜率 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}p$ 就是通常斜率的倒数。

例 1. 令 $x=ap^b$。证明该函数的弹性 $\epsilon=b$ 为常数。

利用定义(2-1):

$$\epsilon=\frac{p}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=\frac{pbap^{b-1}}{ap^b}=b$$

该曲线要么总是富有弹性,要么总是缺乏弹性。如果$b<0$,那么这些曲线对任何的 p 来说,它们的斜率都是向下倾斜的,这种曲线通常表示需求曲线。它们属于一类双曲线函数。如果$b>0$,那么这些曲线是向上倾斜的,这种曲线通常表示供给曲线。

例 2. 考虑线性需求函数 $x=a-bp$。价格变量在 0 与 a/b 之间变化。该函数在任意点的弹性为:

$$\epsilon=\frac{p}{a-bp}(-b)=\frac{-bp}{a-bp}=\frac{-p}{a/b-p}$$

很明显，当 $p=0$ 的时候，$\epsilon=0$。当 $p\to a/b$ 的时候，$\epsilon\to\infty$。当 $p=a/2p$ 的时候，也就是处在需求曲线中点的时候，$\epsilon=-1$。

需求弹性与边际收入曲线有联系。总收入为价格乘以数量，或者：

$$TR=px$$

我们将需求曲线记为 $p=p(x)$，也就是说，价格是数量的函数。那么边际收入 MR 可以定义为总收入关于数量的变化率，或者：

$$MR=\frac{\mathrm{d}(TR)}{\mathrm{d}x}$$

利用微分法则：

$$MR=p+x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p\left(1+\frac{x}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$=p\left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)$$

对需求曲线来说，$\epsilon<0$。所以，当 $\epsilon<-1$ 的时候，$MR>0$。因此，对富有弹性的需求曲线来说，总收入随数量的上升而上升，也就是随价格下降而上升。需求曲线缺乏弹性的时候，也就是当 $-1<\epsilon<0$ 的时候，$MR<0$。总收入随数量的上升而下降，也就是随价格下降而下降。

2.2 极大与极小

求函数的极大与极小值或许是微积分在经济学中最重要的应用之一。在许多情况下，在经济学中总要做出一些极大化行为的假定，例如，厂商极大化利润，消费者极大化效用等。利用微积分知识可以对这种极大点给出很好的描述。

考虑在图 2-1 中的弯曲曲线。

A、B、C、D 以及 E、F 都是相对的极值点。在围绕着这些点的一定的领域内，它们都表示 $f(x)$的最大值或者最小值。相对的是指这些都仅仅是局部的极值，而不是在 x 的全部取值

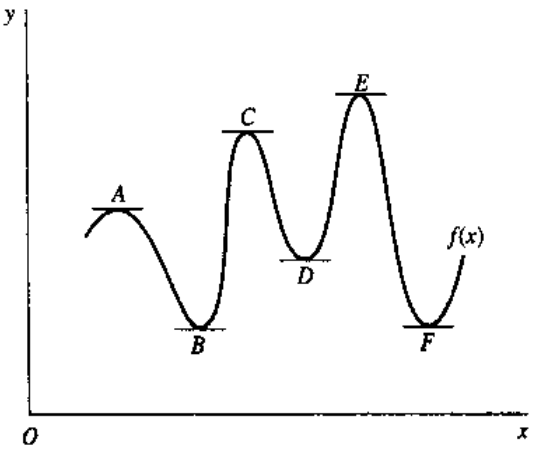

图 2-1 相对极大值与极小值

范围内全局的最大值或者最小值。这些点都有一个共同的特征：$f(x)$斜率为 0；也就是说，在所有这些极值点的位置，函数或者曲线与水平方向平行。函数 $f(x)$具有局部极大或极小的必要条件是 $dy/dx=f'(x)=0$。

现在考虑某一个相对的极大值，比如说在 C 点。很明显，C 点的左边，$f'(x)>0$，也就是说，函数值是上升的。C 点的右边，$f'(x)<0$，也就是说，函数值是下降的。根据以上的事实，我们知道在 C 点 $f'(x)=0$。另外，我们还知道当函数通过 C 点时，斜率 $f'(x)$的大小不停地下降(从＋下降到－)。我们无法确定在 C 点 $f''(x)<0$ 还是 $f''(x)>0$。然而，如果在 $x=x_0$ 点，$f'(x_0)=0$ 并且 $f''(x_0)<0$，那么 $f(x)$在 $x=x_0$ 点有一个相对的极大值。如果 $f'(x_0)=0$并且 $f''(x_0)>0$，那么 $f(x)$在 $x=x_0$ 点有一个相对的极小值。如果在 $x=x_0$ 点，$f'(x_0)=0$并且 $f''(x_0)=0$，那么 $f(x)$在这一点可能取极大值，也可能取极小值，也可能两者都不是。

在图 2-1 中极值点 A、C 以及 E 这些点处，函数被说成是向下凹的，或者简单地说成是凹的。在极值点 B、D 以及 F 这些点处，函数被说成是凸的(也就是说，向上凹的)。对于可微函数来说，凹性意味着 $f''(x)\leqslant 0$；也就是说，斜率 $f'(x)$是连续非增的函数。如果 $f''(x)<0$，凹性也是成立的。凹性允许 $f''(x_0)=0$。对凸性的讨论也是一样的。如果 $f''(x)>0$，那么函数 $f(x)$是凸的。凸性也允许 $f''(x_0)=0$ 。例 2 给出了允许 $f''(x_0)=0$ 的说明。

例 1. 考虑 $y=x^2$。那么 $f'(x)=2x$，$f''(x)=2$。在 $x=0$ 处，$f'(x)=0$，$f''(x)>0$。该函数在 $x=0$ 处具有相对的极小值。

例 2. 令 $y=-x^4$，那么 $f'(x)=-4x^3$，$f''(x)=-12x^2$。在 $x=0$ 处，$f'(x)=0$，$f''(x)=0$。然而，函数在 $x=0$ 处具有相对的极大值，这从曲线的形状可以很快地看出来。类似地 $y=+x^4$，函数在 $x=0$ 处具有相对的极小值，同时 $f''(x)=0$。

例 3. 令 $y=x^3$，那么 $f'(0)=f''(0)=0$。该函数为立方函数，在 $x=0$ 处函数为水平方向，它既不是极大值也不具有极小值。$f'(x)=0$ 是取极大值或者极小值的必要条件；然而，$f''(x)<0$，$f''(x)>0$，(注意到是严格的不等式)分别是相对极大值或者极小值的充分条件。但是 $f''(x)$的严格不等式并不是极大值或者极小值的必要条件。

2.3　连续复利

假设银行年利率为 x，如果你将 1 美元投入银行。到年底时你将获得的金额为：

$$y=1+x \quad (\text{美元})$$

其中，x 为利息。

再假设，投入银行 1 美元，银行利率为 x，银行半年一计息。这时，银行将在上半年付$\frac{x}{2}$的利息，合计金额为：

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)。（美元）$$

银行将在下半年以$\left(1+\frac{x}{2}\right)$为本金再次计息，利息额为$\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}$。这样，在1年后银行将付给你的本息合计为：

$$y=本金+前半年利息+后半年利息=1+\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \quad （美元）$$

使用类似的推断，如果1年中计息4次，在1年后1美元的本息合计数为：

$$y=1+\frac{x}{4}+\left(1+\frac{x}{4}\right)\frac{x}{4}+\left(1+\frac{x}{4}\right)^2\frac{x}{4}+\left(1+\frac{x}{4}\right)^3\frac{x}{4}=\left(1+\frac{x}{4}\right)^4 \quad （美元）$$

如果银行在1年中计息n次，年终你在银行的余额将从1美元增至：

$$y=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad （美元）$$

若当$n\to\infty$此时，上述表达式的极限为多少？让我们分两步来讨论这个问题：

(a). 令$x=1$，讨论极限：

$$y=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{2-2}$$

我们利用二项式定理分解$(1+1/n)^n$，即：

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1^n+\frac{n\cdot 1^{n-1}(1/n)^1}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}1^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots$$

考虑当$n\to\infty$时，$\frac{n-k}{n}$的极限。分子分母上下同除n，即：

$$\frac{n-k}{n}=1-\frac{k}{n}$$

很明显：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-k}{n}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}=1$$

利用这个结论得：

$$y=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

这个无穷极数收敛于某个重要的无理数e，保留e的小数点后5位：

$$e=2.71828$$

(b) 现在我们转而讨论更普遍的情况，讨论极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

首先进行变量替换 $m=n/x$，当 $n\to\infty$ 时，$m\to\infty$，因此，上式变为：

$$\lim_{m\to\infty}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}=\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x=e^x$$

由已知条件有：

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

下面，令 $Z_n=[1+(x/n)]^n$，用二项式定理展开 Z_n，有：

$$Z_n=1+n\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\cdots$$

利用相同于前面的当 $x=1$ 情况下的推导方法，有：

$$\lim_{n\to\infty}Z_n=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\tag{2-3}$$

因此，幂 e^x 可以用一个无穷极数来代替。(寻找无穷级数的收敛点是数学上一个值得探讨问题，式(2-3)的无穷级数收敛于 e^x 也可从导数上得到证明，无法收敛的级数被称作是发散的。)

函数 $y=e^x$ 有一个重要的属性，如果我们对 $y=e^x$ 函数逐项微分(读者可按这个提示逐项微分这个特殊级数)：

$$\frac{de^x}{dx}=0+1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\frac{4x^3}{4!}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x$$

可以看出，这个函数不会因被微分而改变，这也正是它的特性，在数学中，我们常常会遇到这个特性。

我们现在来讨论最初的复利问题。假设将 1 美元资金投放在年利率为 5%的银行账户上，1 年后账户上的余额将为：

$$e^{0.05}=1+0.05+\frac{(0.05)^2}{2!}+\frac{(0.05)^3}{3!}+\cdots$$

$$=1.0513$$

事实上，这与按日计息计算所得到的年终余额结果很接近，瞬间计息的计算结果也接近 1.0513。这表明在年利率为 5%，1 年计 1 次息将得到 5%的利息。而每天都计息将得到 5.13%的利息。

假设，投资资金 P，银行利率为 r，持续瞬间计息 7 年，则银行余额的未来值为：

$$FV=p(e^r)^t=pe^{rt} \tag{2-4}$$

最后变换等式，得到：

$$p=(FV)e^{-rt} \tag{2-5}$$

这个公式给我们提供了一个处理具有明显时间间隔问题的方法。

注意：过去我们常用的函数 $y=\log x$ 和 $x=e^y$ 是一个意思，如果我们在 $x=e^y$ 中对 x 求导数，可得到：

$$1=e^y\frac{dy}{dx}$$

或者：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x} \tag{2-6}$$

因此，对于 $y=\log x$，$dy/dx=1/x$。

2.4 中值定理

考虑图 2-2a，图中给出了$[a,b]$区域内一个可微函数 $y=f(x)$的图形，连接点$(a,f(a))$，与$(b,f(b))$得到的弦的斜率为：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

显然从几何角度可以看出(尽管这不代表严格证明)，在 a，b 之间的某点 x^* 的斜率是等

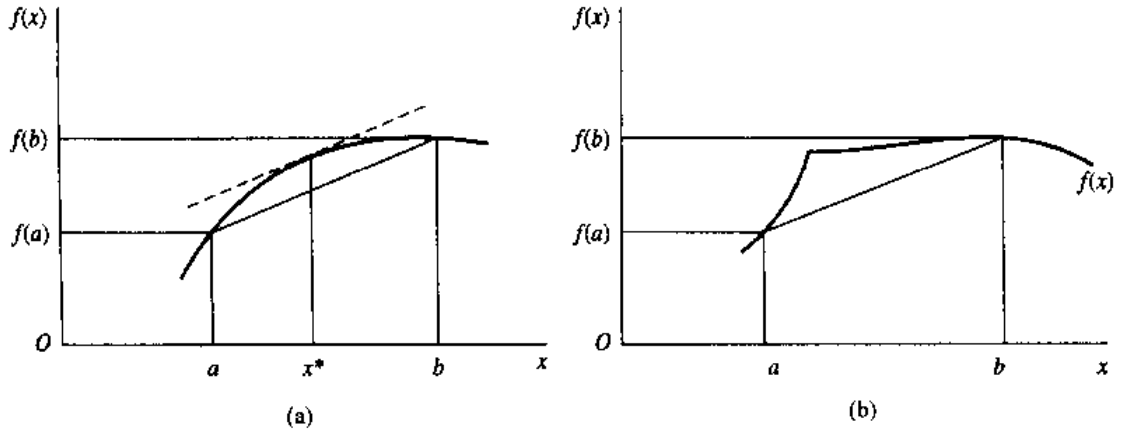

图 2-2 (a)中值定理；(b)如果 $f(x)$不可微，则图(b)中不一定存在 $x_0(a<x_0<b)$使得式子 $f'(x_0)=[f(b)-f(a)]/(b-a)$成立

于连线段的斜率,即:

$$f'(x^*)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

由这个公式可以给出如下描述,我们称之为中值定理:

如果 $f(x)$在区间$[a,b]$内可微,则存在一点 x^*,$a<x^*<b$,使得:

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(x^*) \tag{2-7}$$

这就是为什么在图 2-2b 中 $f(x^*)$在$[a,b]$区间内必须可微的理由,中值定理是泰勒中值定理中一个特殊的形式。我们常用它来分析一般问题。

2.5　泰勒级数

在许多情况下,将 $f(x)$近似分解成多项式,也就是用如下多项式来逼近 $f(x)$:

$$f(x)\approx f_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$$

这种表达形式会给许多分析工作带来方便。

特别是,以 0 为中心近似地展开 $f(x)$得到的展开式中的参数 $a_0,\cdots,a_n$,应该设为什么值才最好呢? 首先,当 $x=0$ 时 $f_n(x)$应等于 $f(0)$。所以有:

$$a_0=f_n(0)=f(0)$$

所以参数 $a_0=f(0)$。

为了更准确逼近 $f(x)$,可以在 $x=0$ 处对 $f(x)$及 $f_n(x)$求导并令其相等,可以得到方程组:

$$\begin{cases} f'_n(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1} \\ f''_n(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2} \\ \vdots \\ f_n^{(n)}(x)=n!\ a_n \end{cases}$$

明显地,当 $x=0$ 时,有:

$$\begin{cases} a_1=f'(0) \\ a_2=\dfrac{f''(0)}{2!} \\ \vdots \\ a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{cases}$$

一旦确定了系数值,可得到如下近似式:

$$f_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{2-8}$$

当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$，也就是：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots \tag{2-9}$$

这个函数被称做解析函数，等式右方的级数被称做麦克劳林级数。现在，我们又想将 $f(x)$ 在以 $x=x_0$ 为中心的展开，这就是说，我们要用 $(x-x_0)$ 作为"项"来表示 $f_n(x)$：

$$f_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

使用同前面一样的程序，求 $f_n(x)$ 在 x_0 处的各阶导数，我们最终得到：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots \tag{2-10}$$

上面这种级数形式被称做泰勒级数，而麦克劳林级数是泰勒级数在 $x_0=0$ 时的特殊形式。

例 1. 前面出现过的 e^x 的展开式就是一个收敛的麦克劳林级数：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

例 2. 求 $\log(1+x)$ 在 $x=0$ 点的泰勒展开式(假设其收敛)。

首先，我们注意到：

$$f(0)=\log 1=0$$

$$f'(0)=\frac{1}{1+x}=1 \quad (\text{在 } x=0 \text{ 点})$$

$$f''(0)=-(1+x)^{-2}=-1 \quad (\text{在 } x=0 \text{ 点})$$

$$f'''(0)=+2(1+x)^{-3}=+2 \quad (\text{在 } x=0 \text{ 点})$$

$$f^{(4)}(0)=-3\cdot 2(1+x)^{-4}=-3! \quad (\text{在 } x=0 \text{ 点})$$

因此：

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

泰勒级数展开式的最后第 n 项被称为拉格朗日余项：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x-x_0)^n \tag{2-11}$$

级数会由于这最后一项而变得精确(在适当的连续性假设之下)。拉格朗日余项的点 x^* 是在 x 与 x_0 之间的某点：$x^*=x_0+\theta(x-x_0)$，$0\leqslant\theta\leqslant 1$。如果 $f^{(n+1)}(x)$ 是连续的，那么 x 与 x_0 之间的某点 x^* 就一定会存在。式(2-11)是泰勒定理的一种形式(用余项代表后面各项之和)。泰勒展开式(2-11)是中值定理的推广，前面提到的中值定理只是将余项设计定在 $f'(x^*)$。

泰勒极数的应用:极大与极小的一阶、二阶条件的推导,凸性与凹性

假设:$f(x)$在 x_0 有极大值,即对于 x_0 附近所有的 x 有:

$$f(x_0)\geqslant f(x)$$

利用中值定理,即泰勒级数的余项终止在一阶项:

$$f(x_0)-f(x)=(x_0-x)f'(x^*) \tag{2-12}$$

等式左边由于 $x\neq x_0$,所以值为非负。因而若 x 在 x_0 左边(即 $x<x_0$)则必有 $f'(x^*)\geqslant 0$,才能使得 $(x_0-x)f'(x^*)\geqslant 0$。反之当 $x>x_0$ 时,$f'(x^*)\leqslant 0$。因此,若 x 在 x_0 左边,$f'(x)$为正(或 0),若 x 在 x_0 右边,$f'(x)$为负(或 0)。如果 $f'(x)$在 x_0 处连续,则:

$f'(x)$必定在 x_0 取值为 0。即:

$$f'(x_0)=0$$

类似的推理表明,若 $f'(x_0)=0$,这也隐含着 $f(x)$在点 x_0 可能取极小值。

现在让我们利用二阶导数来讨论极值问题。先考虑泰勒级数的二阶展开形式。

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x^*)}{2!}(x-x_0)^2$$

其中,$x^*=x_0+\theta(x-x_0)$,$0\leqslant\theta\leqslant 1$。如果 $f(x)$在 $x=x_0$ 处有极大值,这时 $f'(x_0)=0$,因而方程可以写为:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}f''(x^*)(x-x_0)^2 \tag{2-13}$$

如果 $f(x)$在 x_0 处有极大值,则式(2-13)左边为非正。由于 $(x-x_0)^2>0$,所以:

$$f''(x^*)\leqslant 0$$

使包含 x 的区间越来越小并压缩到 x_0,我们可得到在 x_0 邻域内各点都成立 $f''(x_0)\leqslant 0$。因此在 $x=x_0$ 下式成立:

$$f''(x_0)\leqslant 0$$

因此,极大点意味着 $f''(x_0)\leqslant 0$。然而,如果 $f''(x_0)<0$,则必有 $f(x_0)>f(x)$。因此,$f'(x_0)=0$ 以及 $f''(x_0)<0$ 是取极大值的充分条件。类似地,我们可以证明若 $f(x)$在 $x=x_0$处有极小值能推出 $f''(x_0)\geqslant 0$。如果 $f''(x_0)>0$,那一定能推出在 x_0 具有极小值。

凹函数和凸函数:

考虑图 2-3a 中的函数,这个曲线被称做严格的凹函数。从图中可以看出,对于任何的两点 $x=x_0$ 和 $x=x_1$,假如 $x_0<x_1$,两点内的曲线总是位于两点连线之上。假若 x 是某个位于 x_0、x_1 中间的点,即:

$$x=\theta x_0+(1-\theta)x_1 \quad 0<\theta<1,$$

如果 $f(x)>\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$成立,则 $f(x)$是严格凹函数。

如果 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 并且:

$$f(x)\geqslant\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$

被称作弱凹函数或简单地被称为凹函数，凸函数与凹函数相反，它在连结函数上任意两点之间的连线总是在两点之间函数曲线之上，在图 2-3b 中我们举出凸函数的图例，对凸函数的定义如同将凹函数定义反过来一样。弱凸或弱凹函数中允许有直线部分。线性函数 $f(x)=a+bx$ 即是弱凸函数或弱凹函数。

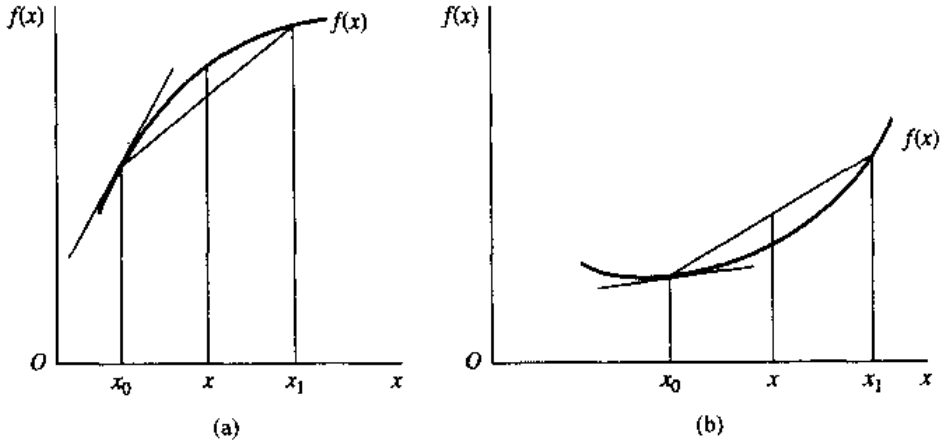

图 2-3 (a)凸函数；(b)凹函数

对于可微函数，若 $x_1>x_0$，则严格凹函数的曲线可以被描述成在任何一点曲线都处于切线之下，在图 2-3a，凹函数在 x_0 点斜率大于点 $f(x_0)$ 与 $f(x_1)$ 连线的斜率。即：

$$f'(x_0)>\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad (x_1>x_0)$$

若 $x_1<x_0$ 则有：

$$f'(x_0)<\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad (x_1<x_0)$$

对于前一种情况(后一种情况讨论方法相同)，若等式两边同时乘以(x_1-x_0)，并做变量置换 $x=x_1$，得：

$$f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \tag{2-14a}$$

再变形，得：

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)<0 \tag{2-14b}$$

对凹函数来讲(非严格凹)，式(2-14)中不等式符号改为小于等于号即可。

将泰勒级数展开到第 2 项：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x^*)(x-x_0)^2$$

将上式中右侧前 2 项移至左边，再利用公式(2-14b)，当$(x-x_0)^2>0$ 时，可以得出：

$$f''(x^*)<0$$

如果包含 x 的区间压缩到x_0，我们只能得到 $f''(x_0)\leqslant 0$，而不是 $f''(x_0)<0$。然而，必须是严格凹函数 $f''(x_0)<0$ 才成立。类似地，函数 $f(x)$的凸性意味着 $f''(x_0)\geqslant 0$，如果 $f''(x_0)>0$，则该函数为严格凸。

第3章　多变量函数

3.1　多变量函数

第1章中涉及的数学例子都是单变量的，但在经济理论中，大部分情况下目标函数是多变量的，比如说，在消费者理论的基本假设中，每个单个的消费者都同时对多种产品有需求，并且他们的满意程度或者称“效用”都取决于所享受的物质的量，将这个假设用数学公式表示就是：

$$U=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 种产品的消费水平。

在生产者理论中，函数 $y=f(L,K)$（被称作生产函数）表示产出水平既取决于劳动力又取决于资金。数学表达式 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个简要的写法，它表示的是某应变量 y 的值取决于 n 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的大小。而单变量函数简写为 $y=f(x)$。

3.2　水平曲线 I

考虑某个生产函数 $y=f(L,K)$。这里 y 为产出，L 为劳动力，K 为资金。生产函数将产出与投入量化了，即若有一定量的投入，则一定会得到相应的产出，而所得到的产出的量是由生产函数来决定的，两者满足一个数学关系式。在图 3-1 中，第 1 象限所有点（笛卡尔平面上第 1 象限中的点表示正的劳动投入与资金投入）表示投入的可能组合。平面上的每

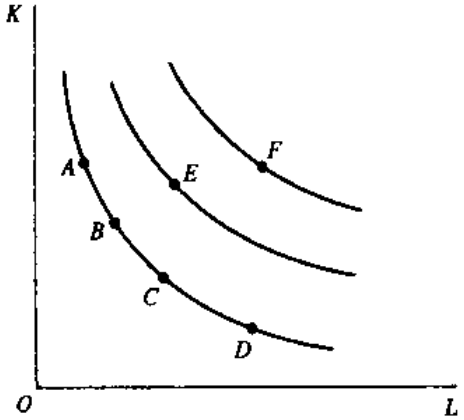

图 3-1　给定生产函数时的生产水平曲线。在图中有 3 条不相同的曲线（各条曲线都趋向无穷远外）。A,B,C,D 点表示在产出相同情况下劳动力和资金的投入组合。A,B,C,D 这 4 个点都处于同一条生产水平曲线上。在生产函数理论中，这条曲线被称作等产量线，E 点代表一个较高的产出水平，而 F 点的产出水平更高。

1 点对应着 $f(L,K)$的一个值。例如，在点 A,B,C 与 D 处对应产出为 $y=5$。而在 E 处，产出 $y=10$，在 F 处，$y=15$。

经济学家往往将函数值相同的点连起来。例如，在图 3-1 中，过 A,B,C 以及 D 的平滑曲线表示产出水平相同情况下劳动与资金各种组合的轨迹。经济学家将这条曲线称为等产量线，而数学家称之为水平曲线(在高维情况下，称之为水平超曲面)。称之为水平曲线是因为沿着该曲线的函数值(这里指产出水平)不增也不减。变量函数的另外一种几何表示如图 3-2 所示。

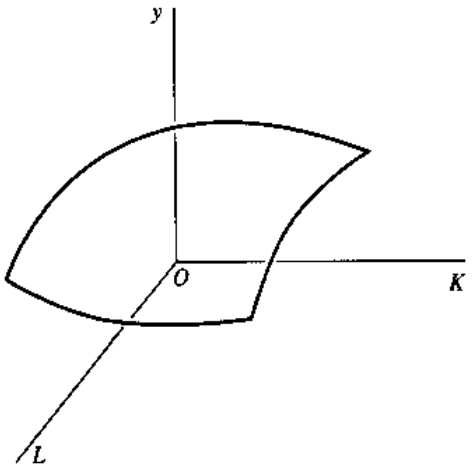

图 3-2 某个 2 变量函数的 3 维立体表示。该图表示 3 维空间中的 2 维超平面。图 3-1 中的水平曲线是水平面(y 具有相同的值)与该超平面相交线的投影。

如果将产出一定情况下的所有要素投入组合点统统连起来，就可得到一条条的平滑曲线，在图3-1中，A,B,C,D 这 4 点连接就表示在产出量为 5 单位情况下的要素投入组合曲线。在这条曲线上各点的产出量相等，因而这条曲线在经济学上被称作等产量线，在数学上我们称作为水平线，在水平曲线上各点的函数值都是不变的，这正如地质勘探时用在地势图上的等高线，每条等高线都代表相等的海拔(高度)。另一种 2 变量函数的几何图形可以用图 3-2 表示。

图 3-2 中，L 轴垂直于书的平面，函数值 y 被描绘为到 $L—K$ 平面的垂直距离。而图中曲面表示 y 是 L 与 K 的函数。垂直高度表示产出水平。现在，用垂直于 $L—K$ 平面的高度为 5 单位的平面去截这个曲面，截得的曲线为当 y 值为 5 个单位时的一条曲线，该曲线在 $L—K$ 平面上的投影称作为等产量线，线上的点表示当产出量为 5 个单位时 K 与 L 的投入要素组合。(图 3-2 是用 3 维图表示 2 变量生产函数，而图 3-1 中的曲线是图 3-2 中曲面的等高线在 $L—K$ 平面的投影。)

类似的有关水平曲线的讨论可以应用在消费者理论中。在这种情况下，水平曲线称为等效用线，或称为无差异曲线。由于这种曲线在经济理论中具有重要应用，我们将在以后予以详细讨论。

2 个变量函数的 3 维图像表示虽然不好画，但是却提供了视觉上的直观理解。当函数值增加时，好像一个人沿垂直方向上升运动，函数的最大值好比在“山的顶点”。但是当变量

个数超出3个时，图解的方法就不灵了，应当用代数的方法。

3.3 偏导数

考虑一个消费者的效用函数，$U=f(x_1,\cdots,x_n)$，$x_1,\cdots,x_n$ 表示消费 n 种产品的数量。U 表示在享受了这 n 种产品后消费者得到的满意度。对第 i 种产品的消费能够带来消费者的边际效用。对第 i 种产品的边际效用为正指的是当第 i 种产品消费量增加 Δx_i 数量，而其他产品消费量保持不变时，引起的满意度的增加也是正的。上述论述看起来很像单变量函数的求导计算，但两者是不同的，因为以上论述虽然也是指函数值随某一个自变量变化而变化的情况，但此时有多个其他的自变量存在，并且同时影响着函数值，这时为了考察某个变量的变化对函数值的影响，必须让其他自变量的值保持不变。这种类型的求导问题被称作“偏导数”，因为它只考虑了函数值随变量中的某一变量变化而变化的情况。偏导数用 $\partial y/\partial x$ 表示，与单变量函数导数用 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 表示有所不同。

再举个偏导数的例子。考虑某个生产函数 $y=f(L,K)$，劳动力的边际产出指的是在资金投入不变的情况下，劳动力增加1个单位所引起的产量改变量。对劳动力的边际产量即为该生产函数 y 关于劳动力 L 的偏导数，同样，对资金的边际产出为生产函数 y 关于资金 K 的偏导数。

让我们更严格地讨论生产函数的偏导数定义，考虑函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $x_1=x_1^0$，$\cdots,x_n=x_n^0$ 处对 x_1 的偏导数，即只考虑函数仅仅随 x_1 变化而变化，函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 关于 x_1 的偏导数定义如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x}&=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x_1}\\&=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\Delta x_1}\end{aligned}\tag{3-1}$$

上式为偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ 在 $x_1=x_1^0,\cdots,x_n=x_n^0$ 处的值（存在极限情况下），前面的差商是一个直观的写法，这样写很容易将偏导数与普通的单变量一阶导数分开来。类似地，我们能定义函数对变量 x_i 偏导数 $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$：

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^0,\cdots,x_i^0+\Delta x_i\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\Delta x_i}\tag{3-2}$$

这里 $i=1,\cdots,n$

这里 $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ 与 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 是指一个意思。两种表式法可互换使用。

在求偏导数时，总要把其他变量规定为常数。这时就可以应用通常的求导法则。

例 1. 假设一个消费者的效用函数为：

$$U(x_1,x_2)=x_1\log x_2$$

边际效用为偏导数$\frac{\partial U}{\partial x_1},\frac{\partial U}{\partial x_2}$。在求$\frac{\partial U}{\partial x_1}$时，把 x_2 视为常数，则有：

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}=\log x_2$$

类似地，在求$\frac{\partial U}{\partial x_2}$时，把 x_1 视为常数，求得：

$$\frac{\partial U}{\partial x_2}=x_1\frac{1}{x_2}=\frac{x_1}{x_2}$$

例 2. 假设一个厂商的生产函数为：

$$y=L^{\alpha}K^{\beta}$$

这里 $\alpha,\beta>0$ 为常数。则对劳动力与资金的边际产出分别为：

$$MP_L=\frac{\partial y}{\partial L}=\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}$$

$$MP_K=\frac{\partial y}{\partial K}=L^{\alpha}\beta K^{\beta-1}=\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}$$

普通的微分法则，如乘数法则或商数法则同样适用于偏导数。

例 3. 令 $y=x_1e^{x_1+x_2^2}$，使用乘数法则，有：

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=x_1e^{x_1+x_2^2}+e^{x_1+x_2^2}=e^{x_1+x_2^2}(1+x_1)$$

根据微分中的链锁法则，有：

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}=x_1e^{x_1+x_2^2}(2\times x_2)=2x_1x_2e^{x_1+x_2^2}$$

就像普通的求导数一样，偏导数能被再次求偏导数，即求偏导数的偏导数，或二阶偏导数，然而，偏导数存在的数量远大于普通的导数。因为对于一个函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$来说，我们可以对$(x_1,\cdots,x_n)$分别求偏导数，得到$\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$个一阶偏导数。如果我们对某个一阶偏导数如$\frac{\partial f}{\partial x_i}$再求偏导数，我们又能得到$\partial(\partial f/\partial x_i)/\partial x_j,i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n$ 这么多的二阶偏导数。二阶偏导数也可以写成$\partial^2 f/\partial x_j\partial x_i$。通常为了简便我们用简写形式来表示函数对不同变量的求导，我们令$\frac{\partial f}{\partial x_i}=f_i$，更高阶的偏导数也有缩写形式，我们可令 $f_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$，在读这个缩写时，我们要从左往右看，它反映出偏导数对 x_i 与 x_j 两个变量的求导顺序，也就是说，$f_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$在效用函数中所表示的意思是：当享受产品 j 的物质量增加时，

对于产品 i 的边际效用的变化率。

例 4. 再次考虑 $U=(x_1,x_2)=x_1\log x_2$ 函数，

我们先前通过计算，得到：

$$U_1=\log x_2$$

$$U_2=\frac{x_1}{x_2}$$

由此，我们便有：

$$U_{11}=\frac{\partial U_1}{\partial x_1}=0$$

$$U_{12}=\frac{\partial U_1}{\partial x_2}=\frac{1}{x_2}$$

$$U_{21}=\frac{\partial U_2}{\partial x_1}=\frac{1}{x_2}$$

$$U_{22}=\frac{\partial U_2}{\partial x_2}=\frac{-x_1}{x_2^2}$$

例 5. 对于函数 $y=f(L,K)=L^{\alpha}K^{\beta}$，一阶导数为：

$$f_L=\frac{\partial y}{\partial L}=\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}$$

$$f_K=\frac{\partial y}{\partial K}=\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}$$

因而依此推出二阶导数：

$$f_{LL}=\frac{\partial f_L}{\partial L}=\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\beta}$$

$$f_{LK}=\frac{\partial f_L}{\partial K}=\alpha L^{\alpha-1}\beta K^{\beta-1}=\alpha\beta L^{\alpha-1}K^{\beta-1}$$

$$f_{KL}=\frac{\partial f_K}{\partial L}=\beta(\alpha L^{\alpha-1})K^{\beta-1}=\alpha\beta L^{\alpha-1}K^{\beta-1}$$

$$f_{KK}=\frac{\partial f_K}{\partial K}=\beta L^{\alpha}(\beta-1)K^{\beta-2}=\beta(\beta-1)L^{\alpha}K^{\beta-2}$$

例 6. 对于函数 $y=f(x_1,x_2)=x_1e^{x_1+x_2^2}$，我们有：

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=f_1=e^{x_1+x_2^2}(1+x_1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}=f_2=2x_1x_2e^{x_1+x_2^2}$$

因此，有：

$$f_{11}=e^{x_1+x_2^2}+(1+x_1)e^{x_1+x_2^2}=e^{x_1+x_2^2}(2+x_1)$$

$$f_{12}=e^{x_1+x_2^2}(1+x_1)2x_2=2(1+x_1)x_2e^{x_1+x_2^2}$$

$$f_{21}=2x_2(x_1e^{x_1+x_2^2}+e^{x_1+x_2^2})=2(1+x_1)x_2e^{x_1+x_2^2}$$

$$f_{22}=2x_1[x_2e^{x_1+x_2^2}(2x_2)+e^{x_1+x_2^2}]=2x_1(1+2x_2^2)e^{x_1+x_2^2}$$

值得注意的是这些方程中有结论：$f_{12}=f_{21}$（在例 6 中，有结论 $f_{LK}=f_{KL}$）可见交叉偏导数无论它的求导次序如何改变，它的值是不会变的，这个规律适用于所有多变量可导函数。

偏导数的值与求导次序无关的结论是基础数学中一个并不直观的理论，这个结论能证明在经济中发生的一些惊人的关系。下面，我们给出存在两个变量时，对这个结论的某些应用。当然，这种应用不代表严格的证明。当我们理解了两个变量的情况后，我们便可以此类推而分析多个变量的情况。

定理：若 $y=f(x_1,x_2)$存在两阶连续偏导数，则 $f_{12}=f_{21}$。

讨论：考虑生产函数 $y=f(L,K)$，其中，L 与 K 分别代表生产过程中投入的劳动力与资本的量，利用上述定理，可以明确下列两个问题。

1. 当资本增加一个单位时，劳动力的边际产量如何变化？

2. 当劳动力增加一个单位时，资本的边际产量如何变化？

（当然是在同一点处来讨论上述问题）

图 3-3 中，令：

$$a=f(L^0,K^0)$$

$$b=f(L^0+\Delta L,K^0)$$

$$c=f(L^0+\Delta L,K^0+\Delta K)$$

$$d=f(L^0,K^0+\Delta K)$$

也就是说，a,b,c 和 d 是函数 f 在长方形 4 个角的值。a 是函数 f 在(L^0,K^0)点的值，b 是在

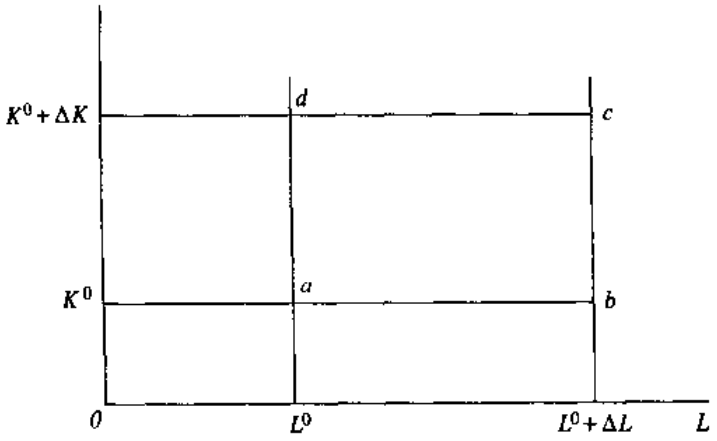

图 3-3 杨氏定理。a,b,c,d 点代表 $f(L,K)$在长方形 4 个角点的值。

点(L^0,K^0)上 L^0 增加 ΔL 后的取值，c 是 f 在 L^0,K^0 分别增加 ΔL 与 ΔK 数量的取值。

我们用二阶导数来近似逼近二阶偏导数，并且与取极限之前相比较。在(L^0,K^0)点劳动力的边际产量值近似为：

$$f_L(L^0,K^0)\approx\frac{f(L^0+\Delta L,K^0)-f(L^0,K^0)}{\Delta L}$$

$$=\frac{b-a}{\Delta L} \tag{3-3}$$

如果资本增加 ΔK，在$(L^0,K^0+\Delta K)$点的劳动力的边际产量值近似为：

$$f_L(L^0,K^0+\Delta K)\approx\frac{f(L^0+\Delta L,K^0+\Delta K)-f(L^0,K^0+\Delta K)}{\Delta L}$$

$$=\frac{c-d}{\Delta L} \tag{3-4}$$

这里的 f_{LK} 意思是指当资本增加时，劳动力边际产量的变化，我们可以用(3-4)式与(3-3)式的边际产量相减后除以资金的增加量 ΔK 来求得 f_{LK} 的值，即：

$$f_{LK}\approx\frac{1}{\Delta K}\left(\frac{c-d}{\Delta L}-\frac{b-a}{\Delta L}\right)=\frac{1}{\Delta K\Delta L}(c-d-b+a) \tag{3-5}$$

为了求另一个交叉偏导数 f_{KL} 的值，首先，求出在(L^0,K^0)点资金的边际产量，然后讨论劳动变化后该值如何变化。如前所述，在(L^0,K^0)点资金的边际产量为：

$$f_K(L^0,K^0)=\frac{f(L^0,K^0+\Delta K)-f(L^0,K^0)}{\Delta K}=\frac{d-a}{\Delta K} \tag{3-6}$$

将劳动力的数量增加至 $L^0+\Delta L$，则此时资金的边际产量为：

$$f_K=(L^0+\Delta L,K^0)\approx\frac{f(L^0+\Delta L,K^0+\Delta K)-f(L^0+\Delta L,K^0)}{\Delta K}=\frac{c-b}{\Delta K} \tag{3-7}$$

因此，由于劳动改变引起的资金的边际产量的改变量大约为：

$$f_{KL}\approx\frac{1}{\Delta L}\left(\frac{c-b}{\Delta K}-\frac{d-a}{\Delta K}\right)=\frac{1}{\Delta L\Delta K}(c-b-d+a) \tag{3-8}$$

值得注意的是，等式(3-5)和(3-8)是相等的！也就是说，无论是先对 L 求偏导数还是先对 K 求偏导数，所得到的结果是一样的。要严格证明本定理还必须令：$\Delta K\to 0$，$\Delta L\to 0$，然后求极限。这一步将被省去，一般利用中值定理进行分析，可以在最基础的微积分教科书中找到相应的内容。

一般地说，假如函数是性能良好的(即它的高阶导数也是连续的等) 那么它的高阶交叉偏导数也与求导顺序无关，只要反复运用杨氏定理就可以证明这一点。

例 7. 考虑函数 $f(x_1,x_2,x_3)$，证明 $f_{123}=f_{312}=f_{321}$ 等。

应用杨氏定理，对函数 $f_1(x_1,x_2,x_3)$，有：

$$f_{123}=f_{1(23)}=f_{1(32)}=f_{132}$$

而 $f_{13}=f_{31}$，因此：

$$f_{132}=f_{312}$$

于是：$f_{123}=f_{312}$，并且，因为 $f_{3(12)}=f_{3(21)}$，则有：

$$f_{123}=f_{312}=f_{321}$$

类似地，对于 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$，有：

$$f_{ijk}=f_{jki}=\cdots$$

3.4 链式法则

在经济学中，就像在大部分自然科学中一样，人们通常会遇到一系列的函数关系式，例如在生产函数中，一个厂商的产出决定于它所选择的投入水平。然而，企业的投入水平与投入要素及产出产品的价格有关。因此，企业的产出数量与投入要素及产品的价格有直接关系。所以，很有必要研究一下其中某种价格的变化对产出的变化的影响，也就是去求解产出关于该种价格的偏导数。链式法则是一个很好的数学工具，它指出复合函数偏导数如何用单个函数的偏导数来表示。

对于单变量函数，若：

$$f=f(x) \quad 且 \quad x=g(t)$$

则函数可用 t 来表示，写成：

$$y=f(g(t))=h(t)$$

依代数知识可得：

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

对其取极限，假设 $f(x)$和 $g(t)$都是可微的，我们能得到单变量函数的链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{3-9}$$

直观地讲，假设 $y=2x$，并且 $x=3t$，则有 $y=6t$，很明显，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的乘积。

假设现在 y 是含两个变量的函数，$y=f(x_1,x_2)$。设 x_1 以及 x_2 又是其他变量的函数。令 $x_1=x_1(t)$，$x_2=x_2(t)$。随着 t 的改变，x_1 以及 x_2 同时在变，y 也在变化。用 t 表示 y，记为 $y=f(x_1(t),x_2(t))=y(t)$。那么如何用 f_1，f_2，$x_1'(t)$，$x_2'(t)$来表示 $y'(t)$呢？在这种情况下，t 的变化引起 x_1 和 x_2 的变化，它对 y 的影响是对 x_1 以及 x_2 影响的总和。于是：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=f_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+f_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x} \tag{3-10}$$

现在假设 x_1, x_2 都是多变量函数，比如说，令 $x_1=g(r,s), x_2=h(r,s)$，这时，$y=f(g(r,s), h(r,s))=F(r,s)$，$y$ 可用 r,s 来表示，y 可以对 r 和 s 求偏导数，这里链式法则表现为：

$$\frac{\partial y}{\partial r}=f_2\frac{\partial g}{\partial r}+f_2\frac{\partial h}{\partial r} \tag{3-11}$$

对 s 求偏导数的公式类似于上式。(3-10)式和(3-11)式的不同之处在于 r 是多个变量中的一个，因此两个表达式中所使用的导数与偏导数的符号是不同的。

链式法则可以直接推广到每一个单变量又是其他 m 个变量的函数情况中。令：

$$y=f(x_1,\cdots,x_n)$$

又令：

$$x_i=g^i(t_1,\cdots,t_m)\quad i=1,\cdots,n$$

在这里链式法则表现为：

$$\frac{\partial y}{\partial t_k}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}\quad k=1,\cdots,m \tag{3-12}$$

式(3-12)也可写为：

$$\frac{\partial y}{\partial t_k}=f_1g_k^1+\cdots+f_ng_k^n=\sum_{i=1}^{n}f_ig_k^i\quad k=1,\cdots,m \tag{3-13}$$

这里，符号 g_k^i 表示$\frac{\partial g^i}{\partial t_k}$。

例 1. 令 $y=f(x_1,x_2)$，且令：

$$\begin{aligned}x_1&=x_1^0+h_1t\\x_2&=x_2^0+h_2t\end{aligned} \tag{3-14}$$

其中，h_1,h_2 为任意正常数，当 $t=0$ 时，$x_1=x_1^0, x_2=x_1^0$。当 t 变化时，x_1 和 x_2 沿着在 x_1-x_2 平面中的直线运动，即可以在上式中消去 t 来看出：

$$x_2=x_2^0+\frac{h_2(x_1-x_1^0)}{h_1}=\frac{h_2}{h_1}x_1+\left(x_2^0-x_1^0\frac{h_2}{h_1}\right)\quad h_1\neq 0 \tag{3-15}$$

这是一条在 x_1-x_2 平面上过点(x_1^0,x_2^0)的直线方程。这条直线斜率为 h_2/h_1。有：

$$y(t)=f(x_1^0+h_1t,x_2^0+h_2t)$$

函数 $f(x_1\ x_2)$沿着式(3-14)或者说是式(3-15)所示的直线取值。使用链式法则，有：

$$y'(t)=f_1h_1+f_2h_2 \tag{3-16}$$

例 2. 假设 $y=\log(x_1+x_2)$，且 $x_1=t, x_2=t^2$，这相当于令 $y=\log(x_1+x_2)$沿着抛物线 $x_2=x_1^2$ 取值。用直接替代法或利用链式法则求$\frac{dy}{dt}$。

(a) 用直接替代法求解：

由已知，$y=\log(t+t^2)$

所以：

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t+t^2}(1+2t)$$

(b) 用链式法则求解：

$$\frac{dy}{dt}=f_1\frac{dx_1}{dt}+f_2\frac{dx_2}{dt}$$

$$=\frac{1}{x_1+x_2}1+\frac{1}{x_1+x_2}2t$$

$$=\frac{1}{t+t^2}(1+2t)$$

两种方法结果一样。

例 3. 设 $y=x_1^2e^{x_2}$，$x_1=\log t$，$x_2=t^2$，求$\frac{dy}{dt}$(用直接替代法或利用链式法则)。

(a) 变量置换，得 $y=(\log t)^2e^{t^2}$。利用乘法定理求导：

$$\frac{dy}{dt}=e^{t^2}(2\log t)\frac{1}{t}+(\log t)^2(2te^{t^2})$$

(b) 由链式法则，有：

$$\frac{dy}{dt}=f_1\frac{dx_1}{dt}+f_2\frac{dx_2}{dt}=2x_1e^{x_2}\frac{1}{t}+x_1^2e^{x_2}(2t)$$

$$=2(\log t)e^{t^2}\cdot\frac{1}{t}+(\log t)^2e^{t^2}(2t)$$

两种方法得到了相同的结论。

用链式法则求二阶导数

假设 $y=f(x_1,x_2)$，$x_1=x_1(t)$，$x_2=x_2(t)$。如何求$\frac{d^2y}{dt^2}$？二阶导数对于求解多变量函数取最大值或最小值时充分条件的问题十分有用。

使用链式法则，有：

$$\frac{dy}{dt}=f_1\frac{dx_1}{dt}+f_2\frac{dx_2}{dt}$$

若求$\frac{d^2y}{dt^2}$，我们只需对表达式进行再求导，而 x_1，x_2 又是 t 的函数，因此，运用乘法原则：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=f_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}f_1(x_1(t),x_2(t))}{\mathrm{d}t}$$
$$+f_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}f_2(x_1(t),x_2(t))}{\mathrm{d}t}$$

现使用链式法则对 $f_1(x_1(t),x_2(t))$ 等关于 t 求导。注意到用 f_{11} 表示 $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ 等，其他情况以此类推，有：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=f_1\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\left(f_{11}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+f_{12}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)+f_2\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\left(f_{21}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+f_{22}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)$$

整理，合并同类项，(注 $f_{12}=f_{21}$)得：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=f_1\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}+f_2\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}+f_{11}\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right)^2+2f_{12}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+f_{22}\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{3-17}$$

注意到这个数学表达式是 x_1,x_2 关于 t 的二阶导数的线性函数，而且是 x_1,x_2 关于 t 的一阶导数的二次型函数。我们可以以此类推，求出 n 个变量函数的二阶导数。即设 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$，且 $x_i=x_i(t)$。$i=1,\cdots,n$。$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$ 可以由以下公式得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}f_i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} \tag{3-18}$$

例 6. 令 $y=f(x_1,x_2)$。并且考虑直线方程 $x_1=x_1^0+h_1t,x_2=x_2^0+h_2t$。

由式(3-16)，得：

$$y'(t)=f_1h_1+f_2h_2$$

因此：

$$y''(t)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)h_1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)h_2$$

因为 $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=f_{11}$ 等，且 $\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=h_i$，所以表达式可简写为：

$$y''(t)=f_{11}h_1^2+2f_{12}h_1h_2+f_{22}h_2^2 \tag{3-19}$$

由于将 x_1,x_2 关于 t 的导数表达式“参数化”，$y''(t)$ 是 h_1,h_2 的“二次型式”.

3.5　水平曲线 Ⅱ

考虑图 3-1 中表示的两个变量的生产函数表达式：$y=f(L,K)$。当产出量为 5 单位时，$f(L,K)=5$。对于某一个函数 $y=f(x_1,x_2)$ 的水平曲线我们可将其定义为 $f(x_1,x_2)=y_0$（y_0 为常数）。但我们如何确定曲线曲率的性质，如怎样确定在 x_1,x_2 坐标系中曲线的凹性

程度呢?

方程 $f(x_1,x_2)=y_0$ 代表含有两个未知变量 x_1,x_2 的等式,在数学上,可以用其中一个未知变量来表示另外一个未知变量。写作:

$$x_2=x_2(x_1)$$

将其代入原函数,得恒等式:

$$f(x_1,x_2(x_1))\equiv y_0$$

等式中,x_2 随 x_1 变化而变化,以使等式总保持成立。

任一个水平曲线的斜率都可直接地表示为导数 $\frac{dx_2}{dx_1}$,在这里,对 $\frac{dx_2}{dx_1}$ 的理解是很重要的,其含义是把 x_2 看作是 x_1 的函数。由于定义了函数 $x_2=x_2(x_1)$,我们通过恒等式 $f(x_1,x_2(x_1))\equiv y_0$ 对 x_1 求导,利用链式法则来解出$\frac{dx_2}{dx_1}$,得到:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}\equiv\frac{\partial y_0}{\partial x_1}\equiv 0$$

或:

$$f_1+f_2\frac{dx_2}{dx_1}\equiv 0$$

我们假设 $f_2\neq 0$,即有:

$$\frac{dx_2}{dx_1}\equiv\frac{-f_1}{f_2} \tag{3-20}$$

在任意点的水平曲线斜率为函数 $y=f(x_1,x_2)$的一阶偏导数之比,当 $f_2\neq 0$ 时,dx_2/dx_1 可以表示成原来函数的偏导数形式,因此方程 $x_2=x_2(x_1)$与 $f(x_1,x_2(x_1))\equiv y_0$ 是等价的。当 $f_2=0$ 时,水平曲线就变成了一条垂直线,它的导数不存在。

$dx_2/dx_1=-f_1/f_2$ 是什么意思?让我们来重新考虑生产函数 $y=f(L,K)$,它的水平曲线也就是函数的等产量线表示在图 3-4 中,从 A 至 B 的移动被分为两步,由 A 点减少资金 ΔK 有一个垂直向下至 C 点的过程;再由 C 点增加劳动力 ΔL 有一个水平向右至 B 点的过程,从 A 点至 C 点产出量 y 的改变量约为 A 点的资金边际产量乘以资金减少量 ΔK,记作 $f_K\Delta K$。从 C 点至 B 点,产出量 y 的改变量为 B 点的劳动力边际产量乘以劳动力增加量 ΔL,记作 $f_L\Delta L$,因为由 A 点至 B 点,y 的量并未产生改变,因此有:

$$f_L\Delta L+f_K\Delta K=0 \tag{3-21}$$

在趋于极限的情况下,A 和 B 靠得很近,趋于一点,这时 $\Delta L\to 0$ 且 $\Delta K\to 0$,方程(3-21)是 $f(L,K)$在 0处的全微分,由于 y 是不变的,因此有:

$$dy=f_L dL+f_K dK=0 \tag{3-22}$$

当且仅当 K 能表示为 L 的函数,即 $K=K(L)$时,等产量线才不为垂直线,这时,式(3-22)才能表示为:

$$f_L+f_K\frac{dK}{dL}=0$$

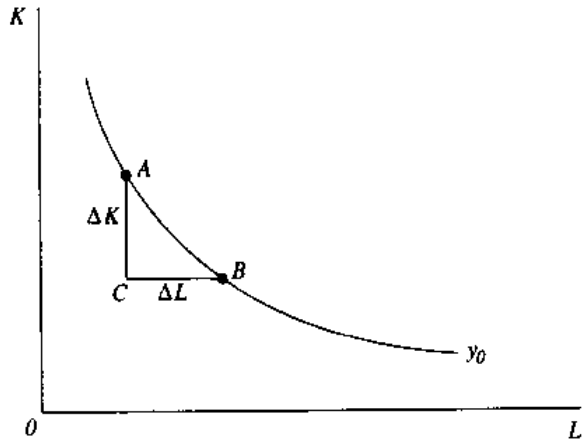

图 3-4　等产量线上的移动分析。图中 A 点移动到 B 点的过程可被分解为几部分，首先是从 A 点减少资金 ΔK 至 C 点；再增加劳动力 ΔL，从 C 点移至 B 点，由于 AB 是在同一条等产量线上，因而在 A、B 两点的产量相同。从 A 点至 C 点 y 减少的量为 $(-MP_K\Delta K)$，从 C 点至 B 点，y 增加的量为 $(MP_L\Delta L)$ 因此，从 A 点至 B 点，y 的累计增减量为 $\Delta y = MP_L\Delta L + MP_K\Delta K = 0$。

或：

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{f_L}{f_K}$$

上式和式(3-20)很相似，它代表的是企业对劳动力和资金的期望替代率，它表示若使产量一定，在减少资金 ΔK 的同时要增加多少劳动力 ΔL。

在消费者理论中可以用类似方法分析效用函数 $U=U(x_1,x_2)$ 的水平曲线。在保证效用不变的情况下，减少对产品 x_2 的享受量就要同时增加对产品 x_1 的享受量，产品 x_1 与产品 x_2 之间存在一个替代率 $\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{-U_1}{U_2}$。它被称为产品 x_1 与产品 x_2 的边际替代率，由于沿着无差异曲线 $dU=0$ 成立 $U_2dx_2=-U_1dx_1$，这意味着为得到一定数量的 x_1（增加效用 U_1dx_1），就必须放弃一定数量的 x_2（损失效用 U_2dx_2）。如果 $x_2=x_2(x_1)$ 有定义，那么可依 $dx_2/dx_1=-U_1/U_2$ 给出边际收益与边际损失之比率。

水平曲线的凸性

从公式 $dx_2/dx_1=-f_1/f_2$ 我们可以看出，如果其一阶偏导数都为正，则等高线的斜率必为负，在生产者理论中，如果各投入要素的边际产出都为正数，则等产量线的斜率为负。简单地讲，当表示投入要素比例的点在坐标轴上沿右上的方向移动时，两种投入要素的量就

都增加了。此时若边际产量为正，投入的增加必带来产出的增加，新的投入要素点的位置不再在原有的等产量线上，而是在一个新的等产量线上。与此相类似的论述也曾用来描述消费者理论中的无差异曲线的性质。在消费者理论中的体现就是消费者的消费选择问题。在无差异曲线斜率为负的情况下，消费者常常为了多购买一种产品而减少购买另一种产品。如果无差异曲线的斜率为正，这是指消费者同时增加对两种产品的消费，而他的效用却没有变化，那么这种情况只是指两种产品中之一的某种产品质量很差，享受它的量越多，效用反而降低的情况。

然而在一般情况下，经济学家不但认为等高线的斜率为负，而且还认为等高线的形状是凸向原点的，就像在图 3-1 中所示的情况，为什么经济学家们都这样认为呢？我们又怎样用数学方法表示等高线的凸性呢？严格地说，等高线凸向原点是指当两种产品中的一种数量上升时，它相对于另一种产品的边际价值沿等高线下降。也就是说，当 x_1 增加时，f_1/f_2 的绝对值就会下降，即 x_1 的边际效用相对于 x_2 的边际效用降低了，这也说明了为什么经济学家都经验性地认为消费者不会只为买一种商品而花掉自己身上所有的钱，而企业也不会倾其所有而出去购买某一种生产资料。

消费者在面对 x_1，x_2 两种产品时，首先会考虑哪种产品带来的效益最大，如果认为 x_1 带来的效益大，他会首先购买 x_1，直至他认为用 1 单位的钱购买 x_2 产品比购买 x_1 产品将会获得更多满意度，他会停止购买 x_1 产品，转向购买 x_2 产品。

总之，以上所述消费者与生产者的种种特点决定了等高线斜率为负，并且凸向原点。

从数学上看，水平曲线的凸性可以在两维空间中用曲线 $x_2=x_2(x_1)$ 直观表示，$\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1<0$ 表示曲线斜率为负，$\mathrm{d}^2x_2/\mathrm{d}x_1^2>0$ 表示曲线凸向原点。$\dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}x_1^2}>0$ 也表示当 x_1 增加时 $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1$ 也随之增加。在图 3-1 中，上述两个性质表现为当 x_1（或 L）增加时，曲线斜率也增加了。我们下面试着用偏导数来表示 $\mathrm{d}^2x_2/\mathrm{d}x_1^2$：

首先，如前所述有：

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=-\frac{f_1(x_1,x_2(x_1))}{f_2(x_1,x_2(x_1))} \tag{3-23}$$

注意，在这里，x_1，x_2 是独立的变量，x_2 与 x_1 的量没有直接关联。我们可以对等式(3-23)两边求导数，在计算等式右边的导数时，要用到导数除法法则和链式法则，得：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}x_1^2}&=-\left\{f_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}[f_1(x_1,x_2(x_1))]-f_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}[f_2(x_1,x_2(x_1))]\right\}\frac{1}{f_2^2}\\&=-\left[f_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)-f_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)\right]\frac{1}{f_2^2}\\&=-\left[f_2\left(f_{11}+f_{12}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)-f_1\left(f_{21}+f_{22}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)\right]\frac{1}{f_2^2}\end{aligned}$$

而 $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1=-f_1/f_2$ 且 $f_{12}=f_{21}$ 代入上式得：

$$\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}x_1^2}=\left(-f_2f_{11}+2f_1f_{12}-\frac{f_1^2f_{22}}{f_2}\right)\frac{1}{f_2^2}$$

或：

$$\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}x_1^2}=(-f_2^2f_{11}+2f_1f_2f_{12}-f_1^2f_{22})\frac{1}{f_2^3} \tag{3-24}$$

上面，我们导出了利用函数 $f(x_1,x_2)$ 的一阶及二阶导数来表示 $\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}x_1^2}$ 的一个较为复杂的公式，它表示水平曲线凸性。在第 6 章我们将把它推广到一个更普遍的情况，即自变量超过两个的情况，设 $y=f(x_1,x_2)$ 为效用函数，函数的边际效用递减即 $f_{11}<0$，$f_{22}<0$，有时我们还要考虑交叉偏导数 f_{12} 与 f_{21} 的意义，应该注意的是，边际效用递减和无差异曲线向里凸是两个不同的概念，无差异曲线的凸性是讨论在效用不变情况下边际价值的改变，而边际效用递减是讨论某单变量的改变引起的总效用的改变。

单调变化和边际效用递减

考虑效用函数：

$$U=U(x_1,x_2)$$

在现代消费者理论中，效用函数表示了消费偏好的顺序。一个消费者能说出他是喜欢商品 A 还是商品 B，但这种顺序排列却很难用准确的数量来表示。比如，我们很难这样精确地讲“我们在享受 A 产品时能得到比享受 B 产品多一倍的满意度”。也就是说，我们很难用基数的范畴，如描述得到多少多少“单位”满意度。再比如，用一个使用基数作为描述方式的消费者这样说“牛排给了我 20 个单位的快乐，而土豆只给了我 10 个单位快乐”。这种说法是基数的表达方式——用数字 1、2、3……或其他来表示具体的量。而序数则是不同的，通常的数只是用来排序。我们可以用序数来评价“这场高尔夫球比赛××得了第一，面××的积分最低”。用序数来描述事物，具体数值大小并无什么关系，只要反映它们之间相对的排序即可。

享受一定的物品之后所得到的满意度 U 反映了消费者对物品的排序，如果有另外一种排序为 V，两者之间关系由如下的公式来表示：

$$V(x_1,x_2)=F(U)=F(U(x_1,x_2)) \tag{3-25}$$

其中，$F'(U)>0$，表示 V 与 U 传递着相同的排序信息。$F'(U)>0$ 意味着 U 与 V 总是沿着相同的方向变动。函数 V 被称为是 U 的单调增函数。如果 $F'(U)<0$，则 V 被称为是 U 的单调减函数，在通常情况下，单调指的是单调增。

当我们把 V 看做是 U 的函数，现在，自变量 U 又是 x_1，x_2 的函数。所以，V 最后又是 x_1，x_2 的函数，那么我们如何来求解 V 的偏导数，并且利用 U 的偏导数以及 $F(U)$ 的导数来表示它？

在这种情况下，链式法则比以前讨论的情况要简单。从公式(3-25)可看出，当 x_1 发生变化的时候，它对 x_2 的变化并不产生影响。反过来也一样。当 x_2 发生变化的时候，它对 x_1 的变化并不产生影响。所以采用链式法则的时候，并不涉及 U 对 x_1 以及 x_2 求导。我们有如下的公式：

$$\frac{\Delta V}{\Delta x_1}=\frac{\Delta V}{\Delta U}\frac{\Delta U}{\Delta x_1}$$

取极限以后，得到：

$$V_1=F'(U)U_1 \tag{3-26a}$$

以及：

$$V_2=F'(U)U_2 \tag{3-26b}$$

注意当我们对产生的效用重新排序以后，无差异曲线的斜率并没有改变，这可以由下面的公式看出来：

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{V_1}{V_2}=-\frac{F'U_1}{F'U_2}=-\frac{U_1}{U_2} \tag{3-27}$$

公式(3-27)告诉我们，如果无差异曲线的顺序按如下的数值来赋值：1，2，3 等，那么我们还可以对这些无差异曲线的顺序给出另外的赋值：log 1，log 2，log 3 或者 e^1，e^2，e^3 等。这些不同的数字并不影响消费者的行为，因为消费者行为仅仅依赖于无差异曲线上面给定点切线的斜率所反映的替代情况。

V 的二阶导数是什么样的呢？再次在公式(3-26) 中作关于 x_1，x_2 的微分，得到(利用乘积微分法则)：

$$V_{11}=F'U_{11}+F''U_1^2 \tag{3-28a}$$

$$V_{22}=F'U_{22}+F''U_2^2 \tag{3-28b}$$

以及：

$$V_{12}=V_{21}=F'U_{12}+F''U_1U_2 \tag{3-29}$$

公式(3-28)再一次证明了“边际效用递减”一词在序数效用的情况下是没有意义的。在采用效用函数 U 的情况下，边际效用递减意味着 $U_{11}<0$，$U_{22}<0$。但是从(3-28a)注意到 U_{11} 以及 V_{11} 并不必要具有相同的符号。由于 $F'>0$，$F''>0$ 或者 $F''<0$ 还不确定。所以尽管 $U_{11}<0$，但是如果 $F''>0$，有可能使得 $V_{11}>0$。也就是说，当我们对无差异曲线的顺序予以重新赋值，面得到另外的效用函数 V 的时候，V 可能是边际效用递增的效用函数。然而，消费者的交易情况并没有发生变化，同时通过这种重新赋值以后所观察到的消费者行为并没有发生变化。边际效用递减是基于基数效用的基础上，它是为了运算上的方便。

现在考虑一个有关的概念。假设我认为啤酒与椒盐饼对我来说是互补品，因为当我吃下某些椒盐饼的时候，啤酒的边际效用得到增加。或者，当我吃下某些额外的人造黄油的时候，对我来说黄油的边际效用减少了，因此，黄油与人造黄油是相互可以替代的产品。以上

这种说法能否作为互补品以及替代品的比较准确的定义呢？尽管表面上看好像有道理，但是在实际上这种定义是没有用处的。首先，当第 2 种产品消费的数量 x_2 比较多的时候，第 1 种产品 x_1 的消费者边际效用将会增加，这意味着交叉偏导数 $\partial U_1/\partial x_2>0$。但是从公式(3-29)可以看出，$\partial U_1/\partial x_2=U_{12}$ 的符号随着对无差异曲线顺序不同的重新赋值可能发生变化。对无差异曲线顺序的重新赋值并不会改变所观察到的消费者行为，但是却可能引起新的效用指数 V 所对应的 V_{12} 的符号与 U_{12} 的符号相反。仅仅利用序数效用的概念，边际效用的变化率并不包含什么特别的含义。我们将在第 10 章对这个问题进一步展开讨论，这将主要涉及消费者行为理论。

习题

1. 考虑如下的 3 个效用函数：

   (i) $U=x_1x_2$　(ii) $V=x_1^2x_2^2$　(iii) $W=\log x_1+\log x_2$

   (a) 对每一个效用函数求出 x_1 以及 x_2 的边际效用。

   (b) 对每一个效用函数求出当其他产品的消费数量变化时某种产品边际效用的变化率。请证明，对这些函数来说，由于甲产品数量的变化所引起的乙产品边际效用的变化与由于乙产品数量的变化所引起的甲产品边际效用的变化是一样的。

   (c) 对每一个效用函数求出 x_1 对 x_2 的边际替代率，并且证明它们是一样的。

   (d) 从本问题以上部分(B)或者(C)所得到的结论当中，您是否在消费者理论当中希望扮演一个实证的角色？

2. 考虑如下的两个效用函数：

   (i) $U=x_1e^{x_2}$　(ii) $V=x_2+\log x_1$

   (a) 请回答与问题 1 相同的问题。

   (b) 请证明 V 的 4 个两阶偏导数有 3 个为 0，而对于 U 来说，相应的 3 个全不是 0。能否认为这两个效用函数所反映的消费者行为是一样的？(回答是一样的。当然，要注意到边际效用的变化率。)

3. 考虑生产函数 $y=L^\alpha K^{1-\alpha}$，其中，L 为劳动力，K 为资本，y 为产出，并且 $0<\alpha<1$(这种类型的生产函数被称之为柯布—道格拉斯类型的生产函数)。

   (a) 请分别求出劳动与资本的边际产出 MP_L、MP_K。

   (b) 请分别求出由于劳动与资本的变化所引起的劳动与资本的边际产出 MP_L、MP_K 的变化率。请证明 MP_L 关于资本 K 的变化率等于 MP_K 关于劳动 L 的变化率。

   (c) 对这个生产函数来说边际产出递减法则是否成立？

4. 对于问题 3 给出的生产函数来说，请证明 $y\equiv f_LL+f_KK$(它是欧拉公式的一个例子，我们将在以后予以深入地讨论)。

5. 当二阶偏导数是不连续的时候，二阶偏导数与求导顺序无关的定理就不成立了。有些学生知道对数学家来说连续性意味着什么，这些学生应该去构造一种函数，这些函数并不连续，但是却存在二阶偏导数。

6. 令 $y=L^\alpha K^{1-\alpha}$ 表示全社会的生产函数。假设劳动 L 以及资本 K 的增长率为常数，即，令 $L=L_0e^{nt}$，$K=$

K_0e^{rt}，其中，t 为时间。用直接替代法及链式法则求 dy/dt。

7. 令 $U=f(x_1,x_2)$ 为效用函数，令 $V(x_1,x_2)=F(U)$，其中，$F'(U)>0$（V 是 U 的单调函数）。
   (a) 证明 $V_1/V_2=U_1/U_2$。
   (b) 用 U_y 来表示 V_y，证明在一般情况下 U_y 与 V_y 不一定具有相同的符号。
8. 考虑效用函数 $U=x_1^{1/3}x_2^{2/3}$。以后可以证明由 U 所推导出来的需求函数为 $x_1=M/(3p_1)$，$x_2=2M/(3p_2)$。请分别求出 U 关于价格以及货币收入的变化率。这些表达式的符号与您直观所想的一样吗？
9. 令 $y=f(x_1,x_2)\equiv g(x_1-x_2)$。令 $u=x_1-x_2$。证明

$$\partial y/\partial u\equiv\partial y/\partial x_1\equiv-\partial y/\partial x_2 \quad \partial^2 y/\partial u^2\equiv\partial^2 y/\partial x_1^2\equiv\partial^2 y/\partial x_2^2$$

3.6 齐次函数与欧拉定理

为了有效地研究许多重要经济模型的结构，首先有必要来讨论一类重要的函数，这类函数被称为齐次函数。研究这类函数的兴趣主要来自经济学中的分配理论问题。由马歇尔(Marshall)以及其他人所创造的边际生产理论的发展导致了这样的结论：生产要素的投入应该按照他们的边际产出来分配。(这将在以后的章节中予以更加详细的研究。)粗略地说，生产过程中投入的要素应该这样分配：租用 1 个单位的要素所花的边际成本应该等于该 1 个单位要素对产出的边际贡献。令 $y=f(x_1,x_2)$ 表示厂商的生产函数，w_i 表示投入的第 i 种要素的价格，p 表示厂商产产出品的价格，那么要素的投入应该满足如下的法则：

$$pMP_i=pf_i=w_i$$

其中，$f_i=\partial f/\partial x_i$。但是这种分析方法是属于局部均衡的分析框架，也就是说，分别地去进行每 1 种要素的投入设计方案。现在产生一个问题，厂商的产出是否有能力去支付各种要素的投入。因为所有要素投入都必须来自厂商的产出。所有要素投入所花的成本是否会超出厂商产出的收入。

由伟大的瑞士数学家欧拉(Euler)所发明的一个定理可以用来分析这个问题。(它还可以用来分析其他问题，这些我们将在以后加以叙述。)这个定理告诉我们，如果生产函数是规模报酬不变的，那么所有要素的支出之和应该等于总产出。从数量上来说，如果生产 1 单位第 i 种要素支付额为 $w_i=pf_i$，那么生产 x_i 单位第 i 种要素支付总额为 $w_ix_i=pf_ix_i$。因此两种要素的总支出额为：

$$pf_1x_1+pf_2x_2=p(f_1x_1+f_2x_2)$$

但是，如我们将看到，规模报酬不变的生产函数具有一个重要的性质，它由如下的恒等式来表示：

$$f_1x_1+f_2x_2\equiv y=f(x_1,x_2)$$

因此，在这种情况下：

$$w_1x_1+w_2x_2=pf_1x_1+pf_2x_2=p(f_1x_1+f_2x_2)=py$$

规模报酬不变的生产函数具有什么特征呢？这意味着如果投入的各种要素扩大相同的倍数，那么产出也会增加相同的倍数。从数学上来说，规模报酬不变的生产函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 有如下的特征：

$$f(tx_1,\cdots,tx_n)\equiv tf(x_1,\cdots,x_n) \tag{3-30}$$

注意恒等式的符号，所有的要素投入与产出扩大任意的倍数 t 都成立，例如，如果投入扩大一倍，那么产出也将扩大一倍。

公式(3-30)在数学上是更加一般的齐次函数的一种特殊情况。

定义 1　一个函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 被称为 r 度齐次函数，当且仅当成立如下的公式：

$$f(tx_1,\cdots,tx_n)\equiv t^rf(x_1,\cdots,x_n) \tag{3-31}$$

上面这个公式意味着如果所有的自变量扩大同一个倍数，那么产出将扩大 t^r 的倍数。再次注意上面这个恒等式的符号——这个恒等式对所有的要素投入与产出扩大任意的倍数 t 都成立。规模报酬不变的生产函数可以看做是 1 度齐次函数。1 度齐次函数通常被称为线性齐次函数。

例 1. 考虑著名的柯布—道格拉斯生产函数 $y=L^\alpha K^{1-\alpha}=f(L,K)$，其中，$L$ 为劳动工时，K 为资本。这个生产函数是 1 度齐次函数。也就是说，它是规模报酬不变的生产函数。如果劳动与资本扩张相同的倍数 t，那么成立：

$$\begin{aligned}f(tL,tK)&\equiv(tL)^\alpha(tK)^{1-\alpha}\equiv t^\alpha L^\alpha t^{1-\alpha}K^{1-\alpha}\\&\equiv t^{\alpha+(1-\alpha)}L^\alpha K^{1-\alpha}\equiv tL^\alpha K^{1-\alpha}\\&\equiv tf(L,K)\end{aligned}$$

产出 $f(L,K)$ 与各要素投入的扩大比例都是一样的。

现在我们再来考虑齐次函数所应用的另外一个重要领域。在消费者理论当中(我们将在以后的章节中予以详细讨论)，每个消费者对商品以及服务具有消费需求函数。如果 $p_1,\cdots,p_n$ 表示消费者所消费的各种产品的价格，M 表示消费者的收入，通常需求函数有如下的数学表达式：

$$x_i=x_i^*(p_1,\cdots,p_n,M) \tag{3-32}$$

也就是说，消费者对各种产品的需求量是各种产品的价格以及收入的函数。

现在我们来考察如果价格与消费者的收入都扩大同样的倍数，消费者的需求量将会产生什么样的变化？我们以后将会证明，在这种情况下消费者的需求量并不发生变化。

如果我们用数学公式来表示，那么需求函数是如下的 0 度齐次函数：

$$x_i^*(tp_1,\cdots,tp_n,tM)\equiv t^0x_i^*(p_1,\cdots,p_n,M)\equiv x_i^*(p_1,\cdots,p_n,M)$$

当所有的自变量都按照相同的的比例变化的时候，这个函数的数值是不变的，所以它是一个 0 度齐次函数。产品和服务的需求量并不依赖于价格和收入的绝对值水平。其中的道理在以后的章节中将会更加清楚。在这里我们的目的仅仅是为了说明齐次函数概念的应用。

现在再来考虑柯布—道格拉斯生产函数，$y=L^\alpha K^{1-\alpha}=f(L,K)$。劳动与资本的边际产

出分别为：

$$MP_L = f_L = \alpha L^{\alpha-1} K^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha}$$

$$MP_K = f_K = (1-\alpha) L^{\alpha} K^{-\alpha} = (1-\alpha) \left(\frac{K}{L}\right)^{-\alpha}$$

边际产出所表现出的一个特征应该值得注意：它们能够表示为两种投入要素比例的函数。它们与两种投入的绝对值大小无关，仅仅与它们之间的比例有关。

由于仅仅与它们之间的比例有关，柯布—道格拉斯生产函数的边际产出是 0 度齐次函数：

$$MP_L(tL,tK) = \alpha \left(\frac{tK}{tL}\right)^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha} = MP_L(L,K)$$

类似地：

$$MP_K(tL,tK) = (1-\alpha) \left(\frac{tK}{tL}\right)^{-\alpha} = (1-\alpha) \left(\frac{K}{L}\right)^{-\alpha} = MP_K(L,K)$$

如果劳动与资本按照相同的比例发生变化，比如说它们同时扩大一倍，那么劳动与资本的边际产出将不会发生变化。从几何学上来说，每种投入按照相同的比例发生变化，这意味着沿着从原点出发的射线变动。在这条射线上面的任何一点，柯布—道格拉斯生产函数的边际产出是相同的。

柯布—道格拉斯生产函数具有以上特有的性质，那么还有什么样的函数具有类似的性质呢？考虑任意的 0 度齐次函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$。由定义得：

$$f(tx_1,\cdots,tx_n) \equiv f(x_1,\cdots,x_n)$$

由于上面这个公式对任意的 t 都成立，可以令 $t=1/x_1$。这样我们有：

$$f(x_1,\cdots,x_n) \equiv f\left(1,\frac{x_2}{x_1},\cdots,\frac{x_n}{x_1}\right) \equiv g\left(\frac{x_2}{x_1},\cdots,\frac{x_n}{x_1}\right)$$

类似地，我们可以令 $t=1/x_i$。以上这个公式告诉我们，任意的 0 度齐次函数可以表示为自变量比例的函数，这个自变量的比例可以将任何一个自变量作为参照。所以，柯布—道格拉斯生产函数的边际产出可以表示为劳动与资本之间比例的函数，这并不是这种函数所特有的性质，对任何具有 0 度齐次函数的生产函数它都成立。

边际产出是 0 度齐次函数的条件是什么呢？下面这个定理在更加一般的情况下给出回答：

定理 1 如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 r 度齐次函数，那么它的一阶偏导数 $f_1,\cdots,f_n$ 是 $r-1$ 度齐次函数。

证明：根据假设，$f(tx_1,\cdots,tx_n) \equiv t^r f(x_1,\cdots,x_n)$。由于这是一个恒等式，所以在公式的两边同时对 x_i 求导数，恒等式仍然成立：

$$\frac{\partial f}{\partial (tx_i)} \frac{\partial (tx_i)}{\partial x_i} \equiv t^r \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

然而，$\partial(tx_i)/\partial x_i=t$。上面这个公式两边消去 t，得到：

$$\frac{\partial f}{\partial(tx_i)}\equiv t^{r-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

上面这个公式说明了 f_i 是 $r-1$ 度齐次函数。

如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$是任意的规模报酬不变的生产函数，那么它的边际产出就是 0 度齐次函数。也就是说，沿着从原点出发的任意射线上面的每一个点，它的边际产出是一样的。柯布—道格拉斯生产函数仅仅是该定理的一个特殊情况。

注意，对任意度数的齐次函数来说，该函数沿着从原点出发的任意射线上面的每一个点，它的水平曲线的斜率是一样的。这一点能够证明如下：令 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$是生产函数，例如，它是一个 r 度齐次函数。在 x_i-x_j 平面上任何一条等产量线的斜率为：

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_i}=\frac{-f_i}{f_j}$$

但是：

$$\frac{f_i(tx_1,\cdots,tx_n)}{f_j(tx_1,\cdots,tx_n)}\equiv\frac{t^{r-1}}{t^{r-1}}\frac{f_i(tx_1,\cdots,tx_n)}{f_j(tx_1,\cdots,tx_n)}$$

$$\equiv\frac{f_i(tx_1,\cdots,tx_n)}{f_j(tx_1,\cdots,tx_n)}$$

因此，沿着从原点出发的任意一条射线上面的任何一条等产量的斜率都相等。换句话说，对齐次函数来说沿着从原点出发的任意一条射线上面的任何一点所对应的边际产出比率是一样的。这种情况下的水平曲线形状表示在图 3-5 当中。

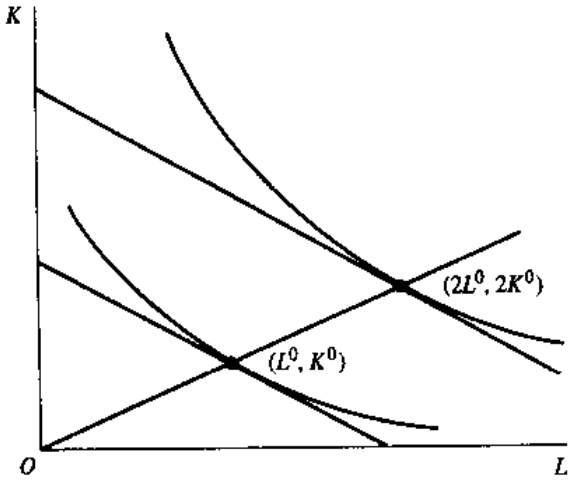

图 3-5　每一种要素等比例增加的时候，等产量线的斜率不变。考虑任意的一点(L^0,K^0)，假设各种要素的投入加倍，那么等产量线的斜率$-f_L/f_K$在点(L^0,K^0)以及点$(2L^0,2K^0)$是一样的。具有这种性质的最一般的函数可以表示为$F(f(x_1,\cdots,x_n))$，其中，$f(x_1,\cdots,x_n)$是任意度数的齐次函数，并且$F'\neq 0$。

下面我们来描述有关的一类生产函数。令 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$是 r 度数的齐次函数，并且令 $z=F(y)$，其中，$F'(y)>0$($F(y)y$ 的单调变换)。函数 $z(x_1,\cdots,x_n)$被称作为同势(homothetic)函数。很容易证明这一类函数也具有一样的性质，也就是说，从原点出发的任何一条射线上的任何一点的等高线切线的斜率相等。或者说，在 $z(x_1,\cdots,x_n)$以及 $z(tx_1,\cdots,tx_n)$点的等高线切线的斜率相等。关于这一点的证明留给读者自行练习。

例 2. 考虑函数 $z=g(L,K)=F(y)$，$y=L^{\alpha}K^{1-\alpha}$其中，$F(y)=\log y$。那么：

$$z=F(L^{\alpha}K^{1-\alpha})\equiv\log L^{\alpha}K^{1-\alpha}\equiv\alpha\log L+(1-\alpha)\log K$$

也就是说，原来的函数 $y=L^{\alpha}K^{1-\alpha}$经过函数 F（在这里为 log）变换以后得到了新的函数。我们注意到由于 $L,K>0$，$F'(y)=1/y>0$。现在 $y=L^{\alpha}K^{1-\alpha}$是 1 度齐次函数，但是 $\log(L^{\alpha}K^{1-\alpha})$并不是齐次函数。

$$\begin{aligned}g(tL,tK)&\equiv\alpha\log tL+(1-\alpha)\log tK\\&\equiv\alpha(\log t+\log L)+(1-\alpha)(\log t+\log K)\\&\equiv\log t+\log L^{\alpha}K^{1-\alpha}\not\equiv t^{r}g(L,K)\end{aligned}$$

然而，$g(L,K)=\alpha\log L+(1-\alpha)\log K$ 是同势函数。水平曲线的斜率为：

$$\frac{-g_L}{g_K}=\frac{-\alpha/L}{(1-\alpha)/K}=\frac{-\alpha}{1-\alpha}\frac{K}{L}$$

如前所述，$\frac{-g_L}{g_K}$并不受到资本 K 与劳动工时 L 同时扩大倍数 t 的影响，也就是说，在表达式当中 t 被消去了，因此 $\log(L^{\alpha}K^{1-\alpha})$的水平曲线沿着从原点出发的任意射线上面的各个点的斜率是一样的。这个函数不是齐次函数，但是它是同势函数。

如果我们把同势函数 $F(f(x_1,\cdots,x_n))$，当中的 $f(x_1,\cdots,x_n)$定义为线性齐次函数，也就是 1 度齐次函数，而不是把它定义为 r 度齐次函数，现在来讨论这两个定义的区别与联系。首先，表面上把 $f(x_1,\cdots,x_n)$定义为 r 度齐次函数好像是包含了更广泛一些的函数，其实，我们把 $f(x_1,\cdots,x_n)$定义为 1 度齐次函数就已经足够了，它包含了全部的函数。理由如下：任意的 r 度齐次函数通过对 $f(x_1,\cdots,x_n)$开 r 次方都可以变为线性齐次函数。然后，$[f(x_1,\cdots,x_n)]^{1/r}$能够通过某些函数 F 进行变换。因此，函数 F 的变换分为两步，第 1 步首先将函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$变换到$[f(x_1,\cdots,x_n)]^{1/r}$，然后再将$[f(x_1,\cdots,x_n)]^{1/r}$进行变换。因此我们把 $f(x_1,\cdots,x_n)$定义为 1 度齐次函数并不失去它的一般性。

例 3. 令 $y=f(x_1,x_2)=x_1x_2$，其中 x_1x_2 是 2 度数齐次函数。令：

$$g(x_1,x_2)=F(f(x_1,x_2))=\log(x_1x_2)=\log x_1+\log x_2$$

这个函数不再是齐次函数，而是同势函数。那么如何构造变换将以上这个函数变为线性齐次函数的呢？令：

$$g(x_1,x_2)=2\log(x_1x_2)^{1/2}$$

因此：

$$g(x_1,x_2)=2F(\phi f(f(x_1,x_2)))$$

其中，ϕ 意味着开平方同时 F 是取对数 log。这样我们将得到相同的函数：

$$g(x_1,x_2)=\log x_1+\log x_2$$

该函数就是$(x_1x_2)^{1/2}$的线性齐次函数变换。

现在我们来证明本节的主要定理。

定理 2（欧拉定理） 假设 $f(x_1,\cdots,x_n)$是 r 度数的齐次函数。那么成立如下的公式：

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}x_n\equiv rf(x_1,\cdots,x_n)$$

请注意恒等式的符号，也就是说，它不是一个方程而是一个恒等式，它对所有的 $x_1,\cdots,x_n$ 都成立。上面这个公式的两边从代数来说是相等的。

证明：根据齐次函数的定义：

$$f(tx_1,\cdots,tx_n)\equiv t^r f(x_1,\cdots,x_n)$$

由于这个恒等式对所有的 $x_1,\cdots,x_n$ 以及 t 都成立，对这个恒等式的两边关于 t 进行微分，利用链式法则有：

$$\frac{\partial f}{\partial(tx_1)}\frac{\partial tx_1}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial(tx_n)}\frac{\partial tx_n}{\partial t}\equiv rt^{r-1}f(x_1,\cdots,x_n)$$

但是，$\partial(tx_i)/\partial t=x_i$，因此：

$$\frac{\partial f}{\partial(tx_1)}x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial(tx_n)}x_n\equiv rt^{r-1}f(x_1,\cdots,x_n)$$

上面这个关系式对所有的 $x_1,\cdots,x_n$ 以及 t 都成立，因此特别地对 $t=1$ 也成立。将 $t=1$ 代入上面这个公式，就得到了欧拉定理。

齐次函数的一个最重要的特殊情况是一度数的齐次函数，也称之为线性齐次函数。在这种情况下，$r=1$，相应的欧拉恒等式为 $\sum f_i x_i\equiv f(x_1,\cdots x_n)$。这就是本节开始的时候所涉及针对规模报酬不变的生产函数，其产品的产出对要素投入的配置方面的一个性质。当 $r=1$ 的时候（线性齐次函数），欧拉定理告诉我们，产品的产出等于生产该产品的各种要素的投入各自乘以该种要素对产出的边际贡献之和。所以，在这种情况下边际生产理论与欧拉定理相互一致。

当函数 $f(x_1,\cdots x_n)$ 为 0 度齐次函数情况下，我们也可以得到一些有意义的结果。利用欧拉定理可以得到：

$$\sum f_i x_i\equiv 0$$

这个公式可以用在推导消费者以及厂商有关需求函数的某些性质，这些需求函数都呈现出这种类型的齐次性。

例 4. 再一次考虑柯布—道格拉斯生产函数 $y=L^\alpha K^{1-\alpha}=f(L,K)$。这个函数为 1 度齐次函数，也就是说，$r=1$。我们有 $f_L=\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}$，$f_K=(1-\alpha)L^\alpha K^{-\alpha}$。那么欧拉恒等式的左边变为：

$$\begin{aligned}f_L L+f_K K&\equiv\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}L+(1-\alpha)L^\alpha K^{-\alpha}K\\&\equiv\alpha L^\alpha K^{1-\alpha}+(1-\alpha)L^\alpha K^{1-\alpha}\\&\equiv(\alpha+1-\alpha)L^\alpha K^{1-\alpha}\equiv f(L,K)\end{aligned}$$

因此，$f_L L+f_K K$ 等于原来的生产函数 $L^\alpha K^{1-\alpha}$。

例 5. 令 $y=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}=f(x_1,x_2)$，那么：

$$f_1=\alpha_1 x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2},\ f_2=\alpha_2 x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1}$$

那么：

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 \equiv \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} x_1 + \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} x_2$$
$$\equiv \alpha_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$
$$\equiv (\alpha_1 + \alpha_2) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \equiv (\alpha_1 + \alpha_2) f(x_1, x_2)$$

这个函数是$(\alpha_1 + \alpha_2)$度齐次函数，所以以上的计算结果与欧拉恒等式一致。

例 6. 考虑如下的生产函数 $y = f(L, K)$，它为线性齐次函数。根据欧拉定理有：

$$f_L L + f_K K \equiv y$$

上面这个公式中两边都用 L 来除，经过重新安排以后得到：

$$f_K \frac{K}{L} \equiv \frac{y}{L} - f_L = AP_L - MP_L$$

我们曾经说过，如果平均曲线 $A(x)$上升的时候，相应的边际曲线 $M(x)$将会在平均曲线之上，也就是说，$M(x) > A(x)$。类似地，当且仅当 $M(x) < A(x)$的时候，$A(x)$下降。上面这个方程告诉我们，如果劳动的边际产出上升，那么资本的边际产出 f_K 将是负的。类似地可以证明，如果资本的边际产出上升，那么劳动力边际产出是负的。我们把生产分为几个阶段，当 AP_L 上升的时候为第 1 阶段；当 AP_L 上升但是 $MP_L > 0$ 的时候为第 2 阶段；当 $MP_L < 0$ 的时候为第 3 阶段。上面这个公式说明，对线性齐次生产函数来说，如果对劳动力来说是第 1 阶段，那么对资本来说就是第 3 阶段，反过来也一样。

例 7. 考虑两种产品，它们的价格分别为 p_1, p_2，它们的数量分别用 x_1, x_2 来表示。假设消费者的货币收入为 M，并且第 1 种产品的需求函数由如下的公式来表示：

$$x_1 = \frac{Mp_2}{p_1^2}$$

请证明这种产品的需求量并不受中性通货膨胀(也就是价格与收入按同样的增长速度增长)的影响。另外，请证明欧拉定理对这个函数是成立的。

假设货币收入 M 以及两种产品的价格按相同的比率 t 增长。那么：

$$x_1(tp_1, tp_2, tM) \equiv tM(tp_2 / t^2 p_1^2) \equiv Mp_2 / p_1^2 \equiv x_1(p_1, p_2, M)$$

因此，消费者需求量并不受价格变化的影响，这个需求函数是 0 度齐次函数。现在：

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{-2Mp_2}{p_1^3}$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{M}{p_1^2}$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial M} = \frac{p_2}{p_1^2}$$

因此：

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial x_1}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial x_1}{\partial M} M \equiv \frac{-2Mp_2}{p_1^2} + \frac{Mp_2}{p_1^2} + \frac{Mp_2}{p_1^2} = 0$$

在涉及齐次函数的许多例子中，人们关心的并不一定是欧拉定理本身，而是欧拉定理的

逆定理。举例子来说，如果厂商的产出全部用作各种要素的投入，也就是说，如果我们知道如下关系式 $\sum f_i x_i \equiv f(x_1,\cdots,x_n)$ 成立，那么这是否意味着生产函数是线性齐次的呢？这个回答是肯定的。

定理3(欧拉定理的逆定理) 设：

$$f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n\equiv rf(x_1,\cdots,x_n)$$

对所有的 $x_1,\cdots,x_n$ 都成立，那么 $f_1(tx_1,\cdots,tx_n)\equiv t^r f(x_1,\cdots,x_n)$，即 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是线性齐次函数.

证明：(为了避免数学符号太多而引起混乱，我们只讨论仅包含两个独立变量的函数。对 n 个变量情况的讨论可以类推。)

考虑任意一个点 (x_1^0,x_2^0) 构造如下的函数：

$$z=\phi(t)=f(tx_1^0,tx_2^0)$$

在上面这个公式当中，对 t 求导数，利用链式法则可以得到：

$$\frac{dz}{dt}=\phi'(t)=x_1^0f_1(tx_1^0,tx_2^0)+x_2^0f_2(tx_1^0,tx_2^0) \tag{3-33}$$

根据假设，在点 (tx_1^0,tx_2^0) 成立 $f_1x_1+f_2x_2\equiv rf(x_1,x_2)$，因此有：

$$f_1(tx_1^0,tx_2^0)tx_1^0+f_2(tx_1^0,tx)tx_2^0\equiv rf(tx_1^0,tx_2^0) \tag{3-34}$$

从公式(3-33)以及(3-34)可以得到：

$$\phi'(t)\equiv rf(tx_1^0,tx_2^0)\equiv r\phi(t) \tag{3-35}$$

方程(3-35)是一个微分方程，也就是说它是可以解的。我们有 $z=\phi(t)$，$\frac{dz}{dt}=\phi'(t)$，因此方程(3-35)等价于：

$$t\frac{dz}{dt}=rz$$

上面这个公式又可以写为：

$$\frac{dz}{dz}=r\frac{dt}{t}$$

方程两边进行积分可以得到：

$$\int\frac{dz}{dz}=r\int\frac{dt}{t}+C'$$

其中 C' 是常数。由于 $\int\frac{dz}{dz}\equiv\log z$，$\int\frac{dt}{t}\equiv\log t$，并且记 $C'\equiv\log C$，那么式(3-35)解为：

$$\log z\equiv r\log t+\log C$$

或

$$\log z\equiv\log Ct^r$$

取反对数，微分方程(3-35)的解为：

$$z\equiv\phi(t)\equiv Ct^r \tag{3-36}$$

将上面这个表达式代入方程(3-35)，可以证明它就是该方程的解。令 $t=1$，就可以确定

出积分常数 C 的数值：

$$C \cdot 1^r = C = \phi(1) = f(x_1^0, x_2^0)$$

因此：$\phi(t) = f(tx_1^0, tx_2^0) \equiv t^r f(x_1^0, x_2^0)$。而这正是 r 度齐次线性函数的定义。由于 (x_1^0, x_2^0) 可以是平面上的任何一点，所以定理(欧拉定理的逆定理)证明完毕。

习题

1. 请证明如下的函数是齐次函数，并且证明欧拉定理成立。
   (a) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$
   (b) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2^2$
   (c) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)/(x_1^2 - 2x_2^2)$
   (d) $f(x_1, x_2) = x_1^2/(x_1 x_2 - x_2^2)$
   (e) $f(x_1, x_2) = x_1$
2. 请证明如下的函数是同势函数。
   (a) $y = \log x_1 + \log x_2$
   (b) $y = e^{x_1 x_2}$
   (c) $y = (x_1 x_2)^2 - x_1 x_2$
   (d) $y = \log(x_1 x_2) + e^{x_1 x_2}$
   (e) $y = \log(x_1^2 + x_1 x_2)^2$
3. 令 $f(x_1, x_2) = A[\alpha x_1^{\rho} + (1-\alpha) x_2^{\rho}]^{r/\rho}$，请证明这个函数是 1 度的齐次函数。(这个生产函数被称为不变替代弹性的生产函数，或者 CES 生产函数，它的性质将在第 9 章予以深入地讨论。)
4. 令 $f(x_1, x_2) = F(h(x_1, x_2))$，其中，$h$ 是 r 度的齐次函数，并且 $F' > 0$(f 是同势函数)。请证明 f 的扩张路线是一条直线，也就是说，f 的水平曲线在从原点出发的任何一条射线上具有相同的斜率。
5. 令 $f(x_1, x_2)$ 是 1 度的齐次函数。请证明 $f_{11} x_1 + f_{12} x_2 = 0$(请注意 $f_1(x_1, x_2)$ 的齐次性)。
6. 令 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的前 k 个变量为 r 度的齐次函数，即 $f(tx_1, \cdots, tx_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) \equiv t^r f(x_1, \cdots, x_n)$。请证明 $\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \equiv r f(x_1, \cdots, x_n)$

部分参考文献

In addidon to a basic calculus text, students might find the following works useful:

Allen, R. G. D.: *Mathematical Analysis for Economists*, Macmillan & Co., Ltd., London, 1938. Reprinted by St. Martin's Press Inc., New York, 1967.

Courant, R.: *Differential and Integral Calculus*. 2d ed., vols. 1 and 2, Interscience Publishers, Inc., New York, 1936. This is a classic work.

第4章　利润最大化

4.1　无约束极值：一阶必要条件

由于行为的目的性假设，自然要引入一些数学模型，以解决含有若干变量的函数的极大值问题。这种类型的极大值通常出现在检验条件中，用以说明变量变化的约束条件及参数取值。著名的效用最大化模型就是这样的一个例子。在给定预算支出的条件下，消费者使效用函数取最大值。但是，对于无约束的极大值，也有一些很重要的例子，如企业的利润最大化模型（将在下面进行讨论）。相比较而言，无约束的情况更简单一些，我们就从这一情况开始讨论。

对于只含有一个自变量的模型，使 $y=f(x)$ 达到稳定值的一阶必要条件是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f'(x)=0$。即在稳定点，曲线 $f(x)$ 的切线必须是水平的。在这里，使用的是稳定点，而非最大值或最小值，这是恰当的。要求切线水平，这一性质对于函数 $y=x^2$，$y=-x^2$，$y=x^3$ 在点 $x=0$，$y=0$ 的情况同样适用。在原点，第一个函数取得最小值，第二个函数取得最大值，第三个函数的取值既不是最大值，也不是最小值。但显然，如果切线的斜率不等于0（等于0即是水平），那么，函数当然既不会取最大值，也不会取最小值。因此，$f'(x)=0$ 是 $y=f(x)$ 取最大值（或最小值）的必要而非充分条件。

现在，假设函数 y 含有两个变量，即 $y=f(x_1,x_2)$。类似上面的讨论，该函数取最大值的必要条件是什么呢？从一个变量的情形可以直观地想到：在我们所讨论的最大值点，切平面一定是水平的。要想使切平面是水平的，一阶偏导 $\partial f/\partial x_1$ 和 $\partial f/\partial x_2$ 一定等于0。即在 x_1 和 x_2 的方向上，函数必须是水平的。

因为直觉通常是不可靠的，特别是对于最大化的二阶条件而言，下面将更加严谨地讨论前面的想法。令 $y=f(x_1,x_2)$，并假定我们将在点 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0)$[1] 讨论该函数的行为。我们要讨论的不是整个函数，而是代表通过点 $\boldsymbol{x}^0$ 的任一条（可微的）曲线的函数。之所以这样做，是因为可以将含有两个变量的问题转化为只含有一个变量的问题来解决，而且我们已经知道如何解决只含有一个变量的极值问题。所有这样的曲线都可以表示为 $x_1=x_1(t)$，$x_2=x_2(t)$，当 $t=0$ 时，$x_1=x_1^0$，$x_2=x_2^0$。即随着 t 值的改变，x_1 和 x_2 的取值也会发生变化，因此，代表 $x(t)$ 的点对 $[x_1(t),x_2(t)]$ 描绘出平面 x_1x_2 上某一曲线的轨迹。（设定 $x_1(0)=x_1^0$，$x_2(0)=x_2^0$ 仅仅是为了保证曲线能够在 t 取某一值时通过点 (x_1^0,x_2^0)。）

1　采用向量符号 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_2)$ 常常会非常方便，其中，符号 $\boldsymbol{x}$ 代表多维取值。

例 1.

$$x_1 = x_1^0 + h_1 t$$
$$x_2 = x_2^0 + h_2 t$$

其中，h_1 和 h_2 是任意常数。从而，这两个式子代表平面 x_1x_2 上通过点(x_1^0, x_2^0)的直线。任意一条这样的直线都可以通过 h_1 和 h_2 的合适取值得到。

例 2. 令：

$$x_1 = x_1^0 + t$$
$$x_2 = x_2^0 e^t$$

这种形式代表一条指数曲线。当 $t=0$ 时，$x_1 = x_1^0$，$x_2 = x_2^0$。因此，曲线通过点(x_1^0, x_2^0)。

例 3. 在自然科学中经常遇到的形式是：

$$x = a\cos\theta$$
$$y = a\sin\theta$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$。这代表平面 x_1x_2 上半径是 a，中心在原点的圆的方程。

对于某一可微曲线 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$，函数 $f(x_1, x_2)$即为 $y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$。若要使 $f(x_1, x_2)$在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ 达到最大值，与所有这些曲线相对应的函数必然同时也达到最大值。因此，对子所有的曲线 $\boldsymbol{x}(t)$，$y(t)$必须达到最大值(当 $t=0$ 时)，条件是只要 $y'(t)=0$。利用这一链式法则，最大化的一阶条件是：

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = f_1 \frac{dx_1}{dt} + f_2 \frac{dx_2}{dt} = 0 \tag{4-1}$$

但是，对于通过点 $\boldsymbol{x}^0$ 的所有直线$(x_1(t), x_2(t))$，dy/dt 都必须为 0；即对于 dx_1/dt 和 dx_2/dt 的任意取值，dy/dt 都必须为 0。即将 dx_1/dt 和 dx_2/dt 的任意取值代入上式，都要能够得到 $dy/dt=0$。保证能够做到这些的惟一方法是 $f_1 = f_2 = 0$。因此，使 $f(x_1, x_2)$在点 x_1^0, x_2^0 取得最大值的必要条件是，函数在该点的一阶偏导为 0。当然，上述条件只是 y 达到稳定点的必要条件；只有 $y(t)$的二阶导数才能揭示(x_1^0, x_2^0)是最大值，还是最小值，或者两者都不是。

可以直接推广到 n 个变量的情形，方法同上。要使 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在 $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$取得最大值，必要条件是所有的一阶偏导都等于 0，即 $f_i = 0, i = 1, \cdots, n$。

4.2 极值的充分条件：两个变量的情况

对于含有一个变量的函数 $y = f(x)$，$f(x)$在 $x = x^0$ 取得最大值的充分条件是$f'(x^0) = 0$，$f''(x^0) < 0$。条件 $f''(x^0) < 0$ 表示斜率是递减的。例如，翻越山顶时，地面首先是上升的，在山顶是水平的，接着又是下降的。如果 $f''(x^0) \leqslant 0$，称函数是下凹的，或者简单地称为是凹函数。如果 $f(x_1, x_2)$在 $\boldsymbol{x}^0$ 达到最大值，则 $y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$对于所有的曲线 $\boldsymbol{x}(t)$有最大值。因此，在最大值点，对于所有这样的曲线必然有 $d^2y/dt^2 = y''(t) \leqslant 0$。

在这一点上，该问题比我们预想的要微妙得多，下面将加以证明。尽管 $y''(t)\leqslant 0$ 是最大化的必要条件，但不是充分条件。将 $f(x_1,x_2)$ 利用泰勒级数对含有两个变量（或者更一般的 n 个变量）的函数进行展开，可以看出，如果在 $t=0$（最大值点）时，$y''(t)<0$，则函数 $f(x_1,x_2)$ 在点 (x_1^0,x_2^0) 是严格凹的。因此，在这种情况下，当 $f_1=f_2=0$ 时，可以取得最大值。分析过程列在本章的附录里。

接下来，我们看一下 $y''(t)$。利用链式法则和乘积微分法则，对(4-1)式：

$$y'(t)=f_1x_1'(t)+f_2x_2'(t)$$

可以得到（第 3 章中有详细的推导过程）：

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+f_2\frac{d^2x_2}{dt^2}+f_{11}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+2f_{12}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt}+f_{22}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2$$

但是，这是在稳定点 $(x_1,x_2)=(x_1^0,x_2^0)$ 上推出来的，因此 $f_1=f_2=0$。为了表达方便，令 $h_1=dx_1/dt$，$h_2=dx_2/dt$，则对通过点 (x_1^0,x_2^0) 的所有曲线，$d^2y/dt^2<0$ 都成立的条件意味着：

$$f_{11}h_1^2+2f_{12}h_1h_2+f_{22}h_2^2<0 \tag{4-2}$$

对 h_1 和 h_2 的所有取值（除了 $h_1=h_2=0$）。由于这一不等式要对所有非零的 h_1 和 h_2（即并非两个同时等于 0）都成立，因此对二阶偏导的符号和相对大小施加了限制。

从(4-2)式显然可以看出，f_{11} 和 f_{22} 必须都为负。令 $h_2=0$，h_1 为任意值，并假设 f_{11} 为正，则 $d^2y/dt^2=f_{11}h_1^2>0$，不满足最大化的充分条件。因为这个表达式是完全对称的，所以，交换下标，可以验证 f_{22} 为负。因此，$d^2y/dt^2<0$ 在 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0)$ 成立的必要条件是：

$$f_{11}(\boldsymbol{x}^0)<0 \quad 及 \quad f_{22}(\boldsymbol{x}^0)<0$$

读者从一个变量的情形，可能已经猜测到这些条件，但是，单单这些还不足以说明 $f(x_1,x_2)$ 有最大值。这里，还必须考虑交叉偏导 f_{12}。需要另外对 f_{ij} 加以限制，以保证 $d^2y/dt^2<0$ 对所有非零的 h_1 和 h_2 都成立，可以利用配方进行证明。

考虑表达式 x^2+2bx，同时加上再减去 b^2，可以得到等式 $x^2+2bx\equiv(x-b)^2-b^2$。在(4-2)式中提出 f_{11}：

$$f_{11}\left(h_1^2+\frac{2f_{12}h_2}{f_{11}}h_1+\frac{f_{22}}{f_{11}}h_2^2\right)<0$$

如同前面的例子，括号内的前两项是 h_1 的二次式。对 h_1 进行配方，可以在括号内加上并减去 $(f_{12}h_2/f_{11})^2$，得到：

$$f_{11}\left[\left(h_1+\frac{f_{12}h_2}{f_{11}}\right)^2+\left(\frac{h_2}{f_{11}}\right)^2(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)\right]<0$$

由于 $f_{11}<0$，为了使 $d^2y/dt^2<0$，中括号内的表达式必须为正。但是，括号内的第一项是平方项，因此在任何情况下，通常都为正。要想使 $d^2y/dt^2<0$ 对 h_1 和 h_2 的所有取值都成立，

必须使得第二项为正，即 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2$ 为正。

总而言之，假设 $f(x_1,x_2)$ 有一个稳定点 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0$，即极值的一阶必要条件是：

$$f_1(\boldsymbol{x}^0)=f_2(\boldsymbol{x}^0)=0 \tag{4-3}$$

如果，增加条件：

$$f_{11}<0 \quad 及 \quad f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0, 在\ \boldsymbol{x}^0\ 成立 \tag{4-4}$$

则可以得到最大值。注意，条件(4-4)隐含了 $f_{22}<0$。同样要注意，条件(4-4)只是对 f_{12} 的相对值有限制，并没有对其符号施加限制。因此，f_{12} 的符号与函数是否有最大值或最小值是无关的。

对于 $f(x_1(t),x_2(t))$，要在 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0)$ 取得最小值，也必须满足同样的一阶条件(4-3)。类似地，$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2<0$ 成立的二阶充分条件是：

$$f_{11}>0, f_{22}>0 \quad 及 \quad f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0 \tag{4-5}$$

其中所有偏导数都是在 $\boldsymbol{x}^0$ 处取值。注意，对最小化和最大化而言，表达式 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2$ 都为正。如果这一表达式为负，则曲面在 $\boldsymbol{x}^0$ 处呈现“马鞍”状。在一个方向上是上升的，在另一个方向上是下降的，与马鞍中心的那点很相似。

这里，还必须再提醒一点。这些二阶条件是最大化或最小化的充分条件，但取最大值和最小值时并不必须具备严格的不等式(4-4)和(4-5)。例如，函数 $y=-x^4$ 在原点有最大值，但是该点的二阶导数为0。同样，$y=x^3$ 在 $x=0$ 时既不取最大值，也不取最小值，但是该点的二阶导数也为0。因此，如果(4-4)或(4-5)中的一个或多个式子为等号，那么，我们就无法断定该点函数的形状。一般的规则是，如果对某一 $x(t)$，$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2=0$，我们必须计算更高一阶的导数 $\mathrm{d}^3y/\mathrm{d}t^3$，$\mathrm{d}^4y/\mathrm{d}t^4$ 等，这里不再证明。对所有的曲线 $x(t)$，如果第一次出现 $\mathrm{d}^ny/\mathrm{d}t^n<0$ 时的 n 为偶数，则函数有最大值(如果是大于0的情况，则函数有最小值)；但是，如果第一次出现 $\mathrm{d}^ny/\mathrm{d}t^n<0$ 时的 n 为奇数，函数既没有最大值，也没有最小值。但是，考虑一些特殊的情况，有些函数，如 $y=\mathrm{e}^{-1/x^2}$，在某点(这里是 $x=0$)取得最小值，而且在该点(对所举例的函数，在点 $x=0$)所有有限阶的导数都为0。在这些“非常规”的情况下，极值的一般充分条件不成立，这些情况我们将忽略掉，我们只限定在“常规”极值的范围内讨论问题。

可见，二阶条件(4-4)保证了函数在除了稳定点之外的其他点是凹(下凹)函数。同样，式(4-5)保证了函数在任意点都是凸(即上凹)函数。这些命题将在附录里进行证明。

例1. 假设 $f(x_1,x_2)$ 在某点有最大值，那么，对所有非零的 h_1 和 h_2，二阶充分条件是：

$$f_{11}h_1^2+2f_{12}h_1h_2+f_{22}h_2^2<0 \tag{4-2}$$

既然这对 h_1 和 h_2 的所有取值都成立，因此，可以令 $h_1=1$ 和 $h_2=\pm1$。那么，二阶条件即为：

$$f_{11}+f_{22}\pm2f_{12}<0$$

或：

$$f_{11}+f_{22}<\mp2f_{12}$$

由于 f_{11} 和 f_{22} 都取负值，由最大化的二阶充分条件可知：

$$|f_{11}+f_{22}|>2|f_{12}| \tag{4-6}$$

例 2. 假设 $f(x_1,x_2)$ 在某点是严格凹的。凹性的充分条件即(4-2)：

$$f_{11}h_1^2+2f_{12}h_1h_2+f_{22}h_2^2<0 \tag{4-2}$$

令 $h_1=f_2$ 和 $h_2=-f_1$，由(4-2)式可知：

$$f_{11}f_2^2-2f_{12}f_1f_2+f_{22}f_1^2<0 \tag{4-7}$$

这一条件使得水平曲线凸向原点，这是我们在第 3 章(等式(3-24))中讨论的。因此，凹性意味着水平曲线有这样的性质。但是，反过来说就错了。

例 3(垄断价格歧视). 在所谓的价格歧视中，有时垄断者可以针对同一服务，对不同的顾客采取不同的价格。政府管制将对某些航线近乎垄断的权利交给某些航空企业后，这些航空企业发现，其中有一些顾客是商人，他们急于在一两天内要飞赴某一个遥远的城市去参加会议，而另外一些顾客更像家庭，他们在旅行的很长时间之前就开始计划行程。与家庭相比，商业旅行者更缺乏弹性，航空企业发现了这一差异。他们也发现，给那些需要周六住一夜的机票打折，将会出现自我选择，而商人通常很少这样做。(这些事实表明，航线缺乏管理，显然是由于飞机场的人口不足造成的，这可以有效地限制对很多市场的介入。)

采取价格歧视的垄断者而临着两种市场需求，$p_1=p_1(x_1)$ 及 $p_2=p_2(x_2)$。目标是最大化：

$$\pi=R_1(x_1)+R_2(x_2)-C(x_1+x_2)$$

其中，$R_1(x_1)$ 和 $R_2(x_2)$ 分别是总收入函数 $p_1(x_1)x_1$ 和 $p_2(x_2)x_2$。总收入函数的导数分别是边际收入 $MR_1(x_1)$ 和 $MR_2(x_2)$。同样要注意，总成本 C 实际上也是一个变量的函数，$x=x_1+x_2$，$C_1=C_2=C'(x)=MC(x)$。一阶必要条件是：

$$\pi_1=MR_1(x_1)-MC(x)=0 \tag{4-8a}$$

$$\pi_2=MR_2(x_2)-MC(x)=0 \tag{4-8b}$$

这些条件意味着当一个市场的边际收入等于另一个市场的边际收入，也等于边际成本时，企业利润达到最大值：

$$MR_1(x_1)=MR_2(x_2)=MC(x)$$

这里，道理非常明显。如果市场 1 的边际收入是\$100，而市场 2 的边际收入只有\$50，企业如果从市场 2 转向市场 1，将会增加利润。边际收入的这一共同值必须等于边际成本，如果 $MR>MC$，企业增加产出时将会增加利润，等等。

二阶充分条件是：

$$\pi_{11}=MR_1'(x_1)-MC'(x)<0 \tag{4-9a}$$

$$\pi_{22}=MR_2'(x_2)-MC'(x)<0 \tag{4-9b}$$

$$\pi_{11}\pi_{22}-\pi_{12}^2>0 \tag{4-9c}$$

(4-9a)式和(4-9b)式说明，MC 曲线必须从下面与每条 MR 曲线相交，否则，在每个市场中，企业可以将产出增加到超出 $MR=MC$ 时的产出水平，从而增加利润。(4-9c)式意味着 MC 曲线必须从下面与各 MR 曲线的水平之和相交，其证明留作练习题。

下面考虑一阶条件(4-8)。由公式 $MR=p(1+1/\varepsilon)$(参见 2.1 节)可知，边际收入与需求曲线的弹性有关。对每一个市场都利用这一公式，得到 $p_1(1+1/\varepsilon_1)=p_2(1+1/\varepsilon_2)$，改写为：

$$p_1=\frac{1+1/\varepsilon_2}{1+1/\varepsilon_1}p_2 \tag{4-10}$$

两个市场的需求都必须富有弹性($\varepsilon<-1$)(想想是为什么?)。显然，如果市场 1(家庭)的弹性是 -4，面市场 2(商业旅客)的弹性是 -2，对家庭面言，市场 1 的价格更低(对于给定的数字，有 $p_1=(2/3)p_2$)。无疑，对于更富有弹性的市场，垄断者收取较低的价格。

习题

1. 对下列的每一个函数，找出稳定点，并判断该点是 $f(x_1,x_2)$的相对最大值点、最小值点，还是鞍点?
   (a) $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2$
   (b) $f(x_1,x_2)=-4x_1-6x_2+x_1^2-x_1x_2+2x_2^2$
   (c) $f(x_1,x_2)=12x_1-4x_2-2x_1^2+2x_1x_2-x_2^2$
2. 利用(4-2)式，说明 $f(x_1,x_2)$在 x^0 取得最小值的充分条件是(4-5)式。
3. 考虑生产函数 $y=L^\alpha K^\beta$。如果 $0<\alpha<1,0<\beta<1,\alpha+\beta<1$，试说明该生产函数对 L 和 K 的任意取值都严格凹(下凹)。如果 $\alpha+\beta=1$，该函数是什么形状?
4. 试说明对于任意的 $\alpha,\beta>0$，生产函数 $y=\log L^\alpha K^\beta$ 都是凹函数。
5. 令 $y=f(x_1,x_2)$，$z=F(y)=F(f(x_1,x_2))=g(x_1,x_2)$。试说明如果 $F'>0$，当且仅当 f 在点(x_1^0,x_2^0)是稳定的，则 g 在点(x_1^0,x_2^0)存在稳定点，当且仅当 g 有最大值时，f 有最大值，这在什么条件下成立?

4.3 脚注的扩展

在前面一节里，含有两个变量的函数最大化的充分条件是通过将问题转化为一维或者一个变量的情形推导出来的。确实，一个函数如果在某点有最大值，那么，位于该函数确定的平面内且通过最大值点的所有曲线在该点也必有最大值。因此，在这种情况下，$y''(t)\leqslant 0$ 对所有这些曲线都成立。但是，该命题的各种逆命题通常并不正确。例如，对于所有可能的多项式曲线，系数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 取任意值，n 取任意有限值，假设函数 $f(x_1,x_2)$都有最大值：

$$x_1=x_1^0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n$$
$$x_2=x_2^0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_nt^n$$

在这一广泛的曲线范围内，即使$(x_1(t),x_2(t))$在$t=0$时取最大值，但是函数$f(x_1,x_2)$自身在x_1^0,x_2^0却不一定有最大值。

要解释这一现象，可以假设将曲线$(x_1(t),x_2(t))$限定为通过(x_1^0,x_2^0)的直线。即考虑在$y=f(x_1,x_2)$平面内的曲线，该平面是由$y=f(x_1,x_2)$所在平面与垂直于x_1x_2的平面的交集构成。那么，如果所有这些曲线都有最大值，则函数自身有最大值，就不属于这种情况了，正如下面由数学家 Peano 建立的反例。考虑函数：

$$y=(x_2-x_1^2)(x_2-2x_1^2)$$

该函数画在图 4-1 中。沿着x_1x_2平面内的两条抛物线$x_2=x_1^2$和$x_2=2x_1^2$，该函数取值为 0。尤其是在原点$y=0$。图中的加号和减号反映了函数在x_1x_2平面给定部分的取值。对于位于下面一条抛物线下方的任何一点，$x_2<x_1^2$，因此$x_2<2x_1^2$（该点同样位于上面一条抛物线的下方）。y是两个负值的乘积，因此为正。同样，对于上面一条抛物线上方的部分，$x_2>2x_1^2$，因此$x_2>x_1^2$，$y=(+)(+)>0$。对于这两条抛物线之间的部分，$x_2>x_1^2$，但是$x_2<2x_1^2$，因此$y=(+)(-)<0$。注意，在原点的任何邻域内，y的取值既有正也有负。因此，该函数在原点既没有最大值，也没有最小值。即在原点附近，有些值大于 0，而有些值小于 0，因此，在该点既无法取得最大值，也无法取得最小值。当然，鞍点的情况与此类似。对于通过原点的任意直线，如图 4-1 中的直线AA，考虑该函数的情况。穿过上面一条抛物线之后，沿着这条直线，函数取值从正变为 0（在原点），再变为正。这意味着沿着这条直线或者任意一条这样的直线，y在原点取最小值。但是，我们刚刚讨论过，该函数自身在原点并没有最小值。因此，对于函数取最大值（最小值）时必定要通过的某点，沿着通过该点的所有直线，如果函数取最大值（最小值），情况就不是这样了。即使$y(t)$对x_1x_2平面内所有的多项式曲线都

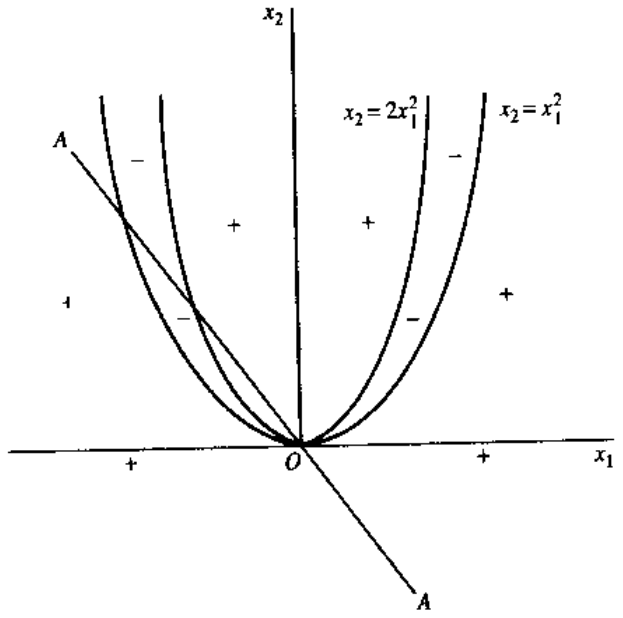

图 4-1　函数$y=(x_2-x_1^2)(x_2-2x_1^2)$。这一函数说明了一个有趣的性质：沿着通过原点的所有直线，函数有最小值(0)。但是，显然函数自身在原点既没有最大值，也没有最小值。因为在原点的任何邻域内，该函数的取值既有正，也有负。

有最大值，也有可能构造出自身并没有最大值的函数。[1] 事实上，逆命题成立的函数 $x(t)$ 的确切集合还未找到。

4.4 行为最大化的应用：企业利润的最大化

下面，将利用前一节建立起来的工具进行企业利润最大化的比较静态分析。追求利润最大化的企业以固定单价 p 销售产品，并以固定的单位要素价格 w_1 和 w_2 分别购买两种投入 x_1 和 x_2。即我们所考虑的企业是教科书里的原型，它面临着竞争性的投入和产出市场。企业的生产过程可以用生产函数来概括：$y=f(x_1,x_2)$。这里，生产函数可以看做是通过将两种投入或称为两种要素 x_1 和 x_2 相结合而达到最大产出时的技术状态。企业的目标函数是总收入减去总成本（即利润）。[2]

我们认为企业使该函数取最大化，即：

最大化

$$\pi=pf(x_1,x_2)-w_1x_1-w_2x_2 \tag{4-11}$$

该模型的检验条件是要素价格 w_1,w_2 和产品价格 p 的特值。模型的目标是举出可观测行为（如投入水平的变化）在检验条件变化（即要素价格或产品价格发生变化）时的可证伪的假设。

利润最大化的一阶条件是：

$$\pi_1=\frac{\partial\pi}{\partial x_1}=pf_1-w_1=0 \tag{4-12a}$$

和

$$\pi_2=\frac{\partial\pi}{\partial x_2}=pf_2-w_2=0 \tag{4-12b}$$

最大化的充分条件是：

$$\pi_{11}<0 \quad \pi_{22}<0 \quad \pi_{11}\pi_{22}-\pi_{12}^2>0 \tag{4-13}$$

由于 $\pi_{ij}=pf_{ij}$，这些二阶条件可以简化为：

$$f_{11}<1 \quad f_{22}<0 \tag{4-14}$$

以及：

$$f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0 \tag{4-15}$$

---

1 参见 H. Hancock, Theory of Maxima and Minima, Dover Publications, Inc., New York, 1960.

2 学生应该留意术语企业和利润。对于前者，这里还不能进行定义，而且事实上，精确地说，企业是什么，它们为什么存在，如何界定，这些都存在着很大的争议。对于利润，模型没有特指，人们通常认为利润是指收入超过成本的部分。或者说，如果只需要两种生产要素 x_1 和 x_2，使得(4-11)式最大化又是谁所关心的呢？尽管存在着这些不足，但由于模型确实产生了可证伪的假设，正如我们后面将看到的那样，这将会被普遍关注。这可以被称为企业的"黑箱子"理论。

这些条件的经济解释是什么呢？(4-12)式表明，追求利润最大化的企业会一直增加资源，直到各种要素的边际贡献(要素 i 的边际产出值，它带来的收入是 pf_i)等于每增加一单位该要素所带来的成本 w_i。这些是利润最大化所必然包含的。但是，为了保证要素投入后能够获得最大利润，而非最小利润，还需要条件(4-14)和(4-15)。条件(4-14)是收益递减法则。我们在前面已经讨论过包括这一定律的原因。(注意，条件(4-13)是充分条件，而非必要条件——最大值情形对应于这些式子取等式。)假设，最初使用一个单位的要素是值得的，如果该要素的边际产出是递增的，企业将无休止的增加该要素，因为投入带来的收入多于支出。因此，有限的最大值与递增的边际生产率是矛盾的。

但是，各种要素的边际生产率递减，其自身并不能保证利润能取最大值，还需要条件(4-15)。尽管这一关系式不如边际生产率递减那样直观，但是它来自这样一个事实：一种要素的改变会影响另一种要素的边际产出，正如要影响其自身的边际产出一样，对所有边际产出的总体影响必须与边际生产率递减相一致。例如，假设与 $f_{11}=\partial MP_1/\partial x_1$ 和 $f_{22}=\partial MP_2/\partial x_2$ 相比，$f_{12}=f_{21}=\partial MP_1/\partial x_2=\partial MP_2/\partial x_1$ 的绝对值非常大。即假设 x_1 的变化对要素 2 的边际产出的影响要远远大于对要素 1 的边际产出的影响。在图 4-2 中，如果 $f_{12}=f_{21}>0$。MP_1 最初会下降，但是 MP_2 会向上移动很大一段距离，导致企业额外购买了很多单位的 x_2。但是，这些增加的 x_2 会对 MP_1 产生影响。由于 $f_{12}=\partial MP_1/\partial x_2>0$，$MP_1$ 也会向上移动很大一段距离。如果交叉影响足够大，最终结果是 x_1 的增加导致了 MP_1 的增加。因此，尽管每种要素的边际生产率都是递减的，但是要素最初的使用水平不能说明利润是最大化的，因为在这种情况下，同时增加 x_1 和 x_2 的使用量，显然是有利可图的。对于 f_{12} 是负值，且相对于 f_{11} 和 f_{22} 来说是非常大的情况，分析是类似的。x_1 的增加导致 MP_2 相对较大的下降，导致 x_2 的下降，从而导致 MP_1 相对较大的增加。(注意 $\partial MP_1/\partial x_2<0$)在这种情况下，增加一种要素，并减少另一种要素(同时进行)将会导致利润的增加。

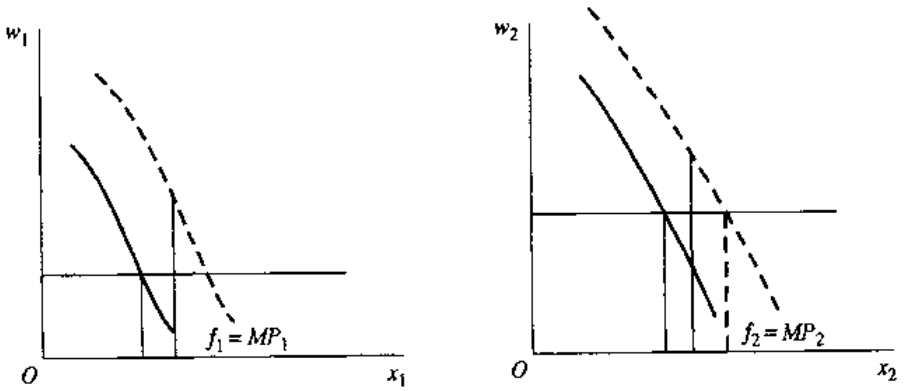

图 4-2　收益递减法则。只是 $f_{11}<0$，$f_{22}<0$ 并不足以保证利润能取最大值。还必须考虑这两种要素的交叉影响。如果 x_1 增加，MP_2 会向外移动很大一段距离，使得 MP_1 向外移动，即使 $f_{11}=\partial MP_1/\partial x_1<0$，也导致 MP_1 的净增加。如果 f_{22} 很大，就是这样的情况。因此要使利润最大，条件 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$ 也是必需的。

现在回到边际关系式(4-12)。构建该模型的目的并非简单地说明其所隐含的边际推理,这种努力将毫无结果。进行这样的分析,其目的是能够形成可证伪的假设,如企业将如何应对变量的变化。在这种情况下,特别是要素价格和产品价格的变化。最后,我们讨论该模型的比较静态分析。

完整的一阶条件是:

$$pf_1(x_1,x_2)-w_1=0$$

$$pf_2(x_1,x_2)-w_2=0$$

这是两个隐性关系式,含有 5 个重要的未知量:x_1,x_2,w_1,w_2,p。在这些"正确的"条件下(稍后将加以讨论),可以将其中的 2 个变量表示为其他 3 个变量的形式。特别是,我们可以求解选择函数:

$$x_1=x_1^*(w_1,w_2,p) \tag{4-16a}$$

和

$$x_2=x_2^*(w_1,w_2,p) \tag{4-16b}$$

(4-16)式代表要素需求曲线。这些式子是要素价格和产品价格的函数,它们指出了由该模型所确定的各种要素的使用量,是该模型的选择函数。假设(4-16)式可以求解,那么提出下面 6 个偏导的符号问题就很有意义了,这 6 个偏导组成了利润最大化模型的比较静态分析:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}\quad\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}\quad\frac{\partial x_1^*}{\partial p}\quad\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\quad\frac{\partial x_2^*}{\partial w_2}\quad\frac{\partial x_2^*}{\partial p} \tag{4-17}$$

这些偏导给出了由于既定的价格变化所导致的要素使用的极限变化。注意,要写出这些关系式并给出有意义的解释,就必须很好地定义显式函数 x_i^*,这是很重要的。同样要注意,前面给出的要素需求曲线不是边际产出曲线。边际产出函数 f_1 和 f_2 是要素投入的表达式,而要素需求曲线是价格的表达式,它依赖于模型的行为假设。

将(4-16)式代入(4-12)式,得到下面的恒等式:

$$pf_1(x_1^*(w_1,w_2,p),x_2^*(w_1,w_2,p))-w_1\equiv 0 \tag{4-18a}$$

和

$$pf_2(x_1^*(w_1,w_2,p),x_2^*(w_1,w_2,p))-w_2\equiv 0 \tag{4-18b}$$

复习第 1 章中垄断者税收的例子,将一阶条件(即边际收入等于边际成本加上税收)的解 $x=x^*(t)$ 代入此式,从而可以得到关于税率 t 的恒等式。同理,(4-18)式是价格 w_1,w_2,p 的恒等式。要素需求函数 x_1^* 和 x_2^* 恰是企业家在任意价格下为使各种要素的边际产出等于其支付而使用的 x_1 和 x_2 的水平。

无论在什么价格下,企业通常都会按照(4-12)式行事,这一论断将这些方程式转化成恒等式(4-18)。由于(4-18)式是恒等式,就可以对各种价格求导,所产生的关系式可以用来求解偏导数(4-17)。求解过程与垄断者的例子完全相同。但是,在这个例于里,出现了两个一阶的关系式,而非一个,这就使得代数运算更加困难。

求导之前，先要注意，如果企业的生产函数是已知的，则可以直接求解要素需求函数曲线。在这种情况下，我们能够知道该模型所包含的总量，这种情况很简单。对要素需求函数(4-16)求导，可以直接得到偏导数(4-17)。但是，经济学家不可能得到这么多的信息。不过，通过对恒等式(4-18)进行隐函数微分，从而得到关于边际量的可证伪的假设，还是有可能的。

利用链式法则，(4-18a)和(4-18b)分别对 w_1 求导(注意，f_1 是 x_1 和 x_2 的函数，因此也是 w_1, w_2, p 的函数。)，可得：

$$p\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}+p\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}-1\equiv 0$$

$$p\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}+p\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\equiv 0$$

利用下标记号，上式可以写做：

$$pf_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}+pf_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\equiv 1 \tag{4-19a}$$

$$pf_{21}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}+pf_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\equiv 0 \tag{4-19b}$$

恒等式(4-19)尽管看似复杂，但是在形式上比(4-18)要简单很多。一阶关系式(4-18)通常是复杂的代数表达式，但(4-19a)和(4-19b)却是关于未知量 $\partial x_1^*/\partial w_1$ 和 $\partial x_2^*/\partial w_1$ 的简单线性关系。即作为含有两个未知量的两个联立线性方程的基本系统，(4-19a)和(4-19b)具有相同的形式。未知量的系数是函数 pf_{11}，pf_{12} 等，但是因为不包括 $\partial x_1^*/\partial w_1$ 等项的乘积或平方，所以方程组还是非常简单。而且，这已经非常幸运了，因为我们分析的目标是求解这些项，即找出 $\partial x_i^*/\partial w_j$ 的表达式。

例如，要求解 $\partial x_1^*/\partial w_1$，将(4-19a)乘以 f_{22}，(4-19b)乘以 f_{12}，从(4-19b)中减去(4-19a)。进行因式分解(注意 $f_{12}=f_{21}$)[3]，可得：

$$p(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}=f_{22}$$

如果 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2\neq 0$，可以从方程式两边同除以 $p(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)$，得到：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}=\frac{f_{22}}{p(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)} \tag{4-20a}$$

同样，可以得到：

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}=\frac{-f_{21}}{p(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)} \tag{4-20b}$$

要考虑企业对 w_2 变化的反映，可以求(4-18)式对 w_2 的导数。注意，w_2 只是单独出现在第二个方程式中，比较静态分析关系式变为：

3　为了与一般的习惯保持一致，如果没有特别说明，我们将使用等式，而非恒等式。

$$pf_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}+pf_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_2}\equiv 0$$

$$pf_{21}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}+pf_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_2}\equiv 1$$

同前面一样，求解这些方程，得到：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}=\frac{-f_{12}}{p(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)} \tag{4-20c}$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_2}=\frac{f_{11}}{p(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)} \tag{4-20d}$$

注意，充分条件(4-15) $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$ 足以保证 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2\neq 0$，因此可以求解出偏导数(4-20a—d)。这并非只是巧合。事实上，这是数学中隐函数定理的一个应用，隐函数定理将在第5章中进行讨论。条件 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2\neq 0$ 正是保证要素需求曲线 $x_i^*(w_1,w_2,p)$ 有解(局部有解，并非处处有解)的数学条件。在出现偏导的情况下，会适时引入这一表达式。

从这一分析可以得到什么可证伪的假设呢？条件(4-15)意味着(4-20a—d)的分母都为正；条件(4-14) $f_{11},f_{22}<0$(边际生产率递减)使得(4-20a)和(4-20d)的分子为负。因此，利润最大化的常规(充分)条件意味着要素需求曲线对各自的要素价格必须是向下倾斜的。这个模型意味着要素价格的变化将导致对该要素使用量的反向变化。

交叉影响 $\partial x_1^*/\partial w_2,\partial x_2^*/\partial w_1$ 又怎样呢？有关这两个表达式，最重要的一点在于它们通常是相等的，这可由(4-20b)和(4-20c)得知，注意 $f_{12}=f_{21}$。这一交互关系：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}=\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}$$

是经济学中涉及最大化原则时经常出现的这类关系的一个代表。正如物理学一样，这些表达式的形式虽然很容易看出来，但是交互关系如同推导它们时需要利用的数学定理(混合偏导对求导阶数的不变性)一样，并不直观。

对这些交叉效应的式子范围之外的内容，将不再讨论。f_{12} 的符号取值并没有隐含在最大化的假设之中；同样，$\partial x_i^*/\partial w_j,i\neq j$ 的符号取值也没有包括在内。从利润最大化模型，推导不出关于这些条件可证伪的命题。当资本的租金率增加时，与劳动力使用量的变化有关的所有可观测的事件都与前面的模型一致。

现在假设我们想要找到关于产品价格 p 的变化效应的表达式。这个过程同推导(4-18)式是一样的。因此，我们求那些恒等式对 p 的偏导，得到：

$$pf_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial p}+pf_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial p}\equiv -f_1 \tag{4-21a}$$

$$pf_{21}\frac{\partial x_1^*}{\partial p}+pf_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial p}\equiv -f_2 \tag{4-21b}$$

注意，在对 pf_1,pf_2 进行微分时，要用到乘积微分法则。从这些方程式求解 $\partial x_1^*/\partial p$ 和 $\partial x_2^*/\partial p$，得到：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p}=\frac{-f_1 f_{22}+f_2 f_{12}}{p(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)} \tag{4-22a}$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial p}=\frac{-f_2 f_{11}+f_1 f_{12}}{p(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)} \tag{4-22b}$$

可见，从这些表达式无法推出可证伪的假设。因为 f_{12} 的符号未知，所以产品价格的上升可能导致任一种要素使用量的增加或减少。（注意，如果假定 $f_{12}>0$，则 $\partial x_1^*/\partial p>0$，$\partial x_2^*/\partial p>0$。）但是，可以证明 $\partial x_1^*/\partial p<0$ 和 $\partial x_2^*/\partial p<0$ 不会同时出现。产品价格的增加不会导致两种要素使用量都减少。对此的证明留作练习。

供给函数

可能有人会问，当一个变量变化时，产出将如何变化。由于 $y=f(x_1,x_2)$，因此：

$$y^*=f(x_1^*,x_2^*)$$

其中，y^* 是利润最大化时的产出水平。

要素需求曲线是价格的函数：

$$x_i=x_i^*(w_1,w_2,p)\quad i=1,2$$

将这些式子代入 $f(x_1^*,x_2^*)$，得到：

$$y^*\equiv f(x_1^*(w_1,w_2,p),x_2^*(w_1,w_2,p))\equiv y^*(w_1,w_2,p) \tag{4-23}$$

(4-23)式代表企业的供给函数。它指出产出如何与产品价格 p 与要素价格联系在一起。尽管我们通常将供给函数只画成产品价格 p 的曲线，但是要素价格也必须出现在供给函数中，因为要素成本显然会影响企业所选择的产出水平。

产品价格的增加如何影响产出呢？要回答这一问题，利用链式法则，(4-23)式对 p 求导，可得：

$$\frac{\partial y^*}{\partial p}\equiv\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial p}$$

或者写为：

$$\frac{\partial y^*}{\partial p}\equiv f_1\frac{\partial x_1^*}{\partial p}+f_2\frac{\partial x_2^*}{\partial p} \tag{4-24}$$

将(4-22)式代入该表达式，得到：

$$\frac{\partial y^*}{\partial p}\equiv\frac{-f_1^2 f_{22}+2f_{12}f_1 f_2-f_2^2 f_{11}}{p(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)} \tag{4-25}$$

由二阶充分条件可知，该表达式的分母为正。从(4-7)式也可以推断分子同样为正。因此：

$$\frac{\partial y^*}{\partial p}>0 \tag{4-26}$$

这说明，利润最大化的二阶充分条件意味着，供给曲线必须是向上倾斜的，正如我们通常所画的那样。这也说明了为什么不能出现 $\partial x_1^*/\partial p$ 和 $\partial x_2^*/\partial p$ 同时为负的情形。如果 p 增加，

产出将增加。由于边际产出为正，有可能使用较少的要素，而生产出较多的产品。

根据产品供给函数和要素需求函数，也有可能推导出一些交互关系。特别是可以得到：

$$\frac{\partial y^*}{\partial w_i} \equiv \frac{-\partial x_i^*}{\partial p} \quad i=1,2 \tag{4-27}$$

这些表达式的符号不能确定；但是，这一严格交互的结果却是很显然的。其证明留作练习。

分析中所用到的工具涉及联立线性方程的求解。正因为如此，下面一节将讨论有关矩阵和行列式的理论。不是单独地求解每一个表达式，而是找到一种普遍的方法来表达这类方程组的解，这很有好处。

4.5 需求函数和供给函数的齐次性：弹性

假设经济将遭遇完全中性的通货膨胀，即投入价格和产品价格以相同的比例上升，如都上升 10%。既然相对价格没有变化，模型就应该能够预测到决策不会有所改变，这一点非常重要。换句话说，要素需求函数和供给函数对所有的价格都应当是 0 次齐次的。情况确实是这样吗？

要素需求函数是一阶条件的联立解：

$$pf_1(x_1,x_2)-w_1=0$$

$$pf_2(x_1,x_2)-w_2=0$$

假设 w_1,w_2,p 都变化同样的比例，即这些价格分别变为 tw_1,tw_2,tp，其中 t 是某一个标量因子。现在，要素需求函数要用新的价格来表示：$x_1^*(tw_1,tw_2,tp)$，$x_2^*(tw_1,tw_2,tp)$。这些函数是一阶条件在新价格下的解：

$$(tp)f_1(x_1,x_2)-(tw_1)=0$$

$$(tp)f_2(x_1,x_2)-(tw_2)=0$$

但是这些方程同原来的方程显然是等价的，数学方面的所有变化只是方程式两边都乘以了 t。由于要求解的方程在数学上是相同的，因此所求出的解也一定相同。即：

$$x_i^*(tw_1,tw_2,tp)\equiv x_i^*(w_1,w_2,p) \quad i=1,2$$

因此，在这个模型里，要素需求函数必然是 0 次齐次的。（同样可得供给函数 $y^*(w_1,w_2,p)$ 一定也是 0 次齐次的。这一证明留作练习。）

注意，前面的证明完全没有利用对生产函数的函数形式的任何假设。尤其为了避免常犯的错误，这不是生产函数必须是某次齐次的情形。需求函数不是从生产函数求出的偏导数，而是一阶方程的联立解。因为那些一阶方程关于 w_1,w_2,p 是线性的，所以出现了这样的结果。如果各种变量都增加相同的比例，比例因子可以从一阶方程的两边消去，从而系统没有发生变化。

弹性

要素需求函数 $x_i^*(w_1, w_2, p)$ 的性质通常写成无维度的弹性表达式，而不是写成斜率的形式(偏导)。弹性定义为：

$$\epsilon_{ij} = \lim_{\Delta w_j \to 0} \frac{\Delta x_i / x_i}{\Delta w_j / w_j} \tag{4-28}$$

弹性 ϵ_{ij} 表示要素 j 的价格变化 1%，将会引起的要素使用量 x_i 的百分比变化(的极限)。当 $i = j$ 时，称为要素需求的自弹性；当 $i \neq j$ 时，称为交叉弹性。

利用极限，并对繁分数进行简化，得到：

$$\epsilon_{ij} = \frac{w_j \partial x_i^*}{x_i^* \partial w_j} \tag{4-29}$$

后面我们将一直使用这个定义。同样，我们可以把要素需求的产出价格弹性定义为产出价格变化 1%(要素价格不变)，将会引起的要素使用量的百分比变化，即：

$$\epsilon_{ip} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta x_i / x_i}{\Delta p / p} = \frac{p \partial x_i^*}{x_i^* \partial p} \tag{4-30}$$

弹性是无维度的表达式，我们可以这样考虑：单位都被抵消了。对数学家而言，它们是对数导数。例如，令 $u_i = \log x_i$，$v_j = \log w_j$，

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}v_j} = \frac{\mathrm{d}x_i / x_i}{\mathrm{d}w_j / w_j} = \frac{w_j \mathrm{d}x_i}{x_i \mathrm{d}w_j}$$

记号适当地变成了偏导的形式。很多经济学家比较倾向于使用弹性，而另一些经济学家则倾向于使用斜率(自然偏导)。这只是偏好的问题。

将欧拉定理应用于要素需求函数(下面都将以 x_1 为例)，可以推导出需求的弹性和交叉弹性的表达式：

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}\right) w_1 + \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}\right) w_2 + \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right) p \equiv 0$$

两边同除以 x_1，可以得到：

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{12} + \epsilon_{1p} \equiv 0$$

类似的表达式对 x_2 也成立。通常，对于含有 n 个要素的生产模型，存在：

$$\sum_j \epsilon_{ij} + \epsilon_{ip} \equiv 0 \quad i = 1, \cdots, n \tag{4-31}$$

4.6　长期和短期：Le Châtelier 法则举例

某些生产要素在某些特定时期是“固定不变”的，如资本投入在短期内是不能改变的，这一看法相当普遍。当然，事实上这并不正确。如果改变所带来的收益足够大，任何事物都可

以改变，甚至是非常快的改变。但是，相比之下，有些投入可以更容易改变，而且成本较小。对此，一个极端抽象的理解是简单地认为一种要素无论如何都是固定不变的。（政府法律规定投入必须固定在某一水平，如果违背了这一法律，就要遭受很长时间的监禁，有这一法律就足以说明问题了。）如果要素 x_1 的成本发生变化，x_2 的投入水平又不能改变，追求利润最大化的企业将怎样做呢？与以前相比，x_1 的要素需求曲线是更富有弹性，还是更缺乏弹性？

假设 x_2 固定在 $x_2=x_2^0$，则利润函数可以写做：

最大化

$$\pi=pf(x_1,x_2^0)-w_1x_1-w_2x_2^0$$

在这种情况下，只有一个决策变量 x_1。因此，最大化的一阶条件可以简化为：

$$\pi_1=pf_1(x_1,x_2^0)-w_1=0 \tag{4-32}$$

二阶充分条件如下：

$$\pi_{11}=pf_{11}<0 \tag{4-33}$$

下面，将处理含有 4 个参数 w_1,w_2,p,x_2^0 的单变量问题。从(4-32)式可以推出要素需求曲线：

$$x_1=x_1^S(w_1,p,x_2^0) \tag{4-34}$$

其中，x_1^S 代表短期需求。注意，该要素需求曲线并不包含 w_2。由于 x_2 是固定的，因此 $w_2x_2^0$ 是固定成本，因此从短期来看，w_2 与 x_1 的选择无关。短期要素需求曲线的斜率是 $\partial x_1^S/\partial w_1$。要求出该偏导的表达式，可以采用前面的做法，将 x_1^S 代入到(4-32)式，得到下面的恒等式：

$$pf_1(x_1^S,x_2^0)-w_1\equiv 0$$

该恒等式对 w_1 求导，得到：

$$pf_{11}\frac{\partial x_1^S}{\partial w_1}\equiv 1$$

或者：

$$\frac{\partial x_1^S}{\partial w_1}\equiv\frac{1}{pf_{11}}<0 \tag{4-35}$$

因此，短期要素需求函数是向下倾斜的。这个斜率与从(4-20a)推导出来的 $\partial x_1^*/\partial w_1=\partial x_1^L/\partial r^*$（$x_1^L$ 是长期需求）相比，有什么不同呢？考虑两者之差：

$$\frac{\partial x_1^L}{\partial w_1}-\frac{\partial x_1^S}{\partial w_1}=\frac{f_{22}}{p(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)}-\frac{1}{pf_{11}}$$

合并各项，得到：

$$\frac{\partial x_1^L}{\partial w_1}-\frac{\partial x_1^S}{\partial w_1}=\frac{f_{12}^2}{pf_{11}(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)}<0 \tag{4-36}$$

根据二阶条件(4-15)和(4-33)可知，上面的表达式一定为负。$\partial x_1^L/\partial w_1$ 和 $\partial x_1^S/\partial w_1$ 都为负，因此，从(4-36)可知，与 x_2 固定（短期）时相比，在 x_2 变化（长期）时，由于要素 x_1 价格的变

化而导致的 x_1 变化的绝对值更大。这一结论有时也称作需求第二定律。从直觉上考虑也是如此——与资本的价格相比，如果劳动力的价格相对增加，企业将要替换掉一部分劳动力。但是，如果企业不能同时增加资本的使用量，替换劳动力的程度将会减弱。因此，该模型说明，从较长的时期来看，如果另一种要素"失灵"，对于变化成本较小的要素的需求将变得更富有弹性。此外，绘制要素需求图形时通常都将因变量 x_1 放在横轴。在这种情况下，长期的要素需求曲线似乎比短期曲线更平坦。同样要注意，只有当 x_2 的使用水平在两种情况下都一样时，这一比较才有意义。即只有在短期需求曲线和长期需求曲线的交点上，即 x_2 取同样的值时，上面的命题才成立。在距离交点的任何一段有限距离内，长期需求曲线实际上都可能比短期需求曲线更缺乏弹性。

本节的结论被认为只是一个推断，从经验方面来说是正确的。有趣且值得注意的是，这类行为实际上是最大化假设在数学上的阐述。由于热力学系统在类似的趋势之后也会出现同样类型的反应，这类关系有时被称作 Le Chatelier 效应。将这一现象及其关系推广到"包络"定理将在第 7 章中进行讨论。

Le Châtelier 法则的更基本的讨论

如果一种要素的使用量(如 x_2)保持在使利润取得最大值的水平上，会导致该点的短期要素需求曲线比长期要素需求曲线更缺乏弹性，尽管前面已经给出证明，但是并没有深入讨论长期要素需求和短期要素需求之间的基本关系。如果这两个需求函数各自的偏导之间存在一致的关系，那么，联系这两种需求的某一基本恒等式必然存在。

接下来，我们考虑是什么使得短期需求转变为长期需求。可以假设 x_2 随 w_1 的变化会做出调整，而不是固定不变。实际上，令 x_2 随着 w_1 的变化而做出调整，以使利润最大化，这样，就可以用短期要素需求来定义长期要素需求：

$$x_1^*(w_1, w_2, p) \equiv x_1^S(w_1, p, x_2^*(w_1, w_2, p)) \tag{4-37}$$

这一恒等式是短期要素需求和长期要素需求之间的基本关系式。利用这一恒等式，我们可以更清晰地证明并解释 Le Châtelier 结论。(4-37)式的右边通常称作条件需求。[4]

(4-37)式是恒等式，对任意的 w_1, w_2, p 都成立。因此，它可以对任何一个自变量求导。尤其是对 w_1 求导，注意(4-37)的右边，w_1 一次是以显性模式出现，另一次是以 x_2^* 的自变量形式出现：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} \equiv \frac{\partial x_1^S}{\partial w_1} + \left(\frac{\partial x_1^S}{\partial x_2^0}\right)\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\right) \tag{4-38}$$

仔细看一下(4-38)右边链式法则部分的表达式：x_1^S 是 x_2^0(而非 x_2^*)的函数；x_2 对 w_2 的函数

4　这一方法最初是由 Robert Pollak 发展起来的，用于消费者需求的情形。参见他的文章"Conditional Demand Functions and Consumption Theory", *Quarterly Journal of Economics*, 83: 60-78, February 1969。

依赖关系是由长期需求 x_2^* 所定义的。

从(4-38)式可知，短期要素需求函数和长期要素需求函数的斜率不同，它们之间的差别在于两个效应的乘积：w_1 的变化所引起 x_2 的变化，x_2(参量)的变化可能导致的 x_1 的变化。可以将这一乘积简单地看做是由于 x_2 随 w_1 的变化而变化时对 x_1 的边际影响。一个重要的问题是，后面一项的正负号能够确定吗？

$\partial x_1^S/\partial x_2^0$ 和 $\partial x_2^*/\partial w_1$ 的符号看似相反。由交互性可知，$\partial x_2^*/\partial w_1=\partial x_1^*/\partial w_2$。$w_2$ 的减少与 x_2^0 的增加会导致同样的结果。我们可以从数学上对此进行区别，如下所示。(4-37)对 w_2 求导，得到：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}\equiv\left(\frac{\partial x_1^S}{\partial x_2^0}\right)\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial w_2}\right) \tag{4-39}$$

由于 $\partial x_2^*/\partial w_2<0$，因此，$\partial x_1^*/\partial w_2$ 和 $\partial x_1^S/\partial x_2^0$ 的符号相反。用(4-39)式替代(4-38)式中的 $\partial x_1^S/\partial x_2^0$，并利用交互性，得到：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}\equiv\frac{\partial x_1^S}{\partial w_1}+\frac{(\partial x_2^*/\partial w_1)^2}{\partial x_2^*/\partial w_2} \tag{4-40}$$

由于最后一项一定为负，从(4-40)式可知，$\partial x_1^*/\partial w_1$ 所取的负值比 $\partial x_1^S/\partial w_1$ 更小，即 Le Châtelier 的结论。更重要的是，这一结论揭示了长期要素需求函数和短期要素需求函数之间的基本关系。

类似地可以证明长期供给函数比短期供给函数更富有弹性。基本恒等式如下：

$$y^*(w_1,w_2,p)\equiv y^S(w_1,p,x_2^*(w_1,w_2,p)) \tag{4-41}$$

上式对 p 求导：

$$\frac{\partial y^*}{\partial p}\equiv\frac{\partial y^S}{\partial p}+\left(\frac{\partial y^S}{\partial x_2^0}\right)\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p}\right) \tag{4-42}$$

(4-41)对 w_2 求导，并利用交互性条件，可以证明 $\partial y^*/\partial p>\partial y^S/\partial p$。证明留作练习。

这种方法将贯穿于本书始终。利用这种方法，原来非常难以证明的许多表达式都明显地变得简单了。

总结：尽管模型中包含的信息非常少，对于一些边际量要举出一些可证伪的命题还是有可能的。如果利用更多的信息，如生产函数的特殊形式，或更小的一些方面，交叉影响 f_{12} 符号的单独测量，我们就可以对要素需求函数偏导的符号施加更多的限制。

习题

1. 有关产品价格的变化对要素投入的影响，举不出可证伪的推论，请加以证明，并证明在产品价格上升时，不可能出现两种要素的使用量同时下降的情况。
2. 证明产出变化对要素价格的比率等于该种要素使用量的变化对产品价格变化的比率的相反数，即证明(4-27)式。

3. (很难以应付，但在你的一生中或许要做一次这件事情。)生产函数是 $y=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$，求出要素需求曲线，对根据该生产函数进行生产而且追求利润最大化的企业进行比较静态分析，可以先回顾 4.2 节的问题 3。证明对该企业而言，交叉效应项$\partial x_2^*/\partial w_1$ 的符号为负。

4. 关于互补要素和替代要素，文献中有若干种定义，包括：

   (i) "随着要素 2 的增加，要素 1 的边际产出下降(增加)，则称要素 1 是要素 2 的替代品(互补品)。"

   (ii) "当要素 2 的价格上升(下降)时，要素 1 的使用量增加，则称要素 1 是要素 2 的替代品(互补品)。"

   (a) 证明这两种定义是对称的，即如果要素 1 是要素 2 的替代品，则要素 2 不可能是要素 1 的互补品。

   (b) 证明这两种定义在两要素的利润最大化模型中是等价的。

   (c) 对于含有三要素或更多要素的模型，你认为这两种定义是等价的吗？为什么？

5. 重新考虑 4.2 节的例 3，即一个垄断者在两个单独的市场上销售他(她)的产品。假设在市场 1 中，每销售一个单位的产品要征税 t。

   (a) 证明 t 增加将会使得市场 1 中销售的产品量降低。

   (b) 有关 t 增加对市场 2 中产品的影响，最大化的假设意味着什么？

   (c) 即使假设二阶充分条件总是成立的，市场 1 中税收的增加也可能导致总产出 $x^*(t)=x_1^*(t)+x_2^*(t)$的增加，请证明。在什么情况下(从边际成本函数和边际收入函数的斜率进行考虑)会是这样的？(这种可能的情况称为 Hotelling taxation paradox，因为是由 Harold Hotelling 首先发现的，他是现代经济学和统计学的一位先驱。)

   (d) 假设根据政府法律，市场 2 的产出固定在前面所述的利润最大化的水平上。与不加管理的情况相比，在受到政府管制的情况下，市场 1 中的产出对税收增加的反应在绝对量上较小，请加以证明，并对此进行直观的解释。

6. 无论两种要素是互补品，还是替代品，4.4 节(也是习题 5)中的 Le Châtelier 结论都成立。针对互补要素的情况，直观地解释这一现象。

7. 垄断者在两个市场中销售其产品，收入函数分别是 $R_1(y_1)$和 $R_2(y_2)$。总成本是总产出 $y=y_1+y_2$ 的函数。在两个市场中，每销售一个单位的产品，要征收同样的税款 t。

   (a) 求解$\partial y_1^*/\partial t$，$\partial y_2^*/\partial t$ 和$\partial y^*/\partial t$，其中 y_i^* 是市场 i 达到利润最大化时的产出水平，且 $y^*=y_1^*+y_2^*$。如果有解的话，利润最大化隐含了哪些偏导的符号取值？

   (b) 假设产出 y_2 固定不变。求解$(\mathrm{d}y_1^*/\mathrm{d}t)_{y_2}$，能够确定该式的符号吗？

8. 考虑下面两个模型，它们对市场征税，将垄断者区别对待：

   (i) $\max R_1(x_1)+R_2(x_2)-C(x_1+x_2)-tx_1$

   (ii) $\max R(x_1,x_2)-C(x_1+x_2)-tx_1$

   模型(i)中，成本只是总产出的函数，而模型(ii)中，成本和收入是两个产出的函数，更加复杂(也更一般)。税率 t 是一个参数。这两个模型之间有什么显著的相同点和不同点？

9. 考虑一家追求利润最大化的企业，其生产函数是 $y=f(x_1,x_2)$，产品价格是 p，要素价格分别是 w_1,w_2。假设企业根据要素 2 的总成本来纳税，即税收$=tw_2x_2$。

   (a) 推导要素需求函数，即说明这些函数是从哪里推导出来的等。对其中的每一个变量，这些函数是几次齐次的？

   (b) 证明如果税率上升，企业对要素 2 的使用量减少。

   (c) 证明$\partial x_1^*/\partial t=w_2\partial x_2^*/\partial w_1$。

(d) 假设要素 1 保持在利润最大化时的水平。证明要素 2 对税率变化的反应在绝对量上比以前小。

10. 考虑一家垄断企业，它在竞争性的要素市场上分别以价格 w_1, w_2 购买两种投入 x_1, x_2。企业的收入函数可以表示成投入的形式 $R(x_1, x_2)$。假设企业追求利润最大化。

(a) 推导要素需求函数，它们是工资的某次齐次函数吗？

(b) 证明要素需求函数对其自身价格的曲线是向下倾斜的。

(c) 随着要素价格的变化，企业的总收入将如何变化，存在可证伪的假设吗？

11. 考虑一家追求利润最大化的美国垄断企业，它在两个不同的工厂生产某一产品，(总)成本函数分别是 $C_1(y_1), C_2(y_2)$。这个企业的总收入函数是 $R(y)$，其中 $y = y_1 + y_2$。工厂 2 位于加拿大，其产出取决于美国的关税，即对单位产品征收的税额 t。

(a) 如果有，该模型中隐含的边际收入曲线和边际成本曲线的斜率如何？

(b) 如果有，存在什么可证伪的比较静态含义？

(c) 假设该企业不是垄断者，而是在竞争市场上以价格 p 销售其全部产品。在竞争的情况下和垄断的情况下，该模型的含义有什么显著的不同？

(d) 假设在竞争性市场上，产品的价格上升。每个工厂的产出都会增加吗？

(e) 现在回到垄断的情况，假设该垄断者决定对消费者提高价格。这将对每个工厂的产出产生什么影响？这有什么意义吗？

(f) 假设该(垄断)企业的总收入以某种复杂的方式取决于两个工厂的产出，而非简单地取决于这两个产出的总和。如果有，假设的这一变化隐含了什么明显的差异吗？

(g) 假设美国工厂的产出(y_1)固定在前面讨论的利润最大化的水平上，且对加拿大的税收增加。与美国的产出不受限制相比，在这种情况下，加拿大工厂的产出数量如何变化？(同样，假定是在垄断的情况下。)

12. 利用(4-42)式证明，与一种要素固定在以前利润最大化时的水平相比，竞争性企业的长期供给曲线更富有弹性。

13. 考虑一家追求利润最大化的企业，其生产函数是 $y = f(x_1, x_2)$，以竞争价格 p 销售其产品。企业以竞争后确定下来的单价 w_1 来购买要素 x_1，但是企业面临着向上倾斜的供给函数 x_2，它是由 $w_2 = w_2^0 + kx_2$ 来确定的，其中参数 w_1, w_2^0, p, k 都取正值。

(a) 推导一阶条件和二阶(充分)条件，并对该模型所隐含的显性选择函数的推导过程加以解释。描绘每一选择函数的特征，它们是需求函数，还是供给函数，还是两者都不是，请加以解释。每一要素是否都隐含了"边际产出递减规律"？

(b) 推导参数 w_1 的比较静态结果。如果有，存在什么可证伪的含义吗？

(c) 如果 w_2 增加，企业将使用多少 x_2？

(d) 对于某个参数或者所有的参数，显性选择方程是某次齐次的吗？证明它们要么都是，要么都不是。如果有，要素需求函数或类似推导出来的其他函数，它们与生产函数的齐次性有什么关系吗？

(e) 推导 w_2^0 的比较静态结果，指出其中存在可证伪的含义，并证明包含变量 w_2^0 和 w_1 的交互结论。

(f) 现在，假设该企业是产品市场的垄断者，它面临的需求曲线是 $p = p(y)$，总收入是 $R(x_1, x_2) = p(y)f(x_1, x_2)$。对于要素价格的变化，在该垄断模型和前面竞争性产品市场上利润最大化的模型中，企业的反应有什么显著的差别吗？

(g) 回到竞争性产品市场的模型中来，假设 x_1 固定在前面利润最大化时的水平。证明"短期"选择函

数 $x_1, x_1^S(w_1, p, x_2^0)$ 是如何推导出来的，并证明它对 w_1 是向下倾斜的。

(h) 定义该企业的长期供给函数和短期需求函数分别是 $y^*(w_1, w_2^0, p, k)$ 和 $y^S(w_1, p, x_2^0)$。证明这些供给函数是如何推导出来的，并直观地解释下面的恒等式：

$$y^*(w_1, w_2^0, p, k) \equiv y^S(w_1, p, x_2^*(w_1, w_2^0, p, k))$$

利用这一结果证明长期供给函数比短期供给函数更富有弹性。

14. 考虑一家追求利润最大化的企业，它使用一种投入 x，生产出两种产品 y_1, y_2，它们符合生产边界 $f(y_1, y_2) = x$。企业分别以价格 p_1, p_2 销售这两种产品，并以价格 w 购买要素 x。企业以市场竞争决定的单价 w 购买要素 x，并在竞争性市场上以价格 p_2 销售产品 y_2。但是，企业面临着向下倾斜的需求曲线 y_1, y_1 是由 $p_1 = p_1^0 - ky_1$ 确定，其中 p_1^0, p_2, w, k 都是取值为正的参数。

(a) 推导一阶条件和二阶(充分)条件，并对该模型所隐含的显性选择函数的推导加以解释。描绘每一选择函数的特征，它们是需求函数，还是供给函数，还是两者都不是，请加以解释。

(b) 推导参数 p_2 的比较静态结果。如果有，存在什么可证伪的含义吗?

(c) 对于某个参数或者所有的参数，显性选择方程是某次齐次的吗? 请加以解释。如果是，推导出这些函数的弹性关系式。如果有，显性选择方程的齐次性与生产函数的齐次性有什么关系吗?

(d) 推导参数 p_1^0 的比较静态关系式，并解释这些结果。存在什么可证伪的含义吗?

(e) 如果 p_1 增加，企业将使用多少 y_1?

(f) 推导含有参数 p_1^0 和 p_2 的"交互"结论。

(g) 现在，假设该企业是要素市场的垄断者，即如果企业多购买 x，就要抬高 w 的价格。假设企业面临的需求曲线是 $w = w(x)$，总成本是 $C(y_1, y_2) = w(f(x_1, x_2))f(x_1, x_2)$。对于产品价格的变化，在该模型和前面竞争性要素市场上利润最大化的模型中，企业的反应有什么显著的差别吗?

(h) 回到竞争性要素市场的模型中来，假设 y_1 固定在前面利润最大化时的水平，用 y_1^0 来表示。证明"短期"选择函数 $y_2, y_2^S(p_2, w, y_1^0)$ 的是如何推导出来的，并证明它对 p_2 是向上倾斜的。

(i) 直观地解释下面的恒等式：

$$y_2^*(p_1^0, p_2, w, k) \equiv y_2^S(p_2, w, y_1^*(p_1^0, p_2, w, k))$$

利用这一结果证明长期需求函数 y_2 比短期供给函数更富有弹性。

4.7　对有限变化的分析：补充几句

要素需求曲线向下的斜率可以不使用计算器，而只需简单的代数运算就可以推导出来。假设在某一要素价格向量 (w_1^0, w_2^0) 下，使得利润最大化的投入向量是 (x_1^0, x_2^0)。这意味着要素价格为 (w_1^0, w_2^0) 时，其它任何一个投入水平 (x_1^1, x_2^1) 的利润都没有这么高。用代数式可以表示为：

$$pf(x_1^0, x_2^0) - w_1^0 x_1^0 - w_2^0 x_2^0 \geqslant pf(x_1^1, x_2^1) - w_1^0 x_1^1 - w_2^0 x_2^1$$

但是，一定存在某一个要素价格向量 (w_1^1, w_2^1)，在这一向量下，投入水平 (x_1^1, x_2^1) 可以使得利润最大化。既然在 (w_1^1, w_2^1) 下，(x_1^1, x_2^1) 使得利润最大化，因此其他任何一个投入水平，即使是 (x_1^0, x_2^0) 也不能使利润取最大值。因此：

$$pf(x_1^1,x_2^1)-w_1^1x_1^1-w_2^1x_2^1\geqslant pf(x_1^0,x_2^0)-w_1^1x_1^0-w_2^1x_2^0$$

将这两个不等式相加，有关生产函数的各项都被抵消，只剩下（两边都乘以－1）：

$$w_1^0x_1^0+w_2^0x_2^0+w_1^1x_1^1+w_2^1x_2^1\leqslant w_1^0x_1^1+w_2^0x_2^1+w_1^1x_1^0+w_2^1x_2^0$$

将右边各项都移到左边，并提出公因子 w_i，得到：

$$w_1^0(x_1^0-x_1^1)+w_2^0(x_2^0-x_2^1)+w_1^1(x_1^1-x_1^0)+w_2^1(x_2^1-x_2^0)\leqslant 0$$

上式可以再提出公因子$(x_1^0-x_1^1)$及其他项（注意，$x_1^0-x_1^1=-(x_1^1-x_1^0)$），得到：

$$(w_1^0-w_1^1)(x_1^0-x_1^1)+(w_2^0-w_2^1)(x_2^0-x_2^1)\leqslant 0 \tag{4-43}$$

现在假设只有一种要素价格发生变化，如 w_1。则(4-43)式变为：

$$(w_1^0-w_1^1)(x_1^0-x_1^1)\leqslant 0$$

或者

$$(\Delta w_1)(\Delta x_1)\leqslant 0 \tag{4-44}$$

从(4-44)式可知，要素价格的变化会导致要素使用量向相反的方向变化，即需求定律在这些要素中的应用。注意，如果利润最大化的点是惟一的，则可以将弱不等式替换为严格的不等式。

这一代数式是显示性偏好理论的基础，这将在后面讨论。奇怪的是，这一分析不能用于证明需求第二法则，即使得更多的要素改变时，（要素）需求将更富有弹性。前面的分析利用了有限变化，结果不足以分析 Le Châtelier 效应，即需求第二法则。

附录

含有几个变量的函数的泰勒级数

在第 2 章中，我们指出有时可以把含有一个变量的函数表示成无穷幂级数的形式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\cdots \tag{4A-1}$$

但通常也可以将函数表示成有限项幂级数的形式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^n(x^*)(x-x_0)^n}{n!} \tag{4A-2}$$

其中，x^* 位于 x_0 和 x 之间，即，$x^*=x_0+\theta(x-x_0)$，其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$。这些公式可以用来推导函数 $y=f(x)$最大化（最小化）的充分必要条件。

下面首先将这些公式推广到两个自变量的情形，即 $y=f(x_1,x_2)$，可以使用类似于前面推导最大化条件的方法。考虑 $f(x_1,x_2)$在某点 $x^0=(x_1^0,x_2^0)$的取值，即 $f(x_1^0,x_2^0)$。现在考虑另一个点$(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)$，可以认为 $h_1=\Delta x_1$，$h_2=\Delta x_2$。令：

$$y(t)=f(x_1^0+h_1t,x_2^0+h_2t) \tag{4A-3}$$

$t=0$ 时，$f(x_1,x_2)=f(x_1^0,x_2^0)$；$t=1$ 时，$f(x_1,x_2)=f(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)$。如果 h_1,h_2 可以取任意值，可以找到 x_1x_2 平面内的任何点。因此，可以在 $t=0$ 点附近写出 $y(t)$的泰勒级数，从而推导出 $y=f(x_1,x_2)$的泰勒级数。用有限项之和的形式表示为：

$$y(t)=y(0)+y'(0)t+\frac{y''(0)t^2}{2!}+\cdots+\frac{y^{(m)}(t^*)t^m}{m!} \tag{4A-4}$$

其中，$0\leqslant|t^*|\leqslant|t|$。令 $t=1$，得到：

$$\begin{aligned}
y(1)&=f(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)\\
y(0)&=f(x_1^0,x_2^0)\\
y'(0)&=f_1(x_1^0,x_2^0)h_1+f_2(x_1^0,x_2^0)h_2\\
y''(0)&=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}f_{ij}(x_1^0,x_2^0)h_ih_j\\
&\vdots
\end{aligned}$$

因此，(4A-4)式可以写做：

$$f(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)=f(x_1^0,x_2^0)+\sum f_ih_i+\frac{\sum\sum f_{ij}h_ih_j}{2!}+\cdots+\frac{\sum\cdots\sum f_{ij}\cdots(x_1^*,x_2^*)h_ih_j\cdots}{m!} \tag{4A-5}$$

其中，最后一项是 m 阶偏导乘以 m 个 h_i 乘积的 m 次和。最后一项取值的点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ 是位于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}^0$ 之间的某一个 x^*，即：

$$x_i^*=x_i^0+\theta(x_i-x_i^0)\quad i=1,2 \tag{4A-6}$$

其中，$0\leqslant\theta\leqslant1$。公式(4A-5)可以推广到含有 n 个变量的函数的一般形式，只是将 1 到 n 的总和替换掉 1 到 2 的和。

凹性和最大值条件

1. 一阶必要条件。认为(4A-5)中的最后一项是线性的，可以推导出 $y=f(x_1,x_2)$ 在 x_1^0,x_2^0 取最大值的一阶必要条件。在这种情况下，对 $f(x_1,x_2)$ 应用平均值定理，得到：

$$f(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-f(x_1^0,x_2^0)=f_1(\boldsymbol{x}^*)h_1+f_2(\boldsymbol{x}^*)h_2 \tag{4A-7}$$

如果 $f(x_1,x_2)$ 有最大值 $f(x_1^0,x_2^0)$，则(4A-7)式的左边对 h_1,h_2 的所有取值(两个都取 0 除外)都必然是非正的(如果有惟一的最大值，必然为负)。先令 $h_2=0$，可得：

$$f(x_1^*,x_2^*)\leqslant0\quad h_1>0$$

以及：

$$f(x_1^*,x_2^*)\geqslant0\quad h_1<0$$

只有当 $f_1(x_1^0,x_2^0)=0$ 时才成立(如果 f_1 连续)。同样，我们可以推导出 $f_2=0$。这一过程可以推广到含有 n 个变量的显函数的情形。

2. 二阶条件：凹性。如果 $f(x_1,x_2)$ 在稳定点是凹函数，则 $f(x_1,x_2)$ 在该点取最大值。在第 2 章讨论含有一个变量的函数时，曾定义了含有两个(n 个)变量的凹函数。如果函数 $f(x_1,x_2)$ 位于连接任意两点的线段的上方(或位于线段上)，则称该函数是凹的。

如果 $x^0(x_1^0,x_2^0)$和 $x^1(x_1^1,x_2^1)$是位于 x_1x_2 平面上的任意两点，$x^t=tx^0+(1-t)x^1(0\leqslant t\leqslant 1)$代表连接 x^0 和 x^1 的直线上的所有点。那么，$f(x_1,x_2)$对任意 x^0 和 x^1 都是凹函数，用代数式表示为：

$$f(tx^0+(1-t)x^1)\geqslant tf(x^0)+(1-t)f(x^1)\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

如果取严格的不等号($0<t<1$)，这意味着不存在"平面"部分，称函数为严格凹。将不等式的符号反写，可以类似定义凸函数和严格凸的函数。这些定义可以直接推广到含有 n 个变量的函数，只需简单地令 x^0 和 x^1 代表 n 维空间里的向量。

对于可微的函数，凹函数位于切平面的下方(或位于切平面上)。令：

$$y(t)=f(x_1^0+h_1t,x_2^0+h_2t) \tag{4A-3}$$

回顾第 2 章中的式子(2-14)，同前面一样，严格凹意味着对所有非零的 h_1,h_2 都有：

$$y(t)-y(0)-y'(0)t<0 \tag{4A-8}$$

将 $t=1,x_i=x_i^0+h_i,i=1,2$ 代入到(4A-8)中，得到：

$$f(x_1,x_2)-f(x_1^0,x_2^0)-f_1(x_1^0,x_2^0)h_1-f_2(x_1^0,x_2^0)h_2<0 \tag{4A-9}$$

将泰勒级数的扩展式(4A-5)代入到二阶项中，并简单整理得到：

$$f(x_1,x_2)-f(x_1^0,x_2^0)-f_1(x_1^0,x_2^0)h_1-f_2(x_1^0,x_2^0)h_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}f_{ij}(x_1^*,x_2^*)h_ih_j \tag{4A-10}$$

从(4A-9)可知，对所有非零的 h_1,h_2(即两个不同时为零)：

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}f_{ij}(x_1^*,x_2^*)h_ih_j<0 \tag{4A-11}$$

因此，严格凹意味着(4A-11)。如果 h_i 越来越小，则 $f_{ij}(x_1^*,x_2^*)$收敛于 $f_{ij}(x_1^0,x_2^0)$。可以证明，x_1^0,x_2^0 点处的凹性意味着所有的 h_1,h_2：

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}f_{ij}(x_1^0,x_2^0)h_ih_j\leqslant 0 \tag{4A-12}$$

但是，这一表达式在(x_1^0,x_2^0)处并不是严格的负。如果这一两次和严格取值，则 $f(x_1,x_2)$必定是严格凹。类似的结论对凸函数也成立。

如果 $f(x_1,x_2)$在(x_1^0,x_2^0)处存在极值，则该点处 $f_1=f_2=0$。(4A-10)式揭示了二阶偏导是如何同最大值和最小值联系起来的。同样，所有这些结果都可以推广到含有 n 个变量的函数，只需在(4A-5)式、(4A-9)式、(4A-10)式中，用从 1 到 n 的和替换从 1 到 2 的和。

部分参考文献

Allen, R. G. D.: *Mathematical Analysis for Economists*, Macmillan & Co., Ltd., London, 1938. Reprinted by St. Martin's Press, Inc., New York, 1967.

Apostol, T.: *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc. Reading, MA, 1957. A standard reference. Advanced.

Courant, R.: *Differential and Integral Calculus*, 2d ed., vol. 1 and 2, Interscience Publishers, Inc., New York, 1936.

Hancock, H.: *Theory of Maxima and Minima*. Ginn and Company, Boston, 1917. Reprinted by Dover Publications, Inc., New York, 1960. Difficult.

Panik, M. J.: *Classical Optimization: Foundations and Extensions*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976.

Samuelson, P. A.: *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947. The seminal work on comparative statics methodology.

第 5 章　矩阵和行列式

5.1　矩阵

大部分的经济模型中都包含着多个同时发生作用的变量。我们在前面已经知道，对于投入两种产品的企业要使其利润最大化需解一个联立线性方程组。而对于一个含 n 个变量的模型而言，则需解一个包含 n 个方程的线性方程组。在本章中，我们先要简单的学习一下关于这种线性方程组的代数。然后，我们再阐述如何用它来简化经济模型。

我们先从解含两个未知数两个方程的线性方程谈起，考虑如下公式：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2 \end{aligned} \tag{5-1}$$

上面式子中系数的双下标记号可清晰地区别各个数字。元素 a_{ij} 的位置在第 i 行(水平)系 j 列(垂直)，这里，i 和 j 取值 1 或 2。但总体上看，i 和 j 可以在 1 至 n 的范围内取值。

用一个简单的表示方法来表示式(5-1)，即：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2 \end{bmatrix} \tag{5-2}$$

这种表示方法叫矩阵表示法，矩形的数字方式叫矩阵。总之，含 n 个未知数的 m 个方程的联立形式：

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ &\cdots\cdots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{aligned} \tag{5-3}$$

可写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{bmatrix} \tag{5-4}$$

式(5-4)是式(5-3)的另一种表示方法。式(5-4)利用了两个矩阵的乘法——式左边是一个 $m\times n$(m 行 n 列)矩阵和一个 $n\times 1$ 矩阵相乘，得到式右边的一个 $m\times 1$ 矩阵。对于式(5-3)右边的任意一系数 b_i，有：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, \cdots, m \tag{5-5}$$

b_i 是由处于第 i 行的元素 a_{ij} 与 x_j 逐个相乘后相加得到的，这也就定义了矩阵的乘法。考虑如下矩阵的“积”：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mr} \end{bmatrix} \tag{5-6}$$

上式简写为：

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$$

其中，对于 $\boldsymbol{C}$ 阵元素 c_{ij} 有：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = c_{ij} \quad i = 1, \cdots, r \tag{5-7}$$

也就是说，位于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的 i 行 j 列处的元素 c_{ij} 是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 j 列元素逐项相乘后再相加得到的。这个定义只在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数时才有效，否则毫无意义。

例 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

这里，一个 2×3 矩阵和一个 3×2 矩阵相乘，得到的是一个 2×2 矩阵。

例 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

只有一列的矩阵叫做列矩阵，或列向量，只有一行的矩阵叫做行矩阵或行向量。

例 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix}$$

应注意到的是，矩阵左乘或矩阵右乘会得到不同的矩阵。

对于两个向量：

$$\boldsymbol{a}=(a_1, \cdots, a_n)$$
$$\boldsymbol{b}=(b_1, \cdots, b_n)$$

积 $\boldsymbol{ab}$（有时又叫点积或内积，又可写作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$），被定义为：

$$\boldsymbol{ab} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

这里的矩阵 AB 可被看成行向量 A 与列向量 B 的乘积。

5.2 行列式，克莱姆法则

我们回头再来讨论含两个未知数、两个方程的联立式(5-1)：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2 \end{aligned} \tag{5-1}$$

下面，我们来求 x_1。首先将上面的式子两边同乘 a_{22}，下面的式子两边同乘 a_{12} 后相减，得：

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

若：

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

则有：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{5-8}$$

类似地，可求出 x_2，有：

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

若：

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

则有：

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{5-9}$$

下面，我们来定义 2×2 行列式，2×2 方阵的行列式可写成

$$D_2=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc \tag{5-10}$$

由式(5-10)，式(5-8)和式(5-9)可改写成：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}} \qquad x_1=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}$$

注意到作为分母的行列式是系数矩阵(a_{ij})的行列式。在解 x_1 时，分子行列式$|a_{ij}|$的第 1 列被 b_i 代替，而在解 x_2 时，作为分子的行列式$|a_{ij}|$的第 2 列被 b_i 代替。这个公式被称作克莱姆法则。这个法则可以应用到 n 个变量的情况中。

还应注意的是，当且仅当：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程的解存在。这表示什么意思呢？式(5-1)表示的是平面 x_1x_2 中的两条直线。若这两条直线平行，则方程无解，若这两条直线重合，则方程有无穷多解(重合线上的所有点都是解)。

这两条线如果斜率相同，则它们平行，解方程(5-1)中未知数 x_2，还可以得到：

$$x_2=-\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1+\frac{b_1}{a_{12}}$$

$$x_2=-\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1+\frac{b_2}{a_{22}}$$

若两条直线平行，则有：

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

或

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$$

因而，当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，两直线或是平行或是重合，解不存在。

下面再考虑含 3 个未知数 3 个方程的矩阵表达式：

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}\tag{5-11}$$

定义 3 阶行列式：

$$\begin{aligned}D_3&=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ &=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\end{aligned}\tag{5-12}$$

3 阶行列式的值可由几个 3 阶行列式确定。式(5-12)的三项中与 a_{11} 相乘的行列式是由行列式 D_3 消去第一行与第一列得来，与 a_{12} 相乘的行列式是由行列式 D_3 消去第一行与第二列得来(显然就是 a_{12} 占据着的那一行与那一列)；最后一项也如此。

我们将去除第 i 行第 j 列之后的行列式称作元素 a_{ij} 的余子式。

在上面的行列式 D_3 中，第一行的元素各自乘以自己的余子式。

定义 a_{ij} 的代数余子式，写作 A_{ij}，它是由 $(-1)^{i+j}$ 与 a_{ij} 的余子式相乘得到的，D_3 可以被表示为：

$$D_3=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\tag{5-13}$$

展开得：

$$D_3 = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{5-14}$$

在每项中，3 个相乘的元素都来自不同的行与列，没有重复的。（如果你是一个象棋手，那么上述各项的元素排列就好比将你手中的 3 个车放置在 3×3 规格的棋盘中，而每个车都吃不了对方。）

式(5-14)还可写成：

$$D_3 = -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \tag{5-15}$$

这样的分解因式法可以认为是将 D_3 按第 2 列展开。

$$D_3 = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \tag{5-16}$$

注意，A_{12} 和 A_{32} 都隐含负号，因为 $(-1)^{1+2} = (-1)^{3+2} = -1$，这不表示 A_{12} 和 A_{32} 一定为负数，它只表示 A_{12} 和 A_{32} 的余子式都要乘以 -1。

由上，D_3 可以被表示成：

$$D_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \tag{5-17}$$

这就很好地说明了无论将行列式 D_3 按任意 i 行展开或是按任意的 j 列展开，所得到的最终结果都是一样的，而且这个结果满足式(5-17)。

高阶行列式都可以由低阶行列式表示：

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

在上式中，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，也就是说，它为 $(-1)^{i+j}$ 乘以 D_4 去除了 i 行 j 列之后余下元素所构成的行列式之乘积。它的原理同式(5-17)，在此不做证明。

定理 1 设 D_n 为对应方阵 $A = (a_{ij})$ 的 n 阶行列式，则：

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{5-18}$$

这里 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。这是行列式最基本的性质。

定理 2 若行列式中的任何一行（或列）中所有元素值都为 0，则 $D_n = 0$。

证明：按这一行（或列）展开行列式，其各项都为 0，其和也为 0。

定理 3 互换行列式中的两行（或列）所得到的新的行列式 $D'_n = -D_n$。

这里不给出严格的证明，但可以给出某些解释。很清楚，D'_n 中的各项还是 D_n 中的那些项，而二者的区别在于 $(-1)^{i+j}$ 有所变化。若第 1 行与第 2 行对对调得 D'_n，按第 2 行展开 D_n，则 $(-1)^{1+j}$ 就应变成 $(-1)^{2+j}$，因此 D_n 的符号就变了。若第 1 行与第 3 行对调，我们则可分 3 步对此过程进行讨论：先对调 1 行和 2 行，再对调 3 行和 1 行，最后对调 3 行和 2 行。总共调换了奇数次，D_n 的符号依旧会产生变化。

定理 4　若将 D_n 的某行(或列)中元素同时乘常数 k 得到新行列式 D'_n，则有 $D'_n=kD_n$。

证明：将新行列式 D'_n 按此行(或列)展开，得到的各项比原来各项都扩大了 k 倍，其结果因而也扩大了 k 倍。

定理 5　若 D_n 中有任意相同的两行(或列)，则 $D_n=0$。

证明：交换这相同的两行或列得到新行列式 D'_n，而 D'_n 应等于 $-D_n$，于是有 $D'_n=D_n=0$。

推论：如果行列式中有一行与另一行成比例，则 $D_n=0$。

定理 6　若行列式中第 k 行(列)的元素可以表示为两项相加，即 $a_{kj}=b_{kj}+c_{kj}$，D'_n 表示用元素 b_{kj} 代替 a_{kj} 得到的新行列式，D''_n 表示用元素 c_{kj} 代替 a_{kj} 得到的新行列式，则 $D_n=D'_n+D''_n$。

证明：展开 D_n：

$$D_n=(b_{k1}+c_{k1})A_{k1}+\cdots+(b_{kn}+c_{kn})A_{kn}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}b_{kj}A_{kj}+\sum_{j=1}^{n}c_{kj}A_{kj}=D'_n+D''_n$$

定理 7　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数，然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变。

证明：考虑如下 3 阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

将第 1 行中的元素乘以常数 k 后加到第 2 行中，得到新行列式 D'_3

$$D'_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+ka_{11}&a_{22}+ka_{12}&a_{23}+ka_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

由定理 6 有：

$$D'_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

由定理 5 有：

$$k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=0$$

则 $D'_3=D_3$。

定理 8　行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素代数余子式乘积之和等于零，即：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,i\neq j$$

证明：上式相当于展开一个有两个行相同的行列式。再考虑前面的3阶行列式，先假设定理8成立，则应有：

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0$$

它是如下行列式的展开式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

我们可以很明显地看出上面的行列式中包含相同的两行，因而其值为0。

定理9 （克莱姆法则）对于线性方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

来说，如果它的系数矩阵 A 有：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组存在惟一解：

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

其中 $A_i(i=1,2,\cdots n)$ 是把 A 中第 i 列的元素用 $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 代替得到的新矩阵。

比如说：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

证明：我们还是以 3 阶行列式为例，考虑如下的线性方程组：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3 \end{aligned} \tag{5-19}$$

通常情况下解这个线性方程组是通过各个方程乘以某常数之后再相加，最后得到单个变量的值。

我们现在先来解 x，将第一个方程乘以 A_{11}，将第 2 和第 3 个方程分别乘以 A_{21} 和 A_{31}；再把这 3 个方程相加，合并同类项，得到如下形式：

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{31}A_{31})x_2+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+\\ &a_{33}A_{31})x_3\\ &\quad=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31} \end{aligned} \tag{5-20}$$

由以上学过的定理，可以证明：

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=|A|$$

而：

$$\begin{aligned} a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}&=0\\ a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}&=0 \end{aligned}$$

所以(5-20)可简化为：

$$|A|x_1=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}$$

所以，若$|A|\neq 0$ 则有：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{|A|} \tag{5-21}$$

按求解 x_1 的方法，还可类推出 x_2、x_3 的值，

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}}{|A|}$$

5.3 隐函数理论

我们曾举出一些求解一阶隐函数的例子，如将隐函数：

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \alpha) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \alpha) &= 0 \end{aligned} \tag{5-22}$$

表示成显函数的形式：

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^*(\alpha) \\ x_2 &= x_2^*(\alpha) \end{aligned} \tag{5-23}$$

其中，x_1，x_2 是所考虑的变量，α 为模型的参数。

在什么样的充分条件下可以将式(5-21)的隐函数表示成(5-22)的显函数形式，被称为隐函数定理。应当注意到通常会遇到"伪定理"。"伪定理"认为 n 个方程、n 个未知数有惟一解。这个命题仅仅对线性方程组其系数行列式不为 0 时才成立。图 5-1a，5-1b 以及 5-1c 说明了为什么该定理不能应用在非线性函数中。

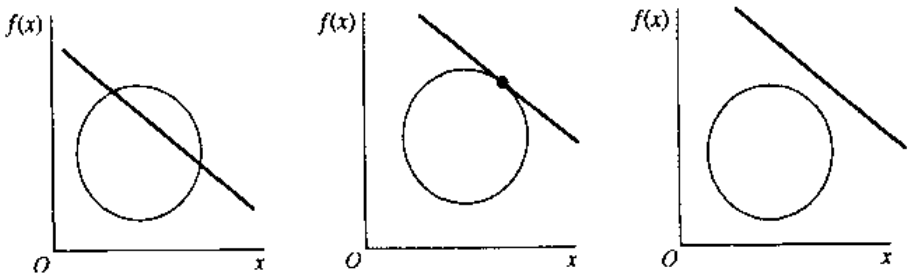

图 5-1 *n* 个方程 *n* 个未知数有多少个解在一般的非线性函数情况下不能确定。

隐函数定理论及的范围比上面的伪定理的范围小。假如式(5-22)在某点(x_1^0, x_2^0, α^0)有惟一联立解，那么在什么条件下隐函数式(5-22)可被写成显函数形式(5-23)？

要回答这个问题，我们先要考虑 1 个方程 2 个未知数的情况。例如由式(5-22)表示的单位圆：

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{5-24}$$

如果要将此式表示为显函数的形式 $y = f(x)$，则需在圆上任何一点周围，对应于任意 x 都有惟一的解 y。虽然，式(5-24)可被写成：

$$y = \pm(1 - x^2)^{1/2}$$

但这样的写法并不是严格的方程的写法，它也不能表示一个方程；对于任意一个 x，存在两个 y 值，而不是一个 y 值。在圆周上 A 点处$(x = 1/\sqrt{2}, y = 1/\sqrt{2})$附近，对于任意一个 x 值都

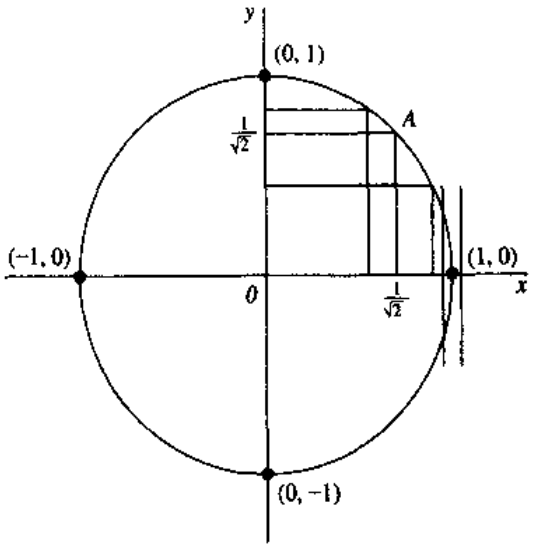

图 5-2　隐函数定理。圆圈上任意一点的旁侧(不包含 $x=1$ 点和 $x=-1$ 点),x 值与 y 值一一对应。而在 $x=1$ 点或 $x=-1$ 点的旁侧,一个 x 值对应两个 y 值。若函数图形不垂直,则对于 $g(x,y)=0$ 存在相对应的显函数 $y=f(x)$。然而,$\frac{\partial g}{\partial y}\neq 0$ 此时只是充分条件,而非必要条件。

存在惟一对应的 y 值,也就是说,在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 点附近存在显函数关系式:

$$y=+(1-x^2)^{1/2} \tag{5-25}$$

而位置不同,结论也不同。对于在 x 轴上的两点(−1,0)和(1,0)来说,在它们周围,对于任意一个 x 值总是存在两个相对应的 y 值,因而找不到可以满足式(5-24)的显函数表达式 $y=f(x)$;却可以找到形如 $x=g(y)$ 的显函数表达式。因为对于在点(1,0)和(−1,0)附近的任一 y 值都有其一一对应的 x 值存在。

进一步讨论为什么隐函数 $x^2+y^2=1$ 在(1,0)和(−1,0)点处得不到惟一解 $y=f(x)$,这是由于在这两点处函数值有复原性。沿圆周逆时针运动,在右半圆处,当 y 值由负数变为零又变为正时,x 的值是先增加然后又减少。(当沿左半圆顺时针运动时,x 的取值是先减小后增加。)在(1,0)点和(−1,0)点,函数 $x^2+y^2=1$ 圆形的切线垂直,即 $dy/dx\to\pm\infty$。而在曲线的切线不垂直的点都能得到显函数 $y=f(x)$。

我们现在来看由以上论述引出的比较静态单变量模型。下面是某目标函数的一阶导函数方程:

$$h(y,\alpha)=0 \tag{5-26}$$

它对应的显函数为:

$$y=y^*(\alpha) \tag{5-27}$$

将(5-27)代入(5-26),得:

$$h(y^*(\alpha),\alpha)=0 \tag{5-28}$$

等式左右两边求导,得:

$$h_y \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + h_\alpha \equiv 0 \tag{5-29}$$

必须假设：

$$h_y \neq 0 \tag{5-30}$$

才能使得$\frac{\partial y^*}{\partial \alpha}$有解，这意味着此时 $h(y,\alpha)$处于非垂直状态(α 为水平，y 为垂直)。

在极大值模型中，二阶导数充分条件保证了隐函数(5-27)解的存在性。在此类模型中，隐函数(5-26)为某目标函数 $f(y,\alpha)$的一阶偏导数。

$$f_y(y,\alpha) \equiv h(y,\alpha) = 0$$

而取极大值的二阶导数充分条件：

$$f_{yy} \equiv h_y < 0$$

确保了 $h_y \neq 0$。但应注意到的是，$h_y \neq 0$ 是显函数 $y = y^*(\alpha)$存在的充分非必要条件。因为还是存在着一些拥有显函数的隐函数，而这些隐函数在某些点 $h_y = 0$，比如说函数 $y^3 - \alpha = 0$ 它的显函数为 $y = \alpha^{1/3}$。

虽然当 $\alpha \to 0$ 时，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}\alpha \to \infty$，但在 $\alpha = 0$ 周围的点有惟一的 y 值与 α 值对应。函数本身为单调的。

在含两个方程、两个变量的模型中，情况显得更加复杂一些，但是所用到的概念却是相似的。思考一下方程组(5-22)，设它是一个含 2 个方程、3 个未知数 x_1, x_2, α 的方程组。假设 f_1 与 f_2 为某函数 $f(x_1, x_2, \alpha)$的一阶偏导数，即 $f_1 = \partial f/\partial x_1$，$f_2 = \partial f/\partial x_2$。对于函数(5-22)，它的隐函数存在的充分条件是，若 α 为某未知参数，无论 α 取任何值，函数都不会处于垂直。我们再来试着讨论一下$\partial x_1^*/\partial \alpha$ 和$\partial x_2^*/\partial \alpha$ 的求解。

将方程组(5-22)微分，得到：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{1\alpha} \\ -f_{2\alpha} \end{bmatrix} \tag{5-31}$$

对于$\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha}$和$\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha}$惟一存在的充分非必要条件是行列式：

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5-32}$$

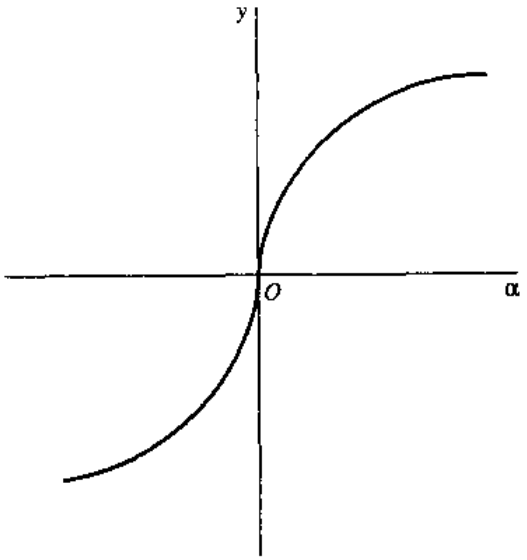

图 5-3 方程 $y=\alpha^{1/3}$。此图很好地说明了为什么 $h_y \neq 0$ 是显函数存在的充分非必要条件。函数图形在原点处处于垂直状态，而对于 α 存在惟一与之对应的 y 值。因为 $\alpha^{1/3}$ 为单调函数，若 $h_y \neq 0$，显函数仍可能是存在的。

这个由一阶偏导数组成的行列式被称作雅科比行列式。若 $J \neq 0$，则 $\partial x_i^* / \partial \alpha$ 有意义，则显函数 $x_i = x_i^*(\alpha)$ 存在。总之，$J \neq 0$ 正是方程组(5-22)能用显函数(5-23)表示的充分非必要条件，这个结论是单个方程的一般化。

在极大值模型中，由于取最大值的二阶导数充分条件的存在，实际上暗含了显函数(5-32)存在的，在极大值模型中，$f_1(x_1, x_2, \alpha) = \partial f / \partial x_1$，$f_2(x_1, x_2, \alpha) = \partial f / \partial x_2$，$\partial f_1 / \partial x_1 = f_{11}$，雅科比行列式为：

$$J = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

这里 $J \neq 0$。

对于有 n 个方程：

$$\begin{gathered} f_1(x_1, \cdots, x_n, \alpha) = 0 \\ \cdots\cdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n, \alpha) = 0 \end{gathered} \tag{5-33}$$

显函数：

$$x_i = x_i^*(\alpha) \tag{5-34}$$

存在的充分条件为雅科比矩阵非零，即：

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5-35}$$

习题

1. 计算下列行列式

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. 设 A 为对角方块矩阵，对角线以下部分的元素为 0：

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：$|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

3. 有如下含 n 个方程、n 个未知数的方程组：

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

向量 $\boldsymbol{b}$ 除了第 j 行是 1 外其余行都为 0。设 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，证明未知数可被表示为：

$$x_i=\frac{A_{ji}}{|\boldsymbol{A}|} \quad i,j=1,\cdots,n$$

这里，A_{ji} 为元素 a_{ji} 的余子式。

附录

矩阵的简单运算

矩阵是矩形的数集，矩阵 A 有 m 行 n 列：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有 n 行 r 列：

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等，则两者的乘积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 为一个 $m\times n$ 矩阵：

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mr} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

这里，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素 c_{ij} 有如下定义：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ij}b_{kj}$$

这是指 c_{ij} 是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 i 行元素逐项与 B 矩阵的 j 列元素相乘后又相加到得的。但在这里要注意的是，$\boldsymbol{AB}$ 有意义，但 $\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义。因为两个矩阵乘积存在的条件是位于左边的矩阵的列数等于位于右边的矩阵的行数。两个方块矩阵相乘，其左右矩阵可以相互置换。但总体上说，左右矩阵交换位置所带来的乘积的结果往往是不同的，即：

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$$

下面是矩阵乘法的运算规律：

交换律：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times r$，$\boldsymbol{C}$ 为 $r\times p$ 矩阵，则 $\boldsymbol{ABC}$ 为 $m\times p$ 矩阵，则如下关系存在：

结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

分配律：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为 $n\times p$ 矩阵，则有：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=AB+AC$$

我们可以将结合律改写为：

$$\sum_{h=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kh})c_{hj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{r}a_{ik}(b_{kh}c_{hj})$$

我们可以将分配律改写为：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}$$

矩阵的转置 $\boldsymbol{A}'$，是指把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列得到的一个新矩阵，即：

$$(a_{ij})'=(a_{ji})$$

两个矩阵乘积的转置矩阵等于将这两个矩阵转置后再颠倒相乘，即：

$$(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$$

证明：等式左边 $(\boldsymbol{AB})'$，其元素 c_{ij} 有：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$$

等式右边 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$，满足：

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kh} a_{jk}$$

因而等式两边等价，得证。

如果一个矩阵等于它的转置矩阵，即：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$$

也就是说互换对称矩阵的行与列所得到的新矩阵与原矩阵相同。一些目标函数的二阶偏导数矩阵常为对称阵。杨氏定理中的矩阵 $f_{ij}=f_{ji}$，因而它是对称阵。

矩阵的秩

考虑一个 $m\times n$ 阶矩阵(a_{ij})，它的行分别为 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m$。各行为：

$$\boldsymbol{A}_i=(a_{i1},\cdots,a_{in}) \quad i=1,\cdots,m$$

它们各代表 n 维空间中的一点。值得讨论的是，是否 m 个点都处于某一条直线上或某平面上？它们的维数是多少？1 维、2 维还是 m 维？从几何上来看，处于 m 维空间的 m 个向量是不能相互表示的。换句话说，对于 n 维向量组，$\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m$，如果有：

$$k_1\boldsymbol{A}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{A}_m=0$$

则 k_i 为标量，并且 k_i 一定全为 0。这时，我们称向量 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 线性无关。

对于某给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$，它的线性独立向量的维数被称作矩阵的秩。如果矩阵为 $m\times n$ 矩阵，且 $n>m$，那么 $\boldsymbol{A}$ 的秩$\leqslant m$。矩阵行向量的秩等于矩阵列向量的秩。矩阵的秩等于它行向量的秩或列向量的秩。

例 1. 向量 $\boldsymbol{A}_1=(1,0,0),\boldsymbol{A}_2=(0,1,0),\boldsymbol{A}_3=(0,0,1)$线性独立。当且仅当 $k_1=k_2=k_3$ 时，

$$k_1\boldsymbol{A}_1+k_2\boldsymbol{A}_2+k_3\boldsymbol{A}_3=(k_1,k_2,k_3)=0$$

才成立。所以矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

的秩为 3。

例 2. 令 $\boldsymbol{A}_1=(1,1,0),\boldsymbol{A}_2=(1,0,1),\boldsymbol{A}_3=(1,-1,2)$，这 3 个向量线性相关。关系式 $\boldsymbol{A}_3=2\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_1$ 或 $\boldsymbol{A}_1-2\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{0}$ 成立。

这些向量中任何一个向量都可被写成其他任意两个向量的线性组合(但不少于两个)。

因而矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

的秩为 2。

一系列的线性无关向量 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m$，组成了 m 维几何空间。空间中的任意一个向量 $\boldsymbol{b}$ 都可被这 m 个线性无关向量所表示，即：

$$\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{A}_i$$

这里 k_i 为系数。

下面考虑 n 个方程、n 个未知数的方程组：

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

上式可简写为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的秩$<n$，则 $\boldsymbol{A}$ 的某些行向量可被其余向量线性表示，这就是说，方程的数量不再是 n 个而是小于 n 个，方程没有惟一的解。但如果 $\boldsymbol{A}$ 的秩$=n$，则方程组有惟一解。

定理　若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵，则当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 n。

讨论：这个定理是隐函数理论中雅科比非零行列式的基础。首先，若秩$(\boldsymbol{A})<n$，则矩阵中的某些行(列)是其他行(列)的线性组合；再由定理，有 $|\boldsymbol{A}|=0$，因而 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 线性相关。我们可以在数学教科书上找到关于这部分的更标准的证明。

我们称秩为 n 的 $n\times n$ 方阵为非奇异方阵，称秩$<n$ 的 $n\times n$ 方阵为奇异方阵。

矩阵的逆

在普通的数学问题中，一个数 x 的倒数为 $1/x$。如果 y 是 x 的倒数，那么两者要满足关系式 $xy=1$。

在矩阵的问题上，单位阵：

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

表示一个 $n\times n$ 阶的方阵，它由 1 和 0 两个数字组成。通常，若 (a_{ij}) 为单位阵，则当 $i=j$ 时，有 $a_{ij}=1$，当 $i\neq j$ 时，有 $a_{ij}=0$。单位阵和任意方阵相乘不会改变此方阵：

$$\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$$

单位阵的性质有点像普通数学中的数字 1。

是否存在一个“倒数”矩阵 B，使其对于矩阵 A 满足：

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$$

如果这样的矩阵存在，我们就称 B 为 A 的逆矩阵，称为 A^{-1}。

求 A 的逆矩阵，相当于求解问题：

$$AX=b$$

中的惟一解 x。若 A 的 $n\times n$ 矩阵，且 A^{-1} 存在，将上式左乘逆矩阵 A^{-1}，得到：

$$x=A^{-1}b$$

即关于 x 的联立方程组的解。这个解当且仅当 $|A|\neq 0$ 时才存在。这也就是说，当且仅当 A 为非奇异方阵（A 的秩为 n）时，A 的逆矩阵 A^{-1} 才存在。

设 $|A|\neq 0$，思考如下方阵 A^*：

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

我们称它为 A 的伴随矩阵。A^* 由 a_{ij} 的余子式移项后组成。再思考如下的矩阵乘积 AA^*：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}=|A|I$$

乘积阵 AA^* 的非主对角线上的元素是由矩阵 A 的对应的行与其他行的余子式相乘叠加而得到的，由前面所述的 5.2 节中的定理 8，可以推出乘积阵 AA^* 的非主对角线上的元素都为 0。而在 AA^* 矩阵的主对角线上的元素是由 $a_{ij}(j=1,\cdots,n)$ 乘以其本身的代数余子式后再相加得到的。由 5.2 节中的定理 1，可得到 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=|A|$。总之，$AA^*$ 阵除主对角线上的元素值为 $|A|$，其余元素值均为 0，即：

$$AA^*=|A|I$$

而 A 的逆矩阵 A^{-1} 为

$$A^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{A_{11}}{|A|} & \cdots & \dfrac{A_{n1}}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{A_{1n}}{|A|} & \cdots & \dfrac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

通过观察，可以得出，若 $AA^{-1}=I$ 成立，则有 $A^{-1}A=I$。也就是说 A 的左右逆阵都是 A^{-1}。假如存在矩阵 B，使得 $AB=I$，那么等式两边同时左乘 A^{-1}，有：

$$A^{-1}AB=IB=B=A^{-1}$$

即 B 一定为 A^{-1}。

我们还能证明：

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

具体的证明步骤留给读者作为练习。

正交

如果两个向量的内积为 0，我们称这两个向量正交。

例 1. 向量 $\boldsymbol{E}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{E}_2=(0,1,0)$ 和 $\boldsymbol{E}_3=(0,0,1)$ 相互正交。

例 2. 令 $\boldsymbol{a}=(2,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,-1,1)$，则 $\boldsymbol{ab}=0$，因而 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 正交。

正交的向量都是线性独立的，如果一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量两两正交而且都为单位向量，欧几里得“长度”为 1，即：

$$\| a_i \| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$$

那么，我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵。并且有：$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$。

习题

1. 求下列矩阵的秩

$$\boldsymbol{A}=-\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ -2 & 2 & 4\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=-\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=-\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

2. 证明：$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都为非奇异方阵。
3. 证明：$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$。
4. 证明：$(\boldsymbol{A}')^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})'$。
5. 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵，h 为 $n\times 1$ 列向量，则有：

$$\boldsymbol{h}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}h_ih_j$$

上述表达式被称作二次型，我们常常在极大极小值理论中见到它。

6. 证明：对于任意，若 $\boldsymbol{h}\neq 0$，若 $\boldsymbol{h}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}<0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的对角线上的元素都为负。即 $a_{ii}<0$，$i=1,\cdots,n$。
7. 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，能推出 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}^{-1}$。
8. 证明：若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为单位正交，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量也有类似性质。

部分参考文献

The implicit function theorem can be found in any advanced calculus text. Classic references are:

Apostol, T.: *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, MA, 1957.

Courant, R.: *Differential and Integral Calculus*, 2d ed., vols. 1 and 2, Interscience Publishers, Inc., New York, 1936.

Matrices and determinants are the subject of any linear, or matrix, algebra text. Perhaps the clearest and most useful for economists is:

Hadley, G.: *Linear Algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, MA, 1961.

Samuelson, P. A.: *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947. The first systematic exposition of the application of the implicit function theorem in economic methodology.

第 6 章　比较静态学：传统的方法

6.1　导言：再论利润最大化

在本章我们将对含有清晰的极大化假设的经济模型进行一般的比较静态分析。同以往一样，焦点集中在寻找为了隐含有用的，即可证伪的假说而不得不强加在模型上的结构。一种非常有效的方法学，对偶理论，已被发展起来以解决一些重要的模型，例如利润最大化，有约束的成本极小化，和带预算约束的效用极大化。这些新的方法使得解决这些问题的传统方法得以大大简化和明晰化，我们将在下一节探讨这些方法。然而，为了分析除了以上叙及模型之外的模型和更好领会这种新的方法，仍有必要理解传统的方法，这就是我们要转向的任务。涉及一个变量以上的经济模型的比较静态分析要求选择变量对参数求偏导构成的齐次性线性方程组存在解。为了系统地写下一阶方程组的解，我们将利用基本的矩阵运算和克莱姆法则。用这种方法，能最有效地分析这些模型的结构。

再次考虑第四章中的利润极大化的厂商，并回想方程(4-19)：

$$\begin{aligned} pf_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}+pf_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}&\equiv 1 \\ pf_{12}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}+pf_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}&\equiv 0 \end{aligned} \tag{4-19}$$

以矩形式表示为：

$$\begin{pmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{21} & pf_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial w_1} \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6-1}$$

利用克莱姆法则：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}=\begin{vmatrix} 1 & pf_{12} \\ 0 & pf_{22} \end{vmatrix}/H=\frac{pf_{22}}{H}\qquad H=\begin{vmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{21} & pf_{22} \end{vmatrix} \tag{6-2}$$

这是方程(4-20a)，而(4-20a)过去是利用代数运算得出的。注意(6-1)式中等号右边项一直作为第 i 列出现在$\dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_j}$的解中。

方程(4-20a)～(4-20d)可以写成：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j}=\frac{H_{ji}}{H}\quad i,j=1,2 \tag{6-3}$$

H_{ji}是 H 中第 j 行之列元素的代数余子式。

在这个模型中，$H_{11}=pf_{22}$，$H_{22}=pf_{11}$，$H_{12}=H_{21}=-pf_{12}$。注意，$H=p^2(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)$，并从二阶条件(4-15)知 $H>0$，这实际上是一个趋势的标记；行列式将在极大值与极小值理论中起一个关键性的作用。

以同样的方法，方程组(4-21)能写成：

$$(pf_{ij})\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p}\\[2ex]\dfrac{\partial x_2^*}{\partial p}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}-f_1\\-f_2\end{pmatrix} \tag{6-4}$$

其中(pf_{ij})表示(6-1)式中左边的 2×2 矩阵。由克莱姆法则易知$\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p}$，$\dfrac{\partial x_2^*}{\partial p}$的解涉及非对角线元素 pf_{12}和 pf_{21}，既然这些项的符号不是被极大化隐含，我们立即可以猜想没有负号出现在$\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p}$等中，因此不会出现可证伪的涉及投入对产出价格反应的假说。

两要素利润极大化厂商是两选择变量极大化模型的一个例子，这种模型的最一般形式是极大化：

$$f(x_1,x_2,\alpha) \tag{6-5}$$

这里 f 指整个被极值函数，不仅是以前目标函数的生产函数部分。

其中选择变量是 x_1 和 x_2，α 是一个参数或参数向量，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$。式(6-5)的一阶条件，通常叫做均衡条件，是：

$$\begin{aligned}f_1(x_1,x_2,\alpha)&=0\\f_2(x_1,x_2,\alpha)&=0\end{aligned} \tag{6-6}$$

充分的二阶条件是：

$$f_{11}<0,f_{22}<0,f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0 \tag{6-7}$$

方程组(6-6)是三变量 x_1,x_2,α 的两个方程。由隐函数定理，充分的二阶条件隐含这些方程组可以得出解：

$$\begin{aligned}x_1&=x_1^*(\alpha)\\x_2&=x_2^*(\alpha)\end{aligned} \tag{6-8}$$

应该时刻记住方程组(6-8)是(6-6)的齐次解，当参数 α 变化时，x_1 和 x_2 一般都会变化，将(6-8)代回到(6-6)，可得：

$$\begin{aligned}f_1(x_1^*(\alpha),x_2^*(\alpha),\alpha)&\equiv0\\f_2(x_1^*(\alpha),x_2^*(\alpha),\alpha)&\equiv0\end{aligned} \tag{6-9}$$

将上述方程组对 α 求偏导，可得：

$$\begin{aligned}f_{11}\frac{\partial x_1^*(\alpha)}{\partial\alpha}+f_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial\alpha}+f_{1\alpha}&\equiv0\\f_{21}\frac{\partial x_1^*(\alpha)}{\partial\alpha}+f_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial\alpha}+f_{2\alpha}&\equiv0\end{aligned} \tag{6-10}$$

以矩阵的形式，方程组可表示为：

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -f_{1\alpha} \\ -f_{2\alpha} \end{pmatrix} \tag{6-11}$$

利用克莱姆法则可得：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} = \begin{vmatrix} -f_{1\alpha} & f_{12} \\ -f_{2\alpha} & f_{22} \end{vmatrix} / H = \frac{-f_{1\alpha} f_{22}}{H} + \frac{f_{2\alpha} f_{12}}{H} \tag{6-12a}$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} = \begin{vmatrix} f_{11} & -f_{1\alpha} \\ f_{21} & -f_{2\alpha} \end{vmatrix} / H = \frac{-f_{2\alpha} f_{11}}{H} + \frac{f_{1\alpha} f_{21}}{H} \tag{6-12b}$$

其中：

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0 \tag{6-13}$$

方程组(6-12)表示了两选择变量无约束极大化问题最一般的比较静态关系。在此一般情况，不隐含可证伪的假说并不奇怪。虽然如此，仍可获得某些信息。(6-12)中的 H 是正的，另外 f_{11}，f_{12} 是负的，这个信息是由极大化的充分条件提供的。

另一个可得到的信息是由模型的实际结构提供的。具体而言，一个模型被构造时必须使得参数对目标函数的影响可以利用，因此一阶条件一般来说可以知道，即 $f_{1\alpha}$ 和 $f_{2\alpha}$ 的符号被给定，否则这个模型不能产生任何结果。在以前利润最大化模型中：(记得，f 在这个模型中只代表生产函数，不是目标函数。)

$$f_{i\alpha} = \pi_{nw_i} = -1 \quad i = 1, 2 \tag{6-14}$$

$$\pi_{1w_2} = \pi_{2w_1} = 0$$

例如，参数 w_1 只出现在一阶条件下 $\pi_1 = 0$ 中，即(6-12)中 $f_{2\alpha} \equiv 0$。因此(6-12a)有 f_{12} 的那一项为 0，因 $\pi_{nw_1} = -1$，$\partial x_1^* / \partial w_1 < 0$。

相似地，对 w_2 而言，$f_{2\alpha} \equiv -1$，$f_{1\alpha} \equiv 0$。因此，在方程(6-12b)中，方程右边只剩下 $-f_{2\alpha} f_{11} / H$。从二阶条件知 $\partial x_2^* / \partial w_2 < 0$。

对参数产出价格 p，情况又不一样。产出价格出现在(6-10)的两个方程中，因此，不定项 f_{12} 出现在 $\partial x_1^* / \partial p$ 和 $\partial x_2^* / \partial p$ 中。结果，不会出现 p 与投入关系可证伪的假说。

以前的分析表明极大化模型中仅当一个既定参数只进入且只进入一个一阶条件时，可证伪的比较静态定理才可得到。这个结果，被称作共轭定理(conjugate pairs theorem)，将在下一节详尽讨论。从方程组(6-10)中可知，如果某个参数 α_i 只进入第 i 个一阶方程，那么 $\partial x_i^* / \partial \alpha_i$ 和 f_{ii} 符号必定相同，这个可以表达为：

$$f_{ii} \frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_i} > 0 \tag{6-15}$$

几乎经济学中所有比较静态结果是方程(6-15)中具体例子，其中 α_i 只进入第 i 个一阶方程。

6.2 扩展到 n 个变量

现在让我们将两要素利润极大化模型扩展到 n 个要素，首先必须得到无约束极大值(和极小值)的一阶和二阶条件，然后我们将利用利润极大化模型来示范比较静态的一般方法。

一阶必要条件

正如我们在第 4 章中所注意到的 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 要有一个平稳值的一阶条件是 f 的所有偏导都为 0，即 $f_i=0, i=1,\cdots,n$。这是两变量情况的直观扩展。然而二阶条件的扩展就有点复杂了。

二阶充分性条件

像在第 4 章附录中做的一样，利用泰勒级数方法，可知 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在某个平稳点取得极大值的充分条件是对曲线 $y(t)=f(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 来说，$y''(t)<0$。利用链导法则，充分性条件是：

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}<0 \tag{6-16}$$

其中 $\frac{dx_i}{dt},\frac{dx_j}{dt}$ 并不全为 0。

一个对称阵 (a_{ij}) 如果满足：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}h_ih_j<0 \tag{6-17}$$

其中 h_i,h_j 不全为 0，则称其负定阵，(如果$<$号，被$\leqslant$代替，则为 (a_{ij}) 半负定阵)。相似地，对称阵 (a_{ij}) 为正定阵(半正定阵)意味着 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}h_ih_j>(\geqslant)0$，其中 h_i,h_j 不全为 0，因此，如果在满足 $f_i=0, i=1,\cdots,n$ 的点，f 的二阶偏导矩阵(叫做海赛 Hessian 矩阵)是负定的，那么 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在该点取极大值。如果海赛矩阵是在该点是正定的，则 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在该点取极小值，如果在某点海赛矩阵是半负定，那么 f 在该点决不会是极小值，但无法判定 f 在该点是极大值或鞍点。(6-17)的矩阵表示 $\boldsymbol{h}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$，称为二次型。

几何上讲，海赛矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的负定性保证了 f 是严格凹。如果 $\boldsymbol{H}$ 是正定阵，f 是严格凸(凹凸是相对于原点而言)。

例　考虑函数 $y=(x_2-x_1^2)(x_2-2x_1^2)$。

该函数在任意通过原点的直线上取值时，在原点取得极小值，但该函数自身在原点并不取得极小值，二阶偏导的海赛阵为：

$$H=\begin{pmatrix}24x_1^2-6x_2 & -6x_1\\ -6x_1 & 2\end{pmatrix}$$

在原点，该矩阵为：

$$H=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

该矩阵明显是正半定的：

$$Q=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}f_{ij}h_ih_j=2h_2^2\geqslant 0$$

当 h_1 任意，$h_2=0$，$Q=0$；$h_2\neq 0$，$Q>0$。

在两变量例中，$y=f(x_1,x_2)$中，极大值的充分性条件(6-16)隐含着 $f_{11}<0$，$f_{22}<0$，并且 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$，这与第 4 章所表明的一样。注意，最后的一项可看做目标函数交叉偏导的行列 $\begin{vmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{vmatrix}>0$；$f_{11}$，$f_{22}<0$ 与该行列式的对角线上元素相关，行列式理论使得 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$取极大值的充分性二阶条件的表达更为简练。首先，考虑下述构造：

定义　令 A_n 为某 n 阶行列式，A_n 划去 $n-k$ 行，对应编号的 $n-k$ 列后剩下的行列式称为 k 阶主子式。例如，如果第 i 行被划去，为了形成 $n-1$ 阶主子式，第 i 列就必须也被划掉，既然当选择划去哪一排时有 n 个选择，则明显有 n 个 A_n 的 $n-1$ 阶主子式，假如第 1，3 排与第 1，3 列被划去，则产生一个 $n-2$ 阶主子式。共有 $\binom{n}{2}=n(n-1)/2!$ 个 $n-2$ 阶主子式，一般来说共有 $\binom{n}{k}=n!/k!(n-k)!$ 个$(n-k)$阶主子式，注意，A_n 的一阶顺序主子式仅是 A_n 的对角线上元素，二阶主子式是形似 $\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}$ 的 2×2 行列式。它与 $f(x_1,x_2)$的交叉偏导形成的行列式的相似性促发形成下列定理。

定理　考虑在 $x=x^0$ 取得平稳值的函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$。考虑 f 交叉偏导的海赛矩阵(f_{ij})。如果$|(f_{ij})|$的所有 k 阶主子式在 $x=x^0$ 处有符号$(-1)^k$，那么 $f(x_1,\cdots,x_n)$在 $x=x^0$ 处取极大值。如果$|(f_{ij})|$所有主子式 $k=1,\cdots,n$ 在 $x=x^0$ 处都是正的，那么 f 在 $x=x^0$ 处取极小值。如果任一主子式与上述对应主子式符号严格相反(即都是负)，则该函数在 $x=x^0$ 有鞍点。如果主子式有一些或全部为 0，其余与以上情况相同，那么无法判定函数在 $x=x^0$ 状态。(这与单变量函数二阶导数为 0 时情况相同)

我们将经常应用上述定理的结果。然而，定理讲的比较累赘，考虑 $n\times n$Hessian 阵的顺

序主子式，$|f_{11}|$，$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$，…，记住在两变量例子中，$f_{11}<0$ 和 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$ 隐含 $f_{22}<0$。实际上，如果所有的顺序主子式有 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为极大值或极小值时要求的相应的符号，那么所有其他的主子式也有 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为极大值或极小值时要求的相应的符号。因此，上述定理某种意义上“太强”；即假定的东西比必须的更多，但是我们需要充分性条件：所有 k 阶主子式有符号 $(-1)^k$ 时，为极大值；所有主子式都为正时，为极小值。

该定理比较简单优美的证明超出了本书水平。故证明不予给出。希望两变量情况的讨论至少使得该定理使人信服。

利润最大化：n 种要素

考虑有 n 种生产要素的利润最大化厂商，目标函数是最大化：

$$\pi = pf(x_1,\cdots,x_n) - \sum w_i x_i$$

一阶条件是：

$$\pi_i = pf_i - w_i = 0 \qquad i=1,\cdots,n \tag{6-18}$$

厂商使得边际产值与边际成本即要素投入价格相等。这是两变量情况的直接扩展。这些方程组描述了 n 个由 n 个选择变量 $x_1,\cdots,x_n$ 和 $n+1$ 个参数 $w_1,\cdots,w_n,p$ 构成的方程。如果雅科比行列式不为 0，即：

$$J = \left|\frac{\partial \pi_i}{\partial x_j}\right| \neq 0 \tag{6-19}$$

则在这个稳定值，从这些方程组可解出选择函数即要素需求曲线：

$$x_i = x_i^*(w_1,\cdots,w_n,p) \quad i=1,\cdots,n \tag{6-20}$$

极大值的充分性条件是 $(\pi_{ij})=(pf_{ij})$ 的主子式有符号 $(-1)^k, k=1,\cdots,n$。既然 $p>0$，这等价于生产函数的二阶偏导矩阵

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

的主子式交替变换符号。具体而言，这意味着，对角元都是负数，即 $f_{ii}<0, i=1,\cdots,n$。这表明每种要素的边际生产率是递减的。另外，所有 $n(n-1)/2$ 个二阶行列式

$$\begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{vmatrix} > 0 \quad i,j=1,\cdots,n \quad i \neq j$$

从 $f_{ii}f_{jj}-f_{ij}^2>0, i,j=1,\cdots,n, i\neq j$ 来看，自身影响超过交叉影响。还有其他的主子式要考虑，这些不容易给予直观解释。

充分性的二阶条件表明在极值点的一个领域，目标函数（在这个例子中是生产函数）必定是下凹的条件 $f_{ii}<0$ 保证函数在坐标轴是 y 和 x_i 的两维平面上是凹的。二阶主子式与

函数在所有可能三维子空间 y, x_i, x_j 的凹性有关。但在低维空间的凹性不能保证在高维空间的凹性。因此所有阶的主子式，包括整个 Hessian 阵自身，都必须检验相应的符号。

就求解要素需求曲线而言，充分性二阶条件保证这个目的可以达到。n 阶主子式即整个(π_{ij})矩阵行列式自身由这些充分性条件可知符号为$(-1)^n$ 且不为 0。但这恰是方程组(6-18)的雅可比行列式。因此应用隐函数定理，选择函数(6-20)可以从(6-18)中得到。

将选择函数(6-20)代入(6-18)可得：

$$pf_i(x_1^*, \cdots, x_n^*) - w_i \equiv 0 \qquad i = 1, \cdots, n \tag{6-21}$$

为了求出方程组对某要素价格 w_j 变动反应，将(6-21)对 w_j 求偏导。可得方程组：

$$\begin{aligned}
pf_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_j} + \cdots + pf_{1n}\frac{\partial x_n^*}{\partial w_j} &\equiv 0 \\
&\vdots \\
pf_{j1}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_j} + \cdots + pf_{jn}\frac{\partial x_n^*}{\partial w_j} &\equiv 1 \\
&\vdots \\
pf_{n1}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_j} + \cdots + pf_{nn}\frac{\partial x_n^*}{\partial w_j} &\equiv 0
\end{aligned}$$

以矩阵形式表达，方程组可改写为：

$$\begin{bmatrix} pf_{11} & \cdots & pf_{1n} \\ \vdots & & \\ pf_{n1} & \cdots & pf_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n^*}{\partial w_j} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6-22}$$

其中右边的 1 出现在第 j 排，利用克莱姆法则求解$\partial x_i^* / \partial w_j$ 涉及将等式右边列替代行列式 $|(pf_{ij})|$第 i 列，即：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j} = \begin{vmatrix} pf_{11} & 0 & pf_{1n} \\ & \vdots & \\ & 1 & \\ & \vdots & \\ pf_{n1} & 0 & pf_{nn} \end{vmatrix} / H \tag{6-23}$$

是 $H = |pf_{ij}|$，即 π 二阶偏导的雅科比行列式。将分子按第 i 行展开：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j} = \frac{H_{ji}}{H} \tag{6-24}$$

H_{ji}是 H 中第 j 行 i 列元素的代数余子式。

一般而言，极大值的充分性二阶条件要求 H 有符号$(-1)^n$。然而，当 $i \neq j$ 时，H_{ij}的符号并未被极大值条件所规定。因此，一般来说不会出现任一要素对其他某种要素价格变化反应可证伪的隐含规定。然而，当 $i = j$，

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_i}=\frac{H_n}{H} \tag{6-25}$$

H_n是一个主子式：一般而言由极大值条件它有符号$(-1)^{n-1}$。因此：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_i}=\frac{H_n}{H}<0 \qquad i=1,\cdots,n \tag{6-26}$$

同两要素情况时一样，这个模型的确产生了一个关于每种要素需求曲线斜率可证伪的假说。要素对其价格变动的反应恰与其价格变动方向相反。

最后，由 H 的对称性，利用方程(6-24)：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j}=\frac{H_{ji}}{H}=\frac{H_{ij}}{H}=\frac{\partial x_j^*}{\partial w_i} \tag{6-27}$$

由于参数 p 进入(6-18)的每一个一阶方程中，不会出现关于投入要素对产出价格变化的反应可证伪的假说。将(6-18)对 p 求偏导可得比较静态关系的矩阵形式表达(比较第 4 章方程组(4-21))：

$$\begin{pmatrix} pf_{11} & \cdots & pf_{1n} \\ \vdots & & \\ pf_{n1} & & pf_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f_1 \\ \vdots \\ -f_n \end{pmatrix} \tag{6-28}$$

利用克莱姆法则求$\partial x_i^*/\partial p$：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{f_jH_{ji}}{H}\gtrless 0 \tag{6-29}$$

可以证明如果 p 增加，至少一个要素必须增加，但这是极少的信息。

最后，此竞争厂商的供给函数被定义为：

$$y=f(x_1^*(w,p),\cdots,x_n^*(w,p))=y^*(w_1,\cdots,w_n,p)$$

w 是要素价格向量$(w_1,\cdots,w_n)$，可以证明：

$$\frac{\partial y^*}{\partial p}>0 \tag{6-30}$$

和

$$\frac{\partial y^*}{\partial w_i}=-\frac{\partial x_i^*}{\partial p} \qquad i=1,\cdots,n \tag{6-31}$$

我们将这些结果留待下章讨论，因为用目前的方法证明它们比较困难，但如果利用以后要讨论的方法——包络定理，则极为容易。

现在我们陈述一个有趣的定理，但不给出证明，并将它用到利润极大化模型中。

定理 令 H 为 $n\times n$ 负定阵(它的对角元必定是负的)并且非对角元全为正的，那么 H^{-1} 全由负数构成。

考察 2×2 和 3×3 情况时，定理是明显的。但当考察一般情况时，就没有简单证明。该

定理证明是 Perron-Frobenius 定理的一个应用。读者可参考 A. Takayama 的课文(Mathematical Economics;2d ed. ,Cambridge Press,Cambridge,England,1985,pp,392ff.)来了解这些命题的证明。

考虑这个定理在利润极大化模型中的应用。就 w_j 的变化而言，我们得到矩阵方程(6-22)，令 b 为(6-22)等式右边的列向量；b 除了第 j 排元素为 1 外，其他元素皆为 0。此方程的解以矩阵形式表达是，$\frac{\partial x_i}{\partial w_j}=H^{-1}b$。既然 H^{-1} 的每一个元素至少都是负的，b 中元素为 1 或 0，则 $\partial x_i/\partial w_j<0, i,j=1,\cdots,n$。在两变量模型中，我们已证明 $\frac{\partial x_1}{\partial w_2}$ 与 $-f_{12}$ 符号相同。当仅有两要素时，技术互补性与以一种要素当另一种要素价格变动时引起的使用量变动来定义的互补性相同。然而，如果超过两要素时，我们就不能说如果 $f_{13}>0$ 则 $\partial x_1/\partial w_3<0$；生产函数其他交叉偏导的符号会起影响。然而上述定理表明，如果所有要素在 $f_{ij}>0$ 意义上是互补的，那么对所有要素而言 $\partial x_i/\partial w_j<0$。同样地，考虑方程(6-28)。假定每种要素的边际产量为正，该方程的解为 H^{-1} 与 $\begin{pmatrix}-f_1\\ \vdots \\ -f_n\end{pmatrix}$ 的矩阵乘积。元素 H^{-1} 都是负数。因此 $\partial x_i/\partial p>0$。即在这些假定之下不存在劣要素。

6.3　带约束的极大值和极小值理论：一阶必要条件

经济学中遇到的大部分极大值问题，会有一个单独的，附加的方程，将选择变量的值限制到所有实数的某个子空间，即 n 维欧拉空间的某个子空间。例如，在消费者理论中，个体被要求极大化他的效用函数 $U(x_1,x_2)$，同时消费者的花费不能超过他的预算花费。这个问题可以正式表达成：

最大化　　$U(x_1,x_2)=U$　　(6-32)

当满足条件　　$p_1x_1+p_2x_2=M$　　(6-33)

其中 x_1,x_2 是消费的两种商品，p_1,p_2 分别是它们的价格，M 是总的货币收入，这个问题可以先从约束条件中解出一个选择变量，比如说 x_2，然后将它代入目标函数中求解。这时只是求解一个变量无约束极值问题。从(6-33)可得：

$$x_2(x_1)=\frac{-p_1}{p_2}x_1+\frac{M}{p_2} \tag{6-34}$$

一旦 x_1 已知，则 x_2 也可知，问题简化为 $\max_{x_1} U(x_1,x_2(x_1))$。

可得：

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x_1}=\frac{\partial U}{\partial x_1}+\frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}$$

$$=U_1+U_2\frac{-p_1}{p_2}=0$$

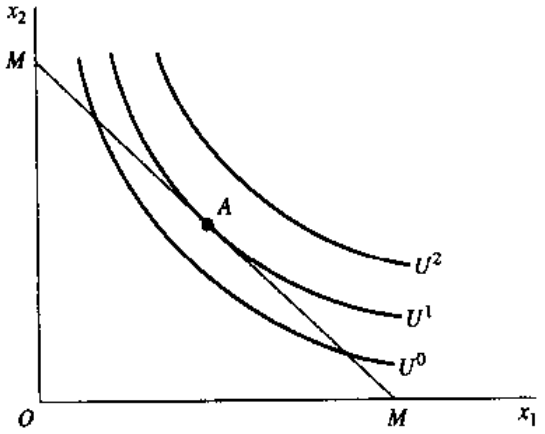

图 6-1 效用极大化。图中有三条无差异曲线，$U^2>U^1>U^0$。线段 MM 代表消费者预算约束。带约束的效用最大化问题在 A 点取到极值，在 A 点无差异曲线与预算线相切。极大值的二阶条件要求效用水平曲线即无差异曲线凸向原点；即效用函数必须是拟凹的(同时严格增)。

或：

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{6-35}$$

这是熟悉的相切条件：边际替代率($-U_1/U_2$，消费者愿意放弃 x_2 的选择 x_1 的比率)等于市场替代比率($-p_1/p_2$，预算线的斜率)。该条件已在图 6-1 中描绘出来。在效用函数或弯曲的条件下(这是由相应的二阶条件保证的)，点 A 明显地代表着当消费者被限制消费 MM 线段上的消费组合时可达到的最大效用。

一般的带约束极值问题：

最大化　　$f(x_1,\cdots,x_n)=y$

当满足条件　　$g(x_1,\cdots,x_n)=0$

能够以同样的方式求解，即直接代入，将问题简化为 $n-1$ 个变量的无约束极值问题。然而一种保留问题对称性的相当优美的方法，拉格朗日乘子法，将在以下讨论。该方法的证明在以前为无约束极值发展的路线上进一步。

考虑函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在某可微曲线 $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 上的行为，即考虑 $y(t)=f(x_1(t),\cdots,x_n(t))$。如果对每一种可行曲线 $\boldsymbol{x}(t)$，$y'(t)=0$ 并且 $y''(t)<0$，那么 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在该点有极大值。然而，在此种情况下，$\boldsymbol{x}(t)$ 不能代表 n 维空间中所有曲线。只有在约束领域内的曲线才是允许的。这个曲线族由满足 $g(x_1(t),\cdots,x_n(t))\equiv 0$ 的曲线构成。注意恒等号——我们要确保 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 在一条既定曲线 $x(t)$ 上的每一点都为 0，而不是就一些点。问题可以陈述如下：

最大化　　$f(x_1(t),\cdots,x_n(t))=y(t)$　　(6-36)

满足约束　　$g(x_1(t),\cdots,x_n(t))\equiv 0$　　(6-37)

令 $y'(t)=0$，可得：

$$f_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\cdots+f_n\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=0 \tag{6-38}$$

该式对满足约束的 dx_i/dt 所有值都成立，$g(x_1(t),\cdots,x_n(t))\equiv 0$ 对这些值施加了什么限制？将 g 对 t 微分，可得

$$g_1\frac{dx_1}{dt}+\cdots+g_n\frac{dx_n}{dt}\equiv 0 \tag{6-39}$$

在无约束情况下，(6-38)对所有 dx_i/dt 来说都为 0。因此，在这种情况要有极大值则必须 $f_i=0,i=1,\cdots,n$。然而这里(6-38)和(6-39)须同时成立。因此 dx_i/dt 的值是有限制的。

然而，假定 $f_1\neq 0$，我们可将(6-38)改写成：

$$\frac{dx_1}{dt}=-\frac{f_2}{f_1}\frac{dx_2}{dt}-\cdots-\frac{f_n}{f_1}\frac{dx_n}{dt} \tag{6-40}$$

相似地，从(6-39)中，如果 $g_1\neq 0$，可得：

$$\frac{dx_1}{dt}=-\frac{g_2}{g_1}\frac{dx_2}{dt}-\cdots-\frac{g_n}{g_1}\frac{dx_n}{dt} \tag{6-41}$$

将(6-41)减去(6-40)可得：

$$\left(\frac{f_2}{f_1}-\frac{g_2}{g_1}\right)\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\left(\frac{f_n}{f_1}-\frac{g_n}{g_1}\right)\frac{dx_n}{dt}=0 \tag{6-42}$$

并且该表达式对所有 $\frac{dx_2}{dt},\cdots,\frac{dx_n}{dt}$ 须为 0。将 $\frac{dx_i}{dt},i=1,\cdots,n$ 的一个消去，余下的 $\frac{dx_i}{dt}$ 能有一个无限制的值，如果 $f_1\neq 0,g_1\neq 0$，那么无论 $\frac{dx_2}{dt},\cdots,\frac{dx_n}{dt}$ 为何值，$\frac{dx_1}{dt}$ 一个明智的选择能使得(6-38)和(6-39)成立。但既然(6-42)对 $\frac{dx_2}{dt},\cdots,\frac{dx_n}{dt}$ 的所有值都成立，则括号内的系数必须都为 0，即 $\frac{f_i}{f_1}=\frac{g_i}{g_1},i=2,\cdots,n$。在 f_i,g_i 都不为 0 的情况下，该条件可表达为：

$$\frac{f_i}{f_j}=\frac{g_i}{g_j},\quad i,j=1,\cdots,n \tag{6-43}$$

这 $n-1$ 个条件目标函数的不变曲线必须与约束的不变曲线相平行。这是熟悉的相切条件，以前的效用极大化问题已经举例说明过，$n-1$ 个条件(6-43)和约束条件(6-37)构成了带一个约束条件的极大值问题的所有一阶条件的完整集合。这些条件对稳定点——极大值，极小值，鞍点是必须的。

上述条件可以用一种优美而有用的方法阐述，构造一个新的函数 $\mathscr{L}$——拉格朗日函数：

$$\mathscr{L}=f(x_1,\cdots,x_n)+\lambda g(x_1,\cdots,x_n)$$

变量 λ 仅是一个新的独立变量，叫做拉格朗日乘子。将 $\mathscr{L}$ 写作 $\mathscr{L}=f+\lambda g$ 或 $\mathscr{L}=f-\lambda g$ 无影响，这仅仅改变 λ 的符号。注意当 $x_1,\cdots,x_n$ 值满足约束时，$\mathscr{L}$ 一直等于 f。因此当 f 有平稳值时，$\mathscr{L}$ 可期望也有一个平稳值，事实上，将 $\mathscr{L}$ 对 $x_1,\cdots,x_n,\lambda$ 求偏导，并令它们为 0，可得：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_1&=f_1+\lambda g_1=0\\
&\vdots\\
\mathscr{L}_n&=f_n+\lambda g_n=0\\
\mathscr{L}_\lambda&=g(x_1,\cdots,x_n)=0
\end{aligned} \tag{6-44}$$

将 λ 从(6-44)中消去(将 λg_i 移至右边,将方程互除)可得:

$$\frac{f_i}{f_j}=\frac{g_i}{g_j}$$

这正是有约束极大值的一阶条件。因此拉格朗日函数为有约束极大值问题的一阶条件提供了一种易于记忆的方法,然而,我们将会看到对二阶条件而言这也是个十分有用的构造,并且在比较静态理论中,拉格朗日乘子 λ 经常有一个比较有趣的经济解释。

例 考虑本节开头时的效用极大化问题,该问题拉格朗日函数是:

$$\mathscr{L}=U(x_1,x_2)+\lambda(M-p_1x_1-p_2x_2)$$

将 $\mathscr{L}$ 对 x_1,x_2,λ 求偏导可得:

$$\mathscr{L}_1=U_1-\lambda p_1=0 \tag{6-45a}$$

$$\mathscr{L}_2=U_2-\lambda p_2=0 \tag{6-45b}$$

$$\mathscr{L}_3=U_3-\lambda p_3=0 \tag{6-45c}$$

由于 $\mathscr{L}$ 是 λ 的线性函数,$\mathscr{L}_\lambda$ 仅是预算约束。将 $\lambda p_1,\lambda p_2$ 移到方程右边,将方程相互除可得 $\frac{U_1}{U_2}=\frac{p_1}{p_2}$,这正是直接代入时得出的相切条件。

经济学中的许多问题,带有不只一个约束。例如,一个著名的一般均衡模型:一个小国在世界价格固定假设下极大化它的产值,同时受几个约束条件限制,这些约束条件规定几种生产要素量不能超过既定数额,带 r 种约束的极大化问题的一般数学结构是:

求最大化 $f(x_1,\cdots,x_n)=y$ (6-46)

当满足条件

$$\begin{aligned} &g^1(x_1,\cdots,x_n)=0\\ &\vdots\\ &g^r(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{aligned} \tag{6-47}$$

$r<n$(为什么?)

这个问题的一阶条件可以通过一般化以前的拉格朗日乘子法求得,将每个约束条件乘以 λ^j,可得拉格朗日函数。

$$\mathscr{L}=f(x_1,\cdots,x_n)+\lambda^1g^1(x_1,\cdots,x_n)+\cdots+\lambda^rg^r(x_1,\cdots,x_n) \tag{6-48}$$

$\mathscr{L}$ 对 $n+r$ 个变量 x_i,λ^j 求偏导,可得:

$$\mathscr{L}_i=f_i+\lambda^1g_i^1+\cdots+\lambda^rg_i^r=0 \qquad i=1,\cdots,n \tag{6-49}$$

$$\mathscr{L}_j=g^j=0 \qquad j=1,\cdots,r \tag{6-50}$$

g_i^j 表示 $\partial g^j/\partial x_i$。上式的证明涉及更高级的方法,这将在下节给出。

6.4 多约束情况的极大化

考虑

最大化 $f(x_1,\cdots,x_n)=y$

当满足条件 $g^1(x_1,\cdots,x_n)=0$

$$\vdots$$

$$g^r(x_1,\cdots,x_n)=0$$

令 $x_i=x_i(t)$，$i=1,\cdots,n$。像以前一样，极大值的一阶条件是：

$$\frac{dy}{dt}=f_1\frac{dx_1}{dt}+\cdots+f_n\frac{dx_n}{dt}=0 \tag{6-51}$$

对任意的$\frac{dx_1}{dt},\cdots,\frac{dx_n}{dt}$要满足：

$$g_1^1\frac{dx_1}{dt}+\cdots+g_n^1\frac{dx_n}{dt}=0 \tag{6-52}$$

$$\vdots$$

$$g_1^r\frac{dx_1}{dt}+\cdots+g_n^r\frac{dx_n}{dt}=0$$

其中 $g_i^j=\partial g^j/\partial x_i$。

对任意函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$来说，f 的梯度，记作∇f，是由 f 的一阶偏导构成的向量：

$$\nabla f=(f_1,\cdots,f_n)$$

f 的微分可写成：

$$dy=\nabla f\mathbf{dx}$$

其中 $\mathbf{dx}=(dx_1,\cdots,dx_n)$。在平面上，$dy=0$，并且$\nabla f$ 与切平面正交。f 的梯度，∇f，因此代表 $f(x_1,\cdots,x_n)$最大增长的方向。

注意，方程(6-51)是∇f 与 $\boldsymbol{h}=(h_1,\cdots,h_n)=(dx_1/dt,\cdots,dx_n/dt)$分量乘积，同样方程组(6-52)是$\nabla g^j$ 与 $\boldsymbol{h}$ 的分量乘积。令∇g 表示 $r\times n$ 矩阵，各排由$\nabla g^1,\cdots,\nabla g^r$ 构成，则方程组(6-51)和(6-52)可分别写成：

$$\nabla f\cdot\boldsymbol{h}=0 \tag{6-53}$$

任意 $\boldsymbol{h}\neq 0$ 要满足：

$$(\nabla g)\boldsymbol{h}=\mathbf{0} \tag{6-54}$$

假定矩阵∇g 秩为 r，等于约束个数。这表明约束条件是独立的，即不存在多余的约束。

如果∇g 的秩少于 r，比如说 $r-1$，那么有一个约束可被消去，而 dx_i/dt 值域不受消去的影响。这就好像施加了一种票券限制，面票券的价格与原来货币价格成比例。在这种情况下，这附加的票券限制要么是多余的要么与原来的预算约束矛盾。

假定∇g 的秩为 r，∇g 的各排，即梯度向量$\nabla g^j=(g_1^j,\cdots,g_n^j)$，$j=1,\cdots,r$，形成了 n 维欧氏空间 E_n 的一个 r 维子空间 E_r 的一组基。从(6-54)中，可知向量 $\boldsymbol{h}$ 都与 E_r 正交；因此，它们必定全在剩下的 $n-r$ 维空间 E_r' 中，然而从(6-53)可知，∇f 是与所有 $\boldsymbol{h}$ 正交，因此也与 E_r 正交。因此，∇f 必定在 E_r 中，既然∇g^j 是 E_r 的一组基，∇f 能由∇g^j 独一无二的表达：

$$\nabla f=\lambda^1\nabla g^1+\cdots+\lambda^r\nabla g^r \tag{6-55}$$

然而，这等价于令对 $\mathcal{L}=f-\sum\lambda^j g^j$ 对 $x_1,\cdots,x_n$ 的偏导为 0。

6.5 二阶条件

在以上两节中，得到了为受多约束的函数达到稳定值必需的一阶条件。每当函数达到极大值、极小值、鞍点时，这些条件都被隐含。现在我们要求二阶条件，通过二阶条件判定平稳值的性态。讨论将主要限于两个变量的情况，在本节最后陈述一个一般性的定理。

考虑两变量问题

最大化 $f(x_1,x_2)=y$

当满足条件 $g(x_1,x_2)=0$

拉格朗日函数是 $\mathscr{L}(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2)$，一阶条件是：

$$\frac{dy}{dt}=f_1\frac{dx_1}{dt}+f_2\frac{dx_2}{dt}=0 \tag{6-56}$$

对所有的 $dx_1/dt, dx_2/dt$ 要满足：

$$g_1\frac{dx_1}{dt}+g_2\frac{dx_2}{dt}\equiv 0 \tag{6-57}$$

这些条件隐含 $\mathscr{L}_1=f_1+\lambda g_1=0, \mathscr{L}_2=f_2+\lambda g_2=0$。

极大值的充分条件是所有满足(6-57)的 $dx_1/dt, dx_2/dt$ 使得 $d^2y/dt^2<0$。相似地，在这些条件下，隐含着该平稳值为极小值，这些条件怎么能写成更有用的形式，将(6-56)对 t 微分，充分性的二阶条件是：

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+f_2\frac{d^2x_2}{dt^2}+f_{11}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+2f_{12}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt}+f_{22}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2<0 \tag{6-58}$$

当满足条件 $$g_1\frac{dx_1}{dt}+g_2\frac{dx_2}{dt}\equiv 0 \tag{6-57}$$

既然(6-57)是一个恒等式，将它对 t 微分，同时记住 g_1, g_2 是 $x_1(t), x_2(t)$ 的函数。可得：

$$g_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+g_2\frac{d^2x_2}{dt^2}+g_{11}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+2g_{12}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt}+g_{22}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2\equiv 0 \tag{6-59}$$

将 λ 乘以(6-59)，然后加到(6-58)：

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}=&(f_1+\lambda g_1)\frac{d^2x_1}{dt^2}+(f_2+\lambda g_2)\frac{d^2x_2}{dt^2}+(f_{11}+\lambda g_{11})\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\\&+2(f_{12}+\lambda g_{12})\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt}+(f_{22}+\lambda g_{22})\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2<0\end{aligned} \tag{6-60}$$

当满足条件 $$g_1\frac{dx_1}{dt}+g_2\frac{dx_2}{dt}\equiv 0$$

然而，由一阶条件，可知，$\mathscr{L}_1=f_1+\lambda g_1=0, \mathscr{L}_2=f_2+\lambda g_2=0$。$\mathscr{L}_{11}=f_{11}+\lambda g_{11}, \mathscr{L}_{12}=f_{12}+\lambda g_{12}$。如果我们简化记号，并令 $h_1=dx_1/dt, h_2=dx_2/dt$，那么极大值的二阶充分性条件是：

$$\mathscr{L}_{11}h_1^2+2\mathscr{L}_{12}h_1h_2+\mathscr{L}_{22}h_2^2<0 \tag{6-61}$$

对所有 $h_1,h_2\neq 0$ 要满足：

$$g_1h_1+g_2h_2\equiv 0 \tag{6-62}$$

对 n 个变量一个约束时的情况，推导与上述路线相似，可得：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathscr{L}_{ij}h_ih_j<0 \tag{6-63}$$

对所有的 h_i,h_j 要满足：

$$\sum_{i=1}^{n}g_ih_i\equiv 0 \tag{6-64}$$

在这种情况，矩阵$(\mathscr{L}_{ij})$是受约束的负定阵。

方程组(6-61)和(6-62)能结合成一种有用的表达式。从(6-62)可得：

$$h_2=-h_1\frac{g_1}{g_2}$$

将其代入(6-61)可得：

$$\mathscr{L}_{11}h_1^2+2\mathscr{L}_{12}h_1\left(-h_1\frac{g_1}{g_2}\right)+\mathscr{L}_{22}\left(-h_1\frac{g_1}{g_2}\right)^2<0$$

或，将上式乘以 g_2^2：

$$(\mathscr{L}_{11}g_2^2-2\mathscr{L}_{12}g_1g_2+\mathscr{L}_{22}g_1^2)h_1^2<0 \tag{6-65}$$

其中 $h\neq 0$。这隐含着括号内的表达式必须<0。这个表达式如何便于记忆？幸运的是，(6-65)括号的中表达式恰是行列式：

$$H=\begin{vmatrix}\mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & g_1\\ \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & g_2\\ g_1 & g_2 & 0\end{vmatrix} \tag{6-66}$$

的负数，这可以展开 H 进行验证。因为，$f(x_1,x_2)$受 $g(x_1,x_2)=0$ 约束达到极大值的充分性条件除了一阶条件外是 $H>0$。同样，受约束的约束极小值的充分性条件是 $H<0$。$H=0$ 对应 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2=0$ 时的情况，因此无法判明平稳值的类型。注意$\partial^2\mathscr{L}/\partial x\partial\lambda\equiv\mathscr{L}_{1\lambda}\equiv g_1\equiv\mathscr{L}_{\lambda 1}$和$\mathscr{L}_{2\lambda}=\mathscr{L}_{\lambda 2}\equiv g_2$，并且既然 $\mathscr{L}=f+\lambda g$ 是 λ 的线性函数则 $\mathscr{L}_{\lambda\lambda}=0$。因此 H 仅是 $\mathscr{L}$ 对 x_1,x_2,λ 的交叉偏导的行列式，即：

$$H=\begin{vmatrix}\mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \mathscr{L}_{1\lambda}\\ \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \mathscr{L}_{2\lambda}\\ \mathscr{L}_{\lambda 1} & \mathscr{L}_{\lambda 2} & \mathscr{L}_{\lambda\lambda}\end{vmatrix}$$

n 个变量时，情况更为复杂，但法则与无约束时情况类似。拉格朗日函数为 $\mathscr{L}=f(x_1,\cdots,x_n)+\lambda g(x_1,\cdots,x_n)$。考虑 $\mathscr{L}$ 对 $x_1,\cdots,x_n,\lambda$ 的交叉偏导矩阵，如前述 $\mathscr{L}_{i\lambda}=g_i,\mathscr{L}_{\lambda\lambda}=0$：

$$H=\begin{vmatrix}\mathscr{L}_{11} & \cdots & \mathscr{L}_{1n} & g_1\\ \vdots & & & \\ \mathscr{L}_{n1} & \cdots & \mathscr{L}_{nn} & g_n\\ g_1 & \cdots & g_n & 0\end{vmatrix}$$

这个矩阵被称为加边海赛矩阵。

考虑以下结构：将行列式剔除 $n-k$ 排，及对应的 $n-k$ 列，但所加的整条边不在剔除之列，余下的行列式称为 k 阶保边主子式。因此剔除只发生在 1 至 n 排，不会发生在 $n+1$ 排或列。（注意 k 阶保边余子式是 $(k+1)\times(k+1)$ 行列式。）

二阶充分性条件是：

定理 除了一阶条件 $\mathscr{L}_i=0, i=1,\cdots,n$ 和 $\mathscr{L}_\lambda=g=0$ 外，如果所有 k 阶保边主子式有符号 $(-1)^k, k=2,\cdots,n$ 那么平稳值为极大值。如果所有保边主子式是负的，$k=2,\cdots,n$，那么平稳值是极小值。（事实上，只要顺序主子式有这性质，则所有保边主子式有这性质。）

假定，有 r 个约束。$\mathscr{L}=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{j=1}^{r}g^j(x_1,\cdots,x_n)$。拉格朗日函数的加边海赛阵是：

$$H=\begin{bmatrix} \mathscr{L}_{11} & \cdots & \mathscr{L}_{1n} & g_1^1 & \cdots & g_1^r \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \mathscr{L}_{n1} & \cdots & \mathscr{L}_{nn} & g_n^1 & \cdots & g_n^r \\ g_1^1 & \cdots & g_n^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ g_1^r & \cdots & g_n^r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

极小值充分性条件：$k(>r)$ 阶保边主子式有符号 $(-1)^r$，其中 r 为独立约束个数。

极大值充分性条件：$k(>r)$ 阶保边主子式从 $(-1)^{r+1}$ 开始交替变号。

这些保边主子式阶数必须大于 r，因为，考察一下 H 可知（注意右下角 $r\times r$ 的零矩阵），涉及左上角 $n\times n$ 矩阵中少于 r 排 r 列的矩阵的行列式为 0，注意 k 阶保边主子式有 $k+r$ 排和列。二阶条件的另一种表达在表 6-1 中给出，在这个表中，$m\geqslant 2r+1$ 是整个行列式的规模。

表 6-1 二阶条件：$m\times m$ 保边主子式的符号

条件	约束		
	0	1	r
Maximum	$(-1)^m$ $m=1,\cdots,n$	$(-1)^{m-1}$ $m=3,\cdots,n+1$	$(-1)^{m-r}$ $m=1+2r,\cdots,n+r$
Minimum	$(-1)^0=+1$	$(-1)^1=-1$	$(-1)^r$

带约束极大值的几何表示

我们将无约束极大值想像成三维空间的山顶，山的表面在山顶必须是凹的。带约束极大值（或极小值）则要复杂一点。考虑下列问题：

最大化 $f(x_1,x_2)=y$

当条件满足　　$g(x_1, x_2) = k$

约束 $g(x_1, x_2) = k$ 代表 x_1x_2 平面的一条曲线；我们可以将它视作一条"边界线"，即约束消费或生产的某种界限。假定一阶偏导 g_1 和 g_2 是正的，那么边界线的斜率 $-g_1/g_2$ 是负的，并且随着 k 增加，边界线向 x_1x_2 平面上的东北角移动。图 6-2 描述了三条边界线：在平面(a)，边界线是凹的；在平面(b)，它是线性的；在平面(c)，它是凸的。

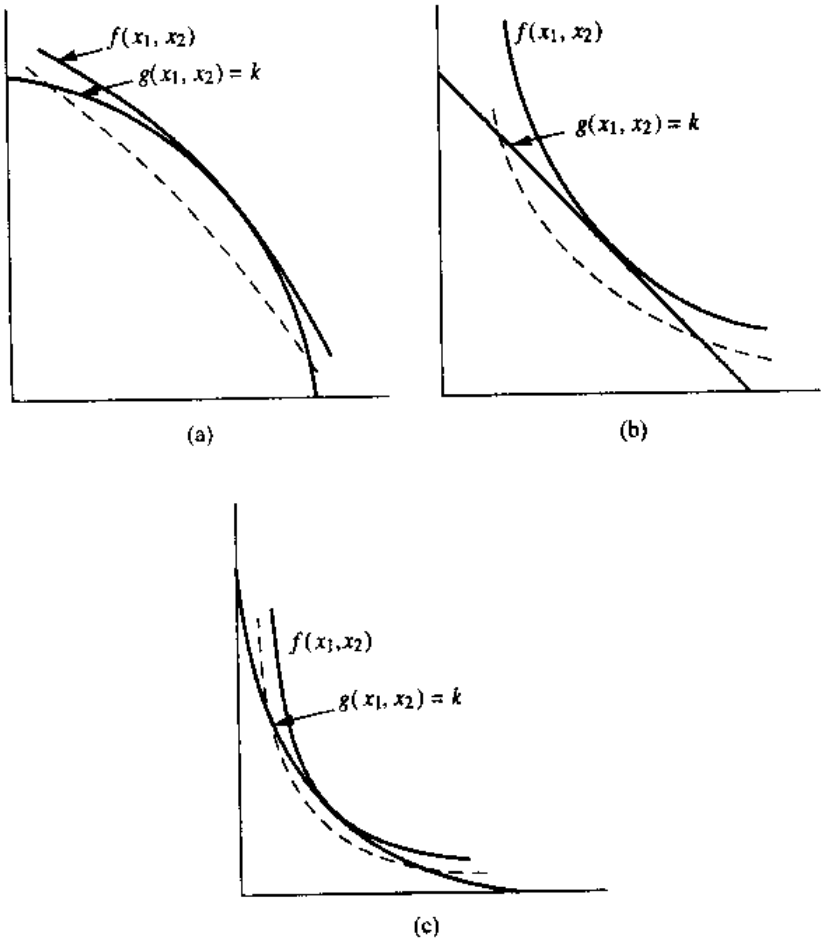

图 6-2　约束条件下极大化。对增函数而言，约束条件下极大化要求，目标函数的等水平线或者凹得比约束等水平线轻些或凸得比约束等水平线更厉害些。如果约束如(b)中是线性的或如(c)中是凸的，目标函数的等水平线必须凸向原点，即目标函数必须是拟凹的。

假定 $f(x_1, x_2)$ 的一阶偏导也是正的，以致 f 的水平曲线斜率 $(-f_1/f_2)$ 也是负的，并且等水平曲线离原点越远 f 的值越大。直观上很明显，如果带约束的极大值是出现在边界线上的内点(即不是角点，角点为边界线与轴线交点)，那么极大值出现在 f 的等水平线与边界线相切的点上。这正是以前得到的代数条件 $-\dfrac{f_1}{f_2} = -\dfrac{g_1}{g_2}$。然而，极大值与极小值都隐含

着相切条件。如果这个条件要描述极大值，目标函数就要比约束边界线凹得程度轻一些，如(a)中所示；或者比边界线更凸一些如(b)和(c)所示。

如果约束条件是线性的，等水平线必须凸向原点。凸向原点是消费者无差异曲线和等产量线的经典形状。然而这个刻画事实上是不精确的。要在线性约束下取得极大值，要求目标函数具有的基本性质是 $f(x_1, x_2)$ 严格增且拟凹，这是以后要定义的特性。

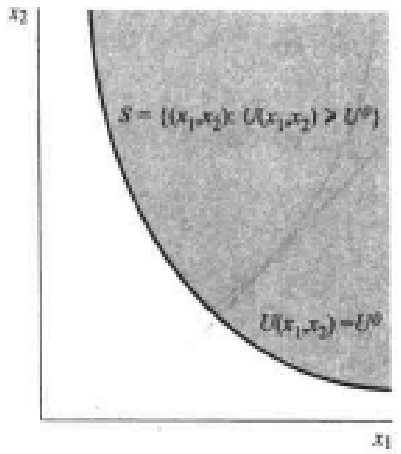

图 6-3 拟凹性：任给定一个数，比如说 U^0，使得函数 f 大于 U^0 的所有点组成的集合是凸集，则该函数是拟凹的。

考虑图 6-3 中所示的典型无差异曲线 U^0。考虑代表偏好比 U^0 上点强的点集合 S，图中阴影区域。这个集合有一个性质：S 中任两点连结成的直线段也在 S 中。满足这个性质的集合称做凸集(不要与凸函数混淆)。(代表偏好比 U^0 弱的点集合，就不是凸集。)代数上，如果 $x^0=(x_1^0, x_2^0)$ 和 $x^1=(x_1^1, x_2^1)$ 是 x_1x_2 平面上两点，$x^t=tx^0+(1-t)x^1$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 代表连结 x^0 和 x^1 的直线段上任意的点。如果对某函数而言，所有满足使其取值大于或等于某任意给定值的点组成的集合是凸集，则该函数是拟凹的。即 $U(x_1, x_2)$ 是拟凹的，如果 $U(x^1)\geqslant U(x^0)$，隐含着 $U(tx^0+(1-t)x^1)\geqslant U(x^0)$，$0\leqslant t\leqslant 1$。(这个定义可以直接扩展到 n 个变量时的情况。)我们应注意到如果离原点越远函数值越小，拟凹性使得等水平线凹向原点。

回忆第 2 章所述，如 f 满足 $f(tx^0+(1-t)x^1)\geqslant tf(x^0)+(1-t)f(x^1)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则 f 是凹函数。凹性隐含着拟凹性：假定 $f(x^1)\geqslant f(x^0)$，则 $f(tx^0+(1-t)x^1)\geqslant tf(x^0)+(1-t)f(x^1)\geqslant tf(x^0)+(1-t)f(x^0)=f(x^0)$。然而反过来就不对。拟凹性是比凹性更弱的限制。求无约束极大值要求凹性，求受线性约束极大值只要求拟凹性就够了。在以前的定理中，涉及保边主子式符号的二阶条件代数上定义了约束条件下极大值(或极小值)所要求目标函数和约束函数要具有的几何性质。如果约束条件是线性的，极大值的二阶条件代数上定义了目标函数的拟凹性。(这要求额外的一个步骤，即用 f 的一阶偏导去取代加边行和列中的 g 的一阶偏导。)如果求一个受约束的线性目标函数的极小值，同样这些二阶条件描述了约束函数的拟凹性质。这种情况将在第 8 章遇到，即受产量约束的成本极小化。这些概念将在下几章应用。最后，虽然不易证明但是确是事实：如果函数 $f(x)$，$x=(x_1, \cdots, x_n)$ 是拟凹和线性齐次的，它就是(弱)凹的。同样，如果 f 是严格拟凹和 r 次，$0<r<1$，它是严

格凹的，证明留作练习。

例　考虑基本的消费者理论模型，受 $p_1x_1+p_2x_2=M$ 约束极大化 $U(x_1,x_2)$。（看图 6-1）假定消费者认为多比少好，无差异曲线排序为 $U^2>U^1>U^0$。无差异曲线与预算约束切点代表受线性预算约束效用极大值而不是极小值点，要求的条件是效用函数严格增且拟凹。在两变量模型，这些条件隐含着通常的形状“凸向原点”。这些假定包括边际替代率递减法则，即在两维情况，无差异曲线的斜率随 x_1 的增加而减少，在第 3 章中我们证明了这种情况的代数表达是（看 3.5 节，方程(3-24)）：

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\equiv[-U_2^2U_{11}+2U_{12}U_1U_2-U_1^2U_{22}]\frac{1}{U_2^3}>0 \tag{6-67}$$

如果这是正的，假定 $U_2>0$，即消费者对商品 2 不满足，则方括号内的项必须是正的，但再一考察，括号内项等于下列行列式：

$$H'=\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & -U_1 \\ U_{21} & U_{22} & -U_2 \\ -U_1 & -U_2 & 0 \end{vmatrix}>0 \tag{6-68}$$

然而，从效用最大化一阶条件(6-45)可知，$U_1=\lambda p_1$，$U_2=\lambda p_2$。将这些代入 H' 然后将最后一排和一列除以 λ，$H'>0$ 等价于：

$$H=\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}>0 \tag{6-69}$$

但 H 被看做加边海赛阵的行列式，加边海赛阵即使 λ 对 x_1，x_2，λ 的交叉偏导，这与这节的一般定理相一致。

6.6　一般方法论

在这一章开始，我们考虑无约束极大化问题的一般经济模型。现在让我们考察有一个约束条件的模型。

考虑某个经济代理人按以下一般模型行动：

最大化　　$f(x_1,x_2,\alpha)=y$　　(6-70)

当条件满足　　$g(x_1,x_2,\alpha)=0$　　(6-71)

其中 x_1，x_2 是选择变量，α 是参数或参数向量（代理人无法控制）。环境的自治变化即参数 α 的变化将导致什么反应？

极大值的一阶条件：

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_1&=f_1(x_1,x_2,\alpha)+\lambda g_1(x_1,x_2,\alpha)=0 \\ \mathscr{L}_2&=f_2(x_1,x_2,\alpha)+\lambda g_2(x_1,x_2,\alpha)=0 \\ \mathscr{L}_\lambda&=g(x_1,x_2,\alpha)=0 \end{aligned} \tag{6-72}$$

方程组(6-72)表示四个变量的三个方程。假定隐函数定理可以应用，至少这些方程原则上可解出选择函数：

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^*(\alpha) \\ x_2 &= x_2^*(\alpha) \\ \lambda &= \lambda^*(\alpha) \end{aligned} \tag{6-73}$$

将这些值代入(6-72)，可得等式：

$$\begin{aligned} &f_1(x_1^*, x_2^*, \alpha) + \lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*, \alpha) \equiv 0 \\ &f_{21}(x_1^*, x_2^*, \alpha) + \lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*, \alpha) \equiv 0 \\ &g(x_1^*, x_2^*, \alpha) \equiv 0 \end{aligned} \tag{6-74}$$

既然我们对当 α 变化时 x_i^* 的变化感兴趣，我们利用链导法则将(6-74)对 α 求偏导，第一个方程可得：

$$f_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} + f_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} + f_{1\alpha} + \lambda^* g_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} + \lambda^* g_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} + \lambda^* g_{1\alpha} + g_1\frac{\partial \lambda^*}{\partial \alpha} \equiv 0$$

注意，$\mathscr{L}_{11} = f_{11} + \lambda^* g_{11}$，…，这个方程可以更方便地写成：

$$\mathscr{L}_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} + \mathscr{L}_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} + g_1\frac{\partial \lambda^*}{\partial \alpha} \equiv -\mathscr{L}_{1\alpha} \tag{6-75}$$

相似地，将(6-74)第二和第三个方程对 α 微分可得：

$$\mathscr{L}_{21}\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} + \mathscr{L}_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} + g_2\frac{\partial \lambda^*}{\partial \alpha} \equiv -\mathscr{L}_{2\alpha} \tag{6-76}$$

$$g_1\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} + g_2\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} \equiv -g_\alpha \tag{6-77}$$

以矩阵形式，这三个方程可写成：

$$\begin{bmatrix} \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & g_1 \\ \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathscr{L}_{1\alpha} \\ -\mathscr{L}_{2\alpha} \\ -g_\alpha \end{bmatrix} \tag{6-78}$$

注意，(6-78)左边的系数矩阵是拉格朗日函数的二阶偏导矩阵。在无约束极大化模型中，这个系数矩阵是目标函数的二阶偏导矩阵，有约束情况和无约束情况的模型运算是相同的。惟一的不同是二阶充分性条件施加到系数矩阵主子式上的条件。

为什么系数矩阵正好是 λ 的二阶偏导矩阵的理由是等式(6-74)正好是 λ 的一阶偏导：

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_1(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \alpha) \equiv 0 \\ &\mathscr{L}_2(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \alpha) \equiv 0 \\ &\mathscr{L}_\lambda(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \alpha) \equiv 0 \end{aligned} \tag{6-79}$$

(注意，λ^* 并不出现在 $\mathscr{L}_\lambda = g(x_1^*, x_2^*, \alpha) \equiv 0$ 中。)将第一个等式对 α 求偏导可得：

$$\mathscr{L}_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha}+\mathscr{L}_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha}+\mathscr{L}_{1\lambda}\frac{\partial \lambda^*}{\partial \alpha}+\mathscr{L}_{1\alpha}\equiv 0$$

这正是方程(6-75)，注意 $\mathscr{L}_{1\lambda}=g_1$。同样，方程(6-76)和(6-77)直接可以从 $\mathscr{L}_2\equiv 0$，$\mathscr{L}_\lambda\equiv 0$ 中得出。

既然保证方程组(6-72)有解(6-73)的雅科比行列式 J 是由(6-72)的一阶偏导构成，J 实际上是 $\mathscr{L}$ 对 x_1，x_2 和 λ 的二阶偏导的行列式，即(6-78)中系数矩阵的行列式。以后这个行列式将以 H 表示。二阶充分性条件隐藏含这个行列式非 0，因此(6-73)是正确的。按克莱姆法则，这个行列式是 $\partial x_i^*/\partial \alpha$ 和 $\partial \lambda^*/\partial \alpha$ 的解中的分母。现在让我们按无约束模型同样的方法进行讨论。

根据克莱姆法则，求解 $\partial x_1^*/\partial \alpha$，可得：

$$\partial x_1^*/\partial \alpha=\begin{vmatrix}-\mathscr{L}_{1\alpha} & \mathscr{L}_{12} & g_1\\ -\mathscr{L}_{2\alpha} & \mathscr{L}_{22} & g_2\\ -g_\alpha & g_2 & 0\end{vmatrix}\Big/H$$

$$=\frac{-\mathscr{L}_{1\alpha}H_{11}}{H}-\frac{\mathscr{L}_{2\alpha}H_{21}}{H}-\frac{g_\alpha H_{31}}{H} \tag{6-80}$$

其中 H 是系数矩阵行列式，$\partial x_2^*/\partial \alpha$ 和 $\partial \lambda^*/\partial \alpha$ 是：

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha}=\frac{\begin{vmatrix}\mathscr{L}_{11} & -\mathscr{L}_{1\alpha} & g_1\\ \mathscr{L}_{21} & -\mathscr{L}_{2\alpha} & g_2\\ g_1 & -g_\alpha & 0\end{vmatrix}}{H}=\frac{-\mathscr{L}_{1\alpha}H_{12}}{H}-\frac{\mathscr{L}_{2\alpha}H_{22}}{H}-\frac{g_\alpha H_{32}}{H} \tag{6-81}$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial \alpha}=\frac{\begin{vmatrix}\mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & -\mathscr{L}_{1\alpha}\\ \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & -\mathscr{L}_{2\alpha}\\ g_1 & g_2 & -g_\alpha\end{vmatrix}}{H}=\frac{-\mathscr{L}_{1\alpha}H_{13}}{H}-\frac{\mathscr{L}_{2\alpha}H_{23}}{H}-\frac{g_\alpha H_{33}}{H} \tag{6-82}$$

很明显，在目前信息水平下，无法判定 $\partial x_i^*/\partial \alpha$ 与 $\partial \lambda^*/\partial \alpha$ 的符号。这个系统中的信息不足。我们所知道的是这些表述式的分母是正的，但我们没有关于分子的信息。极大值条件并没有规定非对角元余子式的符号。

现在假定参数 α 并没有出现在(6-72)的第二个或第三个方程中，那么 $\mathscr{L}_{2\alpha}\equiv 0$，$g_\alpha\equiv 0$，并且：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha}=\frac{-\mathscr{L}_{1\alpha}\begin{vmatrix}\mathscr{L}_{22} & g_2\\ g_2 & 0\end{vmatrix}}{H}=\frac{\mathscr{L}_{1\alpha}g_2^2}{H} \tag{6-83}$$

现在偏导 $\partial x_1^*/\partial \alpha$ 的符号可判定：既然 $H>0$ 并且由二阶条件 $H_{11}<0$（这里，$H_{11}=-g_2^2<0$），$\partial x_1^*/\partial \alpha$ 与 $\mathscr{L}_{1\alpha}$ 的符号相同。即如果 $\mathscr{L}_{1\alpha}>0$，那么 $\partial x_1^*/\partial \alpha>0$。因此，如果可以说“收入的增加将需求曲线右移”，或“技术改进将下移边际成本曲线”，那么如果收入或技术参数只进入第一个一阶方程，一般来说可以预期相关变量的变化方向（相关变量意指使得 $\mathscr{L}$ 对其求偏导以形成第一个一阶方程的变量）。更简明地说，如果 α 只进入第 i 个一阶方程，

那么$\partial x_i^*/\partial\alpha$和$\mathscr{L}_{i\alpha}$有相同的符号。然而，既然$g_\alpha\equiv 0$，$\mathscr{L}_{i\alpha}=f_{i\alpha}+\lambda g_{i\alpha}-f_{i\alpha}$，因此，正如无约束极大的模型时一样，$\partial x_i^*/\partial\alpha$和$f_{i\alpha}$必定有相同的符号，或：

$$f_{i\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}>0 \tag{6-84}$$

这个结果可扩展到有n个变量时的情况，其准确阐明在本章问题中给出。由于有约束极大值二阶条件施加在主子式上的限制，这个结果成立。

然而，在考察$\partial\lambda^*/\partial\alpha$时，不管$\alpha$怎么进入一阶方程$\partial\lambda^*/\partial\alpha$的符号无法仅由充分性二阶条件判定，例如，假定$\alpha$仅进入约束条件，即第三个一阶方程，那么$-\mathscr{L}_{1\alpha}=-\mathscr{L}_{2\alpha}=0$，并且：

$$\frac{\partial\lambda^*}{\partial\alpha}=\frac{-g_\alpha H_{33}}{H}=-\frac{g_\alpha}{H}(\mathscr{L}_{11}\mathscr{L}_{22}-\mathscr{L}_{12}^2)\neq 0 \tag{6-85}$$

余子式H_{33}是主子式但不是保边主子式，在形成H_{33}时，H上的边被剔除掉了。因此并没有规定$\partial\lambda^*/\partial\alpha$的符号，如果$\alpha$进入任一别的方程，那么非对角元的余子式$H_{31}$和$H_{32}$将进入表达式，这些表达式同样也未被极大值条件规定符号。

同样的理由，每当参数α进入约束条件时，非对角元余子式将出现在$\partial x_i^*/\partial\alpha$的表达式中。因此没有可证伪的隐含规定出现在参数进入约束条件的模型中。

例 为了举例阐述以上所述的原理，让我们考察利润极大化模型，只不过稍微将其变形一下。考虑一个厂商，有生产函数$y=f(x_1,x_2)$，按价格p销售产品，厂商以价格w_1使用生产要素x_1；然而x_2代表企业家投入，且固定在x_2^0水平上。厂商企图极大化净利润R，即总收入与总要素成本之差。代数上，此模型可写成：

最大化 $\qquad R=pf(x_1,x_2)-w_1x_1$

当满足条件 $\qquad x_2=x_2^0$

虽然在第4章中我们将约束条件直接代入目标函数求解，但是这里我们将其作为约束极大化模型求解。即使在此具体例子中，约束条件限定x_2是固定的，为了保持拉格朗日方法分析的结构，仍假定x_2是个变量。

$$\mathscr{L}=pf(x_1,x_2)-w_1x_1+\lambda(x_2^0-x_2)$$

一阶条件是：

$$\mathscr{L}_1=pf_1(x_1,x_2)-w_1=0 \tag{6-86a}$$

$$\mathscr{L}_2=pf_2(x_1,x_2)-\lambda=0 \tag{6-86b}$$

$$\mathscr{L}_\lambda=x_2^0-x_2=0 \tag{6-86c}$$

方程(6-86a)表明厂商雇用x_1直到要素边际产值等于它的边际收入。方程(6-86b)表明拉格朗日乘子λ等于企业家投入的边际产值。然而要素1的价格是由竞争的劳动力市场外生决定的，要素乙的价格是由内生决定的。如果存在一个竞争的企业家服务市场，另一家公司将愿以λ的价格购买此企业家服务。

充分性二阶条件：λ二阶偏导形成的加边海赛矩阵行列式是正的，

$$H=\begin{vmatrix} pf_{11} & pf_{12} & 0 \\ pf_{12} & pf_{22} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}>0 \tag{6-87}$$

展开此行列式，可得 $pf_{11}<0$，注意，在 f_{22} 上无限制；既然实际上只有 x_1 是变量（即使我们在有约束模型中将 x_2 看做变量），厂商惟一可控制的就是雇用 x_1 的数量，存在极大值内点解的惟一要求就是 x_1 的边际产值为递减。

假定充分性二阶条件成立，一阶方程可同时求解出选择函数：

$$\begin{aligned} x_1&=x_1^*(w_1,p,x_2^0) \\ x_2&=x_2^*(w_1,p,x_2^0) \\ \lambda&=\lambda^*(w_1,p,x_2^0) \end{aligned} \tag{6-88}$$

这些选择函数代表对 x_1 和 x_2 的要素需求函数和企业家投入的边际产值。

将方程(6-86a)乘以 x_1^*，(6-86b)乘以 x_2^*，然后两式相加：

$$p(f_1x_1^*+f_2x_2^*)\equiv w_1x_1^*+\lambda^*x_2^* \tag{6-89}$$

如果生产函数是一次齐次的（规模收益不变），那么由欧拉定理，等式左边是 py^*。在这个案例中，(6-89)可以解释成总收入＝总成本，x_2 的总要素成本是它的机会成本 $\lambda^*x_2^*$。因此出规模收益不变，产品被耗尽，即厂商收入刚好等于总要素成本。偶尔，(6-89)是关于 w_1，x_2^0 和 p 而不是关于 x_1 和 x_2 的等式，这种关系仅在要素值满足一阶方程组时才成立，这里假定了充分性二阶条件满足。

现在让我们考察这个模型的比较静态。注意参数 w_1 只进入目标函数，而 x_2^0 进入约束条件。将解(6-88)代入到一阶方程，可得：

$$\begin{aligned} pf_1(x_1^*,x_2^*)-w_1&\equiv 0 \\ pf_2(x_1^*,x_2^*)-\lambda^*&\equiv 0 \\ x_2^0-x_2^*&\equiv 0 \end{aligned} \tag{6-90}$$

既然参数 w_1 只进入第一个一阶方程，因此我们希望可以得一个关于这个参数可证伪的隐含规定，另一方面，参数 x_2^0 出现在约束条件，我们无法期望获得关于此参数的隐含规定。将这些等式对 w_1 求偏导，可得：

$$\begin{pmatrix} pf_{11} & pf_{12} & 0 \\ pf_{21} & pf_{22} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial w_1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6-91}$$

解之可得：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}=\frac{H_{11}}{H}=\frac{-1}{-pf_{11}}<0 \tag{6-92a}$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}=\frac{H_{12}}{H}=\frac{0}{-pf_{11}}=0 \tag{6-92b}$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial w_1}=\frac{H_{13}}{H}=\frac{-pf_{21}}{-pf_{11}}\neq 0 \tag{6-92c}$$

正如我们以前所示，拉格朗日乘子对任何参数的变化率的符号从来不被隐含规定，然而，方程(6-92c)表明如果 x_1 的边际产值随企业家投入的增加而增加，那么企业家投入的边际产值与 x_1 价格的变动方向相反，(如果电梯供给量固定，电梯操作人员工资提高将降低电梯的边际产值。)将方程(6-90)对 x_2^0 求偏导可得矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} pf_{11} & pf_{12} & 0 \\ pf_{21} & pf_{22} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial x_2^0} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial x_2^0} \\ \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial x_2^0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{6-93}$$

解得：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial x_2^0}=\frac{-H_{31}}{H}=\frac{pf_{12}}{-pf_{11}}\neq 0 \tag{6-94a}$$

同样，既然 $x_2=x_2^0$，

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial x_2^0}=\frac{-H_{32}}{H}=\frac{pf_{11}}{-pf_{11}}=1 \tag{6-94b}$$

并且：

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial x_2^0}=\frac{-H_{33}}{H}=\frac{-p^2(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)}{-pf_{11}}\neq 0 \tag{6-94c}$$

注意因 $H_{13}=H_{31}$，$\dfrac{\partial x_1^*}{\partial x_2^0}=-\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial w_1}$。我们在下一章从(6-94c)中可知参数化的企业家投入水平对企业家投入边际产值有不确定的影响。仅当我们额外假定生产函数是凹的，以致 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$ 才有 $\partial\lambda^*/\partial x_2^0<0$。在这种情况下，如普通的利润极大化问题一样，$x_2$ 的边际产值递减，x_2 用的越多其边际值越低，因此假定除了极大化假设外的信息导致额外的结果。

总而言之，对于只进入目标函数的参数而言，可证伪的隐含规定可能得到。因为这样的一个参数，例如 w_1，进入且只进入一个一阶条件，$\dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_1}$的符号可能确定。对于进入约束条件的参数，在此模型中如 x_2^0，仅在极大化假设的基础上不可能得出可证伪的隐含规定，虽然额外的假定可能得到有用的命题。

习题

1. 考虑带约束极大化问题

最大化 $f(x_1,\cdots,x_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=y$

当满足条件　　$g(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_m)=0$

证明：如果某参数 a_i 进入且只进入第 i 个一阶方程则：

$$\mathscr{L}_{a_i}\frac{\partial x_i^*}{\partial a_i}>0。$$

2. 在多约束情况下证明上题同样的结果。

3. 证明每种物品的边际效用递减不与无差异曲线的凸性等价。

4. 用代入法或拉格朗日法求 $f(x_1,x_2)$具有约束 $g(x_1,x_2)=0$ 的极大值或极小值，一定要检验二阶条件。

(a) $f(x_1,x_2)=x_1,x_2$；　$g(x_1,x_2)=2-(x_1+x_2)$。

(b) $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$；　$g(x_1,x_2)=1-x_1x_2$。

(c) $f(x_1,x_2)=x_1x_2$；　$g(x_1,x_2)=M-p_1x_1-p_2x_2$，　其中 p_1,p_2,M 为参数。

(d) $f(x_1,x_2)=p_1x_1+p_2x_2$；　$g(x_1,x_2)=U^0-x_1x_2$。

5. 证明问题 4(a)和 4(b)的二阶条件是等价的；同样问题 4(c)和 4(d)的二阶条件是等价的。

6. 考虑下类模型：

最大化　　$y=f(x_1,x_2)+\alpha x_1$

当满足条件　　$g(x_1,x_2)+\beta x_2=0$

其中 x_1 和 x_2 是选择变量并且 α 和 β 是参数，利用拉格朗日函数：

$$\mathscr{L}=f(x_1,x_2)+\alpha x_1+\lambda(g(x_1,x_2)+\beta x_2)$$

(a) 证明 $\partial x_1^*/\partial\alpha>0$ 但无法得到有关 β 的可证伪的比较静态结果。

(b) 证明 $\partial x_1^*/\partial\beta=\lambda^*(\partial x_2^*/\partial\alpha)+x_2^*(\partial\lambda^*/\partial\alpha)$。

7. 考虑一般极值问题

最大化　　$y=f(x_1,x_2,\alpha)$

当满足条件　　$g(x_1,x_2)=k$

其中 x_1 和 x_2 是选择变量，α 和 k 是参数，利用拉格朗日函数：

$$\mathscr{L}=f(x_1,x_2,\alpha)+\lambda(k-g(x_1,x_2))$$

(a) 证明 $f_{1\alpha}(\partial x_1^*/\partial k)+f_{2\alpha}(\partial x_2^*/\partial k)=\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial\alpha}$。

(b) 目标函数和约束条件为什么函数形式时可得到 $\dfrac{\partial x_1^*}{\partial k}=\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial\alpha}$？

8. 考虑分别以价格 w_1 和 w_2 雇用两种要素 x_1 和 x_2 的厂商，如果此厂商只是许多同质厂商中的一个，那么在长期中，利润最大化点将是其平均成本(AC)曲线的最小值点。

最小化　　$AC=\dfrac{w_1x_1+w_2x_2}{f(x_1,x_2)}$

其中 $y=f(x_1,x_2)$是厂商生产函数。

(a) 证明 minAC 的一阶必要条件是 $w_i-AC^*f_i=0,i=1,2$，其中 AC^* 是 minAC。并解释。

(b) 证明 minAC 的充分二阶条件与短期(产出价格固定)利润极大化一样，即：

$$f_{11}<0,f_{22}<0,f_{11}f_{12}-f_{12}^2>0$$

(提示：将 AC^*f_i 微分时，要记得由一阶条件有 $\dfrac{\partial AC^*}{\partial x_i}=0$)

(c) 求出形如 $\partial x_i^*/\partial w_j$ 的所有偏导(要记得 w_1,w_2 出现在 AC)。证明此模型既没有隐含 $\partial x_i^*/\partial w_i<0$，

也没有隐含$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j}=\frac{\partial x_j^*}{\partial w_i}$。

(d) 证明 $f_1x_1^*+f_2x_2^*\equiv y^*$，这是欧拉定理吗？(如果它是，你已证明所有生产函数是线性齐次的!)

9. 考虑生产函数为 $y=f(x_1,x_2)$的厂商，它以价格 p 在一个竞争市场上销售产品，然而要素市场存在垄断者，即它面临上升的要素供给曲线，单位要素价格随着使用量增加而上升，即 $w_1=k_1x_1$，$w_2=k_2x_2$。厂商被认为是利润极大化者。

(a) 代数上怎么描述要素 1 供给量的减少？

(b) 如果 x_1 供给量减少，要素 1 的使用量会减少吗？给出证明。

(c) 如果 x_1 供量减少要素 2 的使用量如何变化？

(d) 以一句话解释，为什么该厂商的要素需求曲线不存在。

(e) 假定政府将厂商 x_2 的使用量限定在以前利润极大化水平。如果 x_1 的供给量减少，x_2 的使用量如何变化？

10. 证明 6-5 节末所阐述的命题，即如果函数 $f(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$是拟凹且线性齐次，则它是(弱)凹的，并且如果 f 是严格拟凹和 r 次齐次，$0<r<1$，则它是严格凹的。

部分参考文献

Allen, R. G. D. : *Mathematical Analysis for Economists*, Macmillan&Co., Ltd., London, 1938. Reprinted by St. Martin's Press, Inc., New York, 1967.

Apostol, T. : *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1957.

Courant, R. : *Differential and Integral Calculus* (Trans.), Interscience Publishers, Inc. New York, 1947.

Hadley, G. : *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1964.

Hancock, H. : *Theory of Maxima and minma*, Ginn and Company, Boston, MA, 1917. Reprinted by Dover Publications, Inc., New York, 1960.

Panik, M. J. : *Classical Optimization: Foundations and Extensions*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976.

Samuelson, P. A. : *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947.

第 7 章　包络定理和对偶

7.1　问题的历史

在 19 世纪 30 年代初，一个非常著名的经济学家，Jacob Viner 分析了短期和长期厂商行为。Viner 将一种生产要素，假定是资本，是固定的，而其他要素，如劳动是变动的，时间区间定义为短期。他画出一系列短期成本曲线，这些曲线的最小值点（对越来越大的资本投入来说）首先下降然后上升。Viner 推想如果两种投入都是变量，那么“长期”平均成本将一直少于或等于对应的短期成本。他因此总结长期平均成本应画成所有短期曲线的包络线。最终的图形，如图 7-1，出现在几乎每一本中级价格理论课文中。

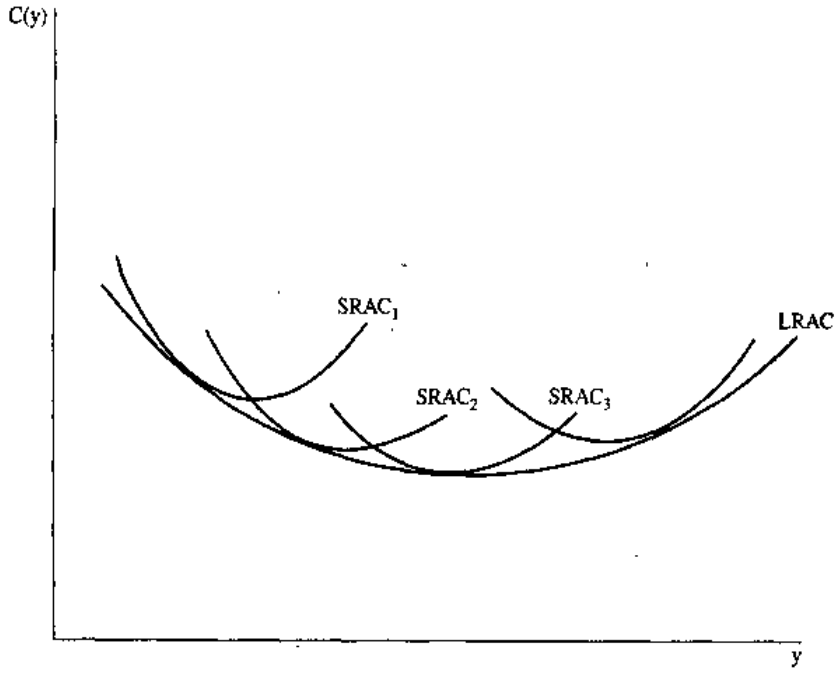

图 7-1　现代的 Viner-Wong 图表明长期平均成本曲线是短期平均成本曲线族的包络线。

然而，Viner 也在困惑，既然单位成本减少意味着利润增加，最终的长期曲线却并不通过短期曲线的最小值点。另外，在切点处，长期和短期曲线的斜率是相同的，这表明不管资本是否是不变，平均成本以相同速率下降（或上升）。Viner 因此要求他的制图员 Wong，画

一条长期平均成本曲线，该曲线既要是短期曲线的包络线又要通过这些短期曲线的最小值点。当 Wong 表示这种情况不可能时，Viner 选择画出通过短期平均成本曲线最小值点的长期平均成本曲线而不是一条包络曲线。这个选择对许多经济学家是种安慰。

问题很快被保尔·萨缪尔森从代数上解决，他证明长期和短期曲线相切是正确的。（见 Paul Samuelson, Foundations of Economic Analysis , Harvard University Press , Cambridge, MA, 1947。）然而，无论一个变量是否被限为常数，目标函数的变化率都应是同样的，这一点使人有点困惑，当经济学家进一步分析这个疑问时，最令人惊奇的是发现作为包络定理基础的关系也揭示了关于可证伪的比较静态定理存在性的基本定理。这就是现在我们要转向的问题。

7.2 利润函数

萨缪尔森按以下步骤开始他的分析。考虑有两个选择变量 x_1, x_2 和一个参数 α 的一般的极大化模型：

最大化 $$y=f(x_1, x_2, \alpha)$$

（将其扩展到 n 个变量比较容易。在后面我们将考虑多个参数的模型。）当然，一阶必要条件是 $f_1=f_2=0$。假定充分性二阶条件成立，可以一阶条件解出选择函数 $x_i=x_i^*(\alpha)$。如果现在我们将这些解代入目标函数，我们得到函数：

$$\phi(\alpha)=f(x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha), \alpha) \tag{7-1}$$

函数 $\phi(\alpha)$ 是当 x_i 取给定 α 使得 f 极大化的值时，f 的值。因此 $\phi(\alpha)$ 代表任意给定 α 时，f 的极大值。我们将 $\phi(\alpha)$ 叫做间接目标函数。

α 变化时 ϕ 怎么变？将 ϕ 对 α 微分：

$$\phi_\alpha(\alpha)=f_1\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha}+f_2\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha}+f_\alpha$$

然而，从一阶条件，$f_1=f_2=0$，因此右边头两项消失。因此：

$$\phi_\alpha(\alpha)=f_\alpha \tag{7-2}$$

方程(7-2)说的是当 α 变化时，x_1, x_2 随 α 变化而最优变化时，最大值 f 的变化率等于将 x_2, x_2 限为常数时当 α 变化时 f 的变化率。自从 Viner 原创性的文章发表后，这个结果一直困惑许多经济学家。

在我们研究(7-2)的几何意义前，让我们以利润极大化模型验证这个结果。从 $\max\pi=pf(x_1, x_2)-w_1x_1-w_2x_2$ 得出的选择函数是 $x_1=x_1^*(w_1, w_2, p)$, $x_2=x_2^*(w_1, w_2, p)$。如果这些利润极大化水平的投入代入目标函数，按定义最终利润水平是在这些要素和产业价格下可达到的最大利润。代数上，

$$\pi^*(w_1, w_2, p)=pf(x_1^*, x_2^*)-w_1x_1^*-w_2x_2^* \tag{7-3}$$

函数 $\pi^*(w_1, w_2, p)$被称作利润函数，它是该模型的间接目标函数，它的值一直是给定 w_1, w_2 和 p 时的最大利润。

当 w_1 变化时，$\pi^*(w_1, w_2, p)$如何变化？我们可以把其他价格 x_1, x_2 投入水平视作常数，将目标函数对求 w_1 偏导，在此例子中，可得：

$$\frac{\partial \pi}{\partial w_1} = -x_1$$

这里并没有用到利润最大化假设。这个关系仅说明，例如，如果一家公司雇用着 100 个工人，并且如果工资增长，比如说 1 元，利润将会减少 100 元。然而，一个利润极大化公司将在工资上升时减少工人数目。如果我们要估计当 w_1 变化时极大化利润如何变化，我们必须微分间接利润函数，将(7-3)对 w_1 微分：

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w_1} = p\left(f_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} + f_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\right) - w_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} - x_1^* - w_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}$$

变形，可得：

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w_1} = (pf_1 - w_1)\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}\right) + (pf_2 - w_2)\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\right) - x_1^*$$

然而，右边括号内的项在 x_1, x_2 取利润极大化时的值时为 0。因此：

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w_1} = -x_1^* = \frac{\partial \pi}{\partial w_1} \tag{7-4}$$

其中后一项，必须在 x_1^* 取值。方程(7-4)说明在利润极大化投入水平下，利润对某个要素价格变化的瞬间反应率无论要素都被限为常数或可随此要素价格变化而变化，都是一样的。另外，这个瞬间变化率的值是此要素需求函数 $x_1 = x_1^*(w_1, w_2, p)$的负数。

利用几何图形，我们能更好地理解这个结果。假定要素和产出价格为 w_1^0, w_2^0, p^0，隐含着：

$$x_1^0 = x_1^*(w_1^0, w_2^0, p^0) \qquad x_2^0 = x_2^*(w_1^0, w_2^0, p^0)$$

让我们保持 w_2 和 p 不变的同时，变动 w_1，观察利润水平如何变化。具体来说，我们在一开始将 x_1 和 x_2 固定在 x_1^0 和 x_2^0。在图 7-2，受约束的利润函数：

$$\pi(w_1, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0) = p^0 f(x_1^0, x_2^0) - w_1 x_1^0 - w_2^0 x_2^0 \tag{7-5}$$

表示了当 w_1 变化，其余一切不变化时的利润水平。(注意 方程(7-5)中的除了 w_1 外的每个变量都有上标 0。)注意 $\pi(w_1, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0)$是 w_1 的线性函数。它的斜率是$\frac{\partial \pi}{\partial w} = -x_1^0$。

现在考虑 $\pi^*(w_1, w_2^0, p^0)$与这条线的关系。既然 $\pi^*(w_1, w_2^0, p^0)$依定义是给定要素和产出价格时的极大利润值，一般来说它位于 $\pi(w_1, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0)$定义的直线段之上。然而，当 $w_1 = w_1^0$，恰好最佳要素水平被使用，因为 x_1^0 和 x_2^0 就是被定义为 $w_1 = w_1^0$ 时的利润极大化投入水平。

因此，在 $w_1 = w_1^0$ 时，$\pi^*(w_1, w_2^0, p^0) = \pi(w_1, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0)$。当 $w_1 \neq w_1^0$，x_1^0 和 x_2^0 的投入水平是“错的”，即非利润最大化。因此在 w_1^0 两边 $\pi^*(w_1, w_2^0, p^0) > \pi(w_1, w_2^0, p^0, x_1^0,$

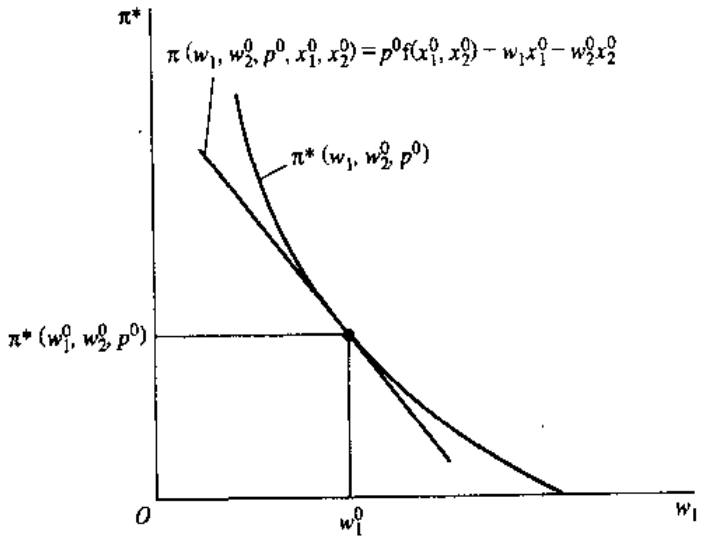

图 7-2 利润函数 $\pi^*(w_1, w_2^0, p^0)$ 和 $\pi(w_1, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0)$ 其中 x_1^0 和 x_2^0 是当 $w_1 = w_1^0$ 时极大化利润的投入水平。

x_2^0)。假定 π^*，π 都可微，π^*，π 在 w_1^0 点必须相切。相切意味着 π^*，π 在 w_1^0 点有相同的斜率。这正是方程(7-4)，$\partial\pi/\partial w_1 = \partial\pi/\partial w_1 = -x_1^*$。

假定我们从 w_1 的其他水平如 w_1^1 开始。在这个例子中我们将 x_1，x_2 固定在这个工资隐含的水平上，$x_1^1 = x_1^*(w_1, w_2^0, p^0)$，$x_2^1 = x_2^*(w_1^1, w_2^0, p^0)$。最终受约束的利润函数将是在 w_1 点与 π^* 相切的另一条直线段，它们在这一点的共同斜率将是 $-x_1^*(w_1^1, w_2^0, p^0)$。我们可以明白包络定理名字的由来：利润函数 $\pi^*(w_1, w_2, p)$ 是当 w_1 变动时所有可能的受约束利润线的包络线。

然而，我们不仅仅得到 π 和 π^* 斜率相等的信息。既然 π^* 在 w_1^0 两边位于 π 上，$\pi^*(w_1, w_2^0, p^0)$ 比 π 必定凸得厉害些(或凹的轻些)。但在这个模型中，π 是线性的，因此 $\pi^*(w_1, w_2^0, p_0)$ 必定如图 7-2 一样对 w_1 是凸的。间接函数是凸的(我们假定严格凸)对此模型的比较静态有严重影响。对 w_1 的凸性意味着 $\partial^2\pi^*/\partial w_1^2 \geqslant 0$。但从方程(7-4)知，$\partial\pi^*/\partial w_1 = -x_1^*(w_1, w_2, p)$。将两边微分，可得

$$\frac{\partial^2\pi^*}{\partial w_1^2} = -\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} \geqslant 0 \tag{7-6}$$

既然在这个模型中要素需求函数 $x_1^*(w_1, w_2, p)$ 事实上是 $\pi^*(w_1, w_2, p)$ 对 w_1 的一阶偏导的负数，要素需求函数的斜率(它对 w_1 的一阶偏导)是 π^* 对 w_1 的二阶偏导负数。既然 π^* 的二阶偏导是正的(非负的)，要素需求函数的斜率必定是负的。因此(至少在此模型中)，间接目标函数(这里是利润函数)的曲率直接隐含着一个重要的比较静态结果。

由对称性，$\pi^*(w_1, w_2, p)$ 对 w_2 是凸的，可得出关于该要素同样的比较静态结果。$\pi^*(w_1, w_2, p)$ 对 p 也是凸的，因此 $\partial^2\pi^*/\partial p^2 = \partial y^*/\partial p \geqslant 0$。该式的证明和几何解释留作练

习。现在我们转向一般的利润极大化模型。不求助于几何直观，能否得出以上结果？

7.3　一般比较静态分析：无约束模型

考虑任意两变量模型，$\max y=f(x_1,x_2,\alpha)$，其中 x_1 和 x_2 是选择变量，并且目前 α 是代表对极大化的代理人行为某种约束的参数。一阶方程组是 $f_1=f_2=0$。解一阶方程组，假定惟一解，$x_1=x_1^*(\alpha)$，$x_2=x_2^*(\alpha)$被隐含。再一次，可证伪的命题由极大化关于当 α 变化时 x_i 变化方向的隐含规定构成。间接目标函数又是 $\phi(\alpha)=f(x_1^*(\alpha),x_2^*(\alpha),\alpha)$。按定义，$\phi(\alpha)$在给定 α 下是 f 的极大值。当 α 变化时，$\phi(\alpha)$和 $f(x,\alpha)$以什么速率变化（一阶和二阶变化率）？

在图 7-3 中，$\phi(\alpha)$被逐点描出。对任意 α^0，$x_1^0=x_1^*(\alpha^0)$和 $x_2^0=x_2^*(\alpha^0)$被隐含。考虑 $f(x_1,x_2,\alpha)$当 x_1 和 x_2 被固定在 x_1^0 和 x_2^0 与 x_1,x_2 是变量时行为的不同。既然 $\phi(\alpha)$是给定 α 时 f 的最大值，一般来说 $f\leqslant\phi$。当 $\alpha=\alpha^0$，正确的 x_i 被选择，因此 $\phi(\alpha)=f(x_1,x_2,\alpha)$在该点成立。在 α^0 两边，错误的（即非极大化）x_i 被使用，因此由定义在 α^0 任一领域 $f(x_1,x_2,\alpha)<\phi(\alpha)$。除非 f 在 α^0 有某种不可微角点，ϕ 和 f 在 α^0 必相切，并且 f 在那点比 ϕ 更凹或凸得轻些。既然这对任意 α 都成立，在 α 的其他值 ϕ 和 f 也相切。从图中可清楚看出 $\phi(\alpha)$是 $f(x_1,x_2,\alpha)$曲线族的包络线。代数上我们怎么得出这些性质？

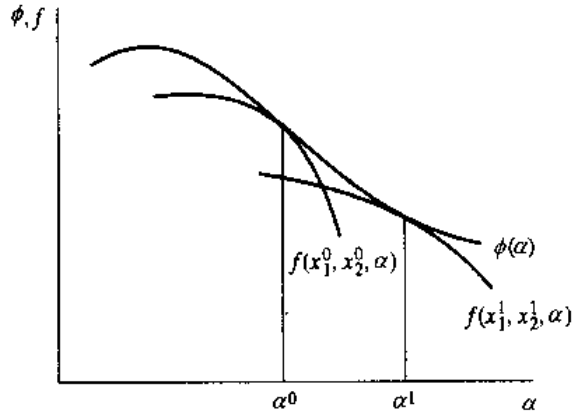

图 7-3　间接目标函数 $\phi(\alpha)$是直接目标函数曲线族的包络线。

考虑一个新的函数，给定 α，f 的真实值与最大值之差：

$$F(x_1,x_2,\alpha)=f(x_1,x_2,\alpha)-\phi(\alpha)$$

叫做初始—对偶（primal-dual）目标函数。既然当 $x\neq x^*$ 时，$f\leqslant\phi$，当 $x_i=x_i^*(\alpha)$时 F 有最大值 0。（如果我们将 x_1^* 和 x_2^* 视作资源的有效分配，x_1 和 x_2 视作其他的分配，那么这说明当“浪费”为 0 时分配才是有效的。）另外，我们能将 $F(x_1,x_2,\alpha)$看作三个独立变量 x_1,x_2 和 α 的函数。即正如对一个既定的 α 存在极大化 f 的 x_1,x_2；对给定的 x_1,x_2 存在使得 x_i 是正确的（极大化的）值的 α 值。例如，对既定的劳动和资本数量，存在要素和产出价格的某个集合使得在这个集合上投入水平将是极大化利润的值。$F(x_1,x_2,\alpha)$取得最大值的点能用通常的一阶和二阶条件描述。一阶条件是 $f(x_1,x_2,\alpha)-\phi(\alpha)$对 x_1,x_2 和 α 的偏导为 0：

$$F_i=f_i=0 \qquad i=1,2 \tag{7-7}$$

和

$$F_\alpha = f_\alpha - \phi_\alpha = 0 \tag{7-8}$$

方程组(7-7)仅是最初的极大值条件。方程(7-8)是包络结果，$\phi_\alpha = f_\alpha$。每当，$x_i = x_i^*(\alpha)$，$i=1,2$ 这些一阶条件成立。

充分性的二阶条件要求 $F(x_1, x_2, \alpha)$(对 x_1, x_2, α)的二阶偏导的海赛阵是负定的，或它的主子式交替变号。仔细审查，$F_{11} = f_{11}$ 等等，并且 $F_{\alpha\alpha} = f_{\alpha\alpha} - \phi_{\alpha\alpha}$。

因此：

$$H = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{1\alpha} \\ F_{21} & F_{22} & F_{2\alpha} \\ F_{\alpha 1} & F_{\alpha 2} & F_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1\alpha} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2\alpha} \\ f_{\alpha 1} & f_{\alpha 2} & f_{\alpha\alpha} - \phi_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \tag{7-9}$$

这些二阶条件包括在左上角最初的几个($f_{11} < 0$，$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0$，etc.)。另外，充分性二阶条件也隐含 $F_{\alpha\alpha} < 0$，或 $f_{\alpha\alpha} - \phi_{\alpha\alpha} < 0$。另外，极大化模型中所有已知的比较静态结果来自这个不等式。

一阶包络结果(7-8)式，是 $\phi_\alpha(\alpha) \equiv f_\alpha(x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha), \alpha)$。将其两边对 α 求偏导，可得：

$$\phi_{\alpha\alpha} \equiv f_{\alpha x_1} \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} + f_{\alpha x_2} \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} + f_{\alpha\alpha}$$

从充分性二阶条件，并且利用杨氏定理(Young's theorem)：

$$\phi_{\alpha\alpha} - f_{\alpha\alpha} = f_{1\alpha} \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} + f_{2\alpha} \frac{\partial x^*}{\partial \alpha} > 0$$

这个分析可以很容易地扩展到 n 个变量的情况，得出：

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i\alpha} \frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha} > 0 \tag{7-10}$$

对所有无约束极大化模型来说，方程(7-10)是一般的和基本的比较静态方程。然而，它太一般了而不能起很大作用。为了使一个模型有可证伪的隐含规定，它必须比一个一般的极大化问题包含更多的结构。因此，假定某个 α 只进入一个阶条件 $f_i = 0$，即当 $j \neq i$，$f_{j\alpha} = 0$。那么方程(7-10)化简为一项：

$$f_{i\alpha} \frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha} > 0 \tag{7-11}$$

这是萨缪尔森著名的"共轭(conjugate pairs)"结果。在极大化模型中，如果某个参数 α 只进入第 i 个一阶方程，第 i 个选择变量对 α 变化的反应与 α 对一阶方程的影响同方向。

这个定理的意义在于它在一些重要模型上的应用。例如，在利润极大化模型中，参数 w_1 仅进入第一个阶方程 $\pi_1 = pf_1 - w_1 = 0$，它是带负号进入 $\frac{\partial \pi_1}{\partial w_1} = -1$。因此，共轭定理表明 x_1^* 对 w_1 增加的反应将是负的，x_2^* 反应也相似。以后我们将看到，这个定理也适用于带约束的成本极小化模型。

在更一般的模型中，其中 x 是向量$(x_1, \cdots, x_n)$，α 是参数向量$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，极大化 $F(x, \alpha)$

$=f(x,a)-\phi(a)$的二阶条件是矩阵 $F_{xx}=f_{xx}-\phi_{xx}$是负半定的。通常的比较静态结果，从该矩阵对角元的负性中可得出。然而，从半负定矩阵其他性质($f_{xx}-\phi_{xx}$的主子式交替变号)中可得到更多定理。

包络定理也揭示了在极大化模型中出现的非直观的“交互(reciprocity)”条件的起源。记得在利润极大化模型中，我们得到$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}=\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}$。如果注意到每个要素需求是 π^* 对要素价格的偏导，即 $\pi_1^*=-x_1^*(w_1,w_2,p)$，$\pi_2^*=-x_2^*(w_1,w_2,p)$的负数，以上结果能看得更清楚些。将杨氏定理应用到 $\pi^*(w_1,w_2,p)$，可得 $\pi_{12}^*=-\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}=-\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}=\pi_{21}^*$。因此这个奇怪的结果不会比杨氏定理奇怪多少。

所有交互定理事实上都是杨氏定理在间接目标函数上的应用。假定极大化模型中有两个参数 α 和 β，$\max y=f(x_1,x_2,\alpha,\beta)$。隐含的选择函数是 $x_i=x_i^*(\alpha,\beta)$，$i=1,2$，并且间接目标函数是 $\phi(\alpha,\beta)=f(x_1^*(\alpha,\beta),x_2^*(\alpha,\beta),\alpha,\beta)$。然后，注意 $\phi_\alpha(\alpha,\beta)=f_\alpha$，

$$\phi_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=f_{\alpha 1}\frac{\partial x_1^*}{\partial\beta}+f_{\alpha 2}\frac{\partial x_2^*}{\partial\beta}+f_{\alpha\beta}$$

相似地：

$$\phi_{\beta\alpha}(\alpha,\beta)=f_{\beta 1}\frac{\partial x_1^*}{\partial\alpha}+f_{\beta 2}\frac{\partial x_2^*}{\partial\alpha}+f_{\beta\alpha}$$

既然 $\phi_{\alpha\beta}=\phi_{\beta\alpha}$，

$$f_{1\alpha}\frac{\partial x_1^*}{\partial\beta}+f_{2\alpha}\frac{\partial x_2^*}{\partial\beta}=f_{1\beta}\frac{\partial x_1^*}{\partial\alpha}+f_{2\beta}\frac{\partial x_2^*}{\partial\alpha}\tag{7-12}$$

在有 n 个选择变量时的情况：

$$\sum f_{i\alpha}\frac{\partial x_i^*}{\partial\beta}=\sum f_{i\beta}\frac{\partial x_i^*}{\partial\alpha}\tag{7-13}$$

然而，当每个参数只进入一个一阶方程时，这些方程最有趣。在这种情况下，方程(7-13)每边只剩下一项，如同在利润极大化模型中一样。

7.4　带约束的模型

经济学中的大部分模型涉及一个或多个约束。例如一个特别重要的模型：

最小化　　$C=\sum w_i x_i$

满足约束　　$f(x_1,\cdots,x_n)=y^0$

如果 f 是 n 种投入的生产函数，w_i 是要素价格，这个著名的模型描述了以最低成本实现产量 y^0。无约束极大化模型的结果扩展到涉及一个或多个约束条件关键依赖于是否参

数，仅进目标函数或是否参考数也进入约束条件（或只进入约束条件）。注意在上述成本极小化模型，价格仅进入目标函数，而指定的产量水平仅进入约束条件。我们将证明如果参数仅进入目标函数，比较静态结果与无约束模型情况下一样。然而，如果一个参数进入一个约束条件，当那参数变化时，约束空间也变化，破坏了关系 $\phi_{aa}\geqslant f_{aa}$。让我们考察更一般的模型。

带一个约束的模型的包络定理的传统导出如下所示：

考虑

最大化 $\qquad f(x_1,\cdots,x_n,\alpha)=y$

满足约束 $\qquad g(x_1,\cdots,x_n,\alpha)=0$

拉格朗日函数是 $\mathscr{L}=f+\lambda g$。令 $\mathscr{L}$ 的一阶偏导为 0，

$$\mathscr{L}_i=f_i+\lambda g_i=0 \qquad i=1,\cdots,n \tag{7-14}$$

$$\mathscr{L}_\lambda=g=0 \tag{7-15}$$

解得：

$$x_i=x_i^*(\alpha) \qquad i=1,\cdots,n$$

$$\lambda=\lambda^*(\alpha)$$

定义：

$$y^*=f(x_1^*,\cdots,x_n^*,\alpha)=\phi(\alpha) \tag{7-16}$$

这里，$\phi(\alpha)$是给定 α，x_i 满足约束条件时 y 的极大值。

当 α 变化时 $\phi(\alpha)$如何变化？将(7-16)对 α 微分：

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}=\sum f_i\frac{\partial x_i^*}{\partial\alpha}+f_\alpha \tag{7-17}$$

然而，这里 $f_i\neq 0$。将约束条件：

$$g(x_1^*(\alpha),\cdots,x_n^*(\alpha),\alpha)\equiv 0$$

对 α 微分：

$$\sum g_i\frac{\partial x_i^*}{\partial\alpha}+g_\alpha\equiv 0 \tag{7-18}$$

将方程(7-18)乘以 λ，然后加到(7-17)。

那么：

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}=\sum f_i\frac{\partial x_i^*}{\partial\alpha}+f_\alpha+\sum\lambda g_i\frac{\partial x_i^*}{\partial\alpha}+\lambda g_\alpha$$

$$=\sum(f_i+\lambda g_i)\frac{\partial x_i^*}{\partial\alpha}+f_\alpha+\lambda g_\alpha$$

利用一阶条件(7-14)：

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}=f_\alpha+\lambda g_\alpha=\mathscr{L}_\alpha \tag{7-19}$$

其中 λ_α 是拉格朗日函数在 x_i 固定时对 α 的偏导。因此，在估计带约束极大化模型中间接目标函数对一个参数变化的反应时，拉格朗日函数所起的作用与对无约束模型中目标函数起

的作用类似。

利用初始—对偶分析，我们能更便利的得到包络定理。在这些模型中，$\phi(\alpha)\geqslant f(x_1,\cdots,x_n,\alpha)$仍然成立，但在这个例子中，变量也必须满足约束。初始对偶模型，因此是：

最大化　　$f(x_1,\cdots,x_n,\alpha)-\phi(\alpha)$

满足约束　　$g(x_1,\cdots,x_n,\alpha)=0$

将 α 也视作选择变量。初始对偶问题的拉格朗日函数是：

$$\mathcal{L}=f(x_1,\cdots,x_n,\alpha)-\phi(\alpha)+\lambda g(x_1,\cdots,x_n,\alpha)$$

令 λ 对 x_i 和 λ 的一阶偏导为 0 可得带约束极大值一般的一阶条件(7-14)和(7-15)。令 λ 对 α 的偏导为 0 可得包络关系(7-19)。

比较静态：初始—对偶分析

利用初始对偶分析，现在我们考察在什么条件下可证伪的假说出现在带约束极大化模型中。我们已经从第 6 章发展的传统方法中知道无法得到关于出现在约束条件中的参数可证伪的命题。要了解一般的结果，我们推荐读者参考 Silberg1974 年的比较静态论文。利用下面这个简单的模型，我们能够证明最可能有用结果的性质。考虑：

最大化　　$f(x_1,x_2,\alpha)=y$

满足约束　　$g(x_1,x_2,\beta)=0$

在这个模型中，α 仅进入目标函数，β 仅进入约束函数。利用拉格朗日方法，由一阶方程可解得选择函数：

$$x_1=x_1^*(\alpha,\beta)$$

$$x_2=x_2^*(\alpha,\beta)$$

将这些解代入目标函数可得给定 α,β,x_1,x_2 满足约束条件 $f(x_1,x_2,\alpha)$的极大值：

$$\phi(\alpha,\beta)=f(x_1^*(\alpha,\beta),x_2^*(\alpha,\beta),\alpha)$$

既然 $\phi(\alpha,\beta)$是给定 α,β 时 f 的最大值，当 x_i 满足约束条件时，$\phi(\alpha,\beta)\geqslant f(x_1,x_2,\alpha)$。因此，当 x_i 满足约束条件时，函数 $F(x_1,x_2,\alpha,\beta)=f(x_1,x_2,\alpha)-\phi(\alpha,\beta)$有极大值 0。然而，$F(x_1,x_2,\alpha,\beta)$是四个独立变量的函数，其中的 α 并不进入约束条件。因此，从满足约束条件的 β，x_1,x_2 开始，固定它们的值，约束条件并不影响极大化 $F(x_1,x_2,\alpha,\beta)$的 α 的选择。因此，在 α 维，$F(x_1,x_2,\alpha,\beta)$有一无约束极大值(例如，当某种商品比如说空气进入一个人的效用函数，但并不进入预算约束，并不要为呼吸付钱时，考虑会发生什么。在这种情况下，我们会呼吸直至空气的边际效用为 0。即我们在这个维度以无约束极大化的方式消费。)

这个初始—对偶问题的拉格朗日函数是：

$$\mathcal{L}=f(x_1,\cdots,x_n,\alpha)-\phi(\alpha,\beta)+\lambda g(x_1,\cdots,x_n,\beta)$$

令 $\mathcal{L}$ 对 α,β 的一阶偏导为 0，可得包络关系：

$$f_\alpha-\phi_\alpha=0 \tag{7-20a}$$

$$-\phi_\alpha+\lambda g_\beta=0 \tag{7-26b}$$

方程(7-20a)正是方程(7-8)，与无约束模型同样的包络关系。另外，既然这个初始—对偶模

型在 α 是无约束极大值，像以往一样，假定二阶充分性条件 $F_{\alpha\alpha}=F_{\alpha\alpha}-\phi_{\alpha\alpha}<0$。

基本的比较静态结果(7-10)如前得出：

$$f_{1\alpha}\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha}+f_{2\alpha}\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha}>0 \tag{7-10}$$

如果 α 代表仅进入目标函数的参数向量，那么矩阵 $(f_{\alpha\alpha}-\phi_{\alpha\alpha})$ 必定是负半定阵；方程(7-10)由对角元素是非正得出。

对 β 而言并不存在这样简单的关系。为了更好理解这点，看图 7-3。β 在水平轴，f 和 $\phi(\alpha,\beta)$ 在垂直轴。自始至终固定 α 为常数。在某个值 β^0，$x_1^0=x_1^*(\alpha^0,\beta^0)$，$x_2^0=x_2^*(\alpha^0,\beta^0)$ 被隐含。下一步是将 x_1 和 x_2 固定，变化要考虑的参数。然而，对 β 来说就无法这么做。首先，既然 β 并不是目标函数 f 的一个变量，无法画出 f 相对于 β 的关系。其次，如果 x_1 和 x_2 被固定，β 不可能变化而不违反约束条件。因此，对进入约束条件的参数来说，显示 f 比 ϕ 更凹的方法失效了：无法仅改变一个方程的一个变量而不破坏等式。结果，对进入约束条件的参数而言，没有可证伪的假说被极大化假设独立隐含。

在 β 是参数向量的情况中，将 x_1，x_2 和 α 固定并且刻画满足初始一对偶问题的 β_j 是可能的。既然，最初的目标函数并不包含任一 β_j，初始一对偶问题归结为：

最大化	$-\phi(\alpha,\beta)$
满足约束	$g(x,\beta)=0$

其中 $x=(x_1,x_2)$(或 n 维向量)。当然极大化 $-\phi(\alpha,\beta)$ 就是极小化 $\phi(\alpha,\beta)$。因此在这种情况中，间接目标函数对在约束条件中的 β_j 是凸的，即对只进入约束条件的参数 β_j。如果约束条件是 β_j 的线性函数，那么间接目标函数对 β_j 必定是拟凸的(虽然线性并不是拟凸性的必要条件)。

例 在重要的消费者模型中，商品效用在线性预算下极大化：

最大化	$U(x_1,x_2)$
满足约束	$p_1x_1+p_2x_2=M$

利用拉格朗日方法，隐含的选择函数是马歇尔需求函数 $x_i=x_i^*(p_1,p_2,M)$，$i=1,2$。将这些函数代入目标函数可得间接效用函数 $U^*(p_1,p_2,M)=U(x_1^*(p_1,p_2,M),x_2^*(p_1,p_2,M))$。

初始一对偶问题，因此是

最大化	$U(x_1,x_2)-U^*(p_1,p_2,M)$
满足约束	$p_1x_1+p_2x_2=M$

其中 x_1，x_2 是变量，p_1，p_2，M 是参数。既然所有参数都只在约束条件中出现，对价格和货币收入的极大化问题是：

最大化	$-U^*(p_1,p_2,M)$
满足约束	$p_1x_1+p_2x_2=M$

这说明选择商品 x_1，x_2 来极大化效用(同时受预算约束)等价于选择价格和货币收入来

极小化间接效用函数。当然，同时也受预算约束。既然预算约束是价格和货币收入的线性函数，这隐含着间接效用函数是价格和货币收入的拟凸函数。此结果可直接扩展到 n 种商品时的情况。

利用包络关系(7-20)能从这些模型中导出交互关系。将这些关系写成恒等式并且用选择函数显示函数的依赖关系，可得：

$$\phi_\alpha(\alpha,\beta)\equiv f_\alpha(x_1^*(\alpha,\beta),x_2^*(\alpha,\beta),\alpha) \tag{7-21a}$$

$$\phi_\beta(\alpha,\beta)\equiv\lambda^*(\alpha,\beta)g_\alpha(x_1^*(\alpha,\beta),x_2^*(\alpha,\beta),\beta) \tag{7-21b}$$

等式(7-21a)在无约束模型中也一样，因为，参数 α 仅进入目标函数。当参数为 α_1 和 α_2 时，我们可用与以前相同的方式得出方程(7-12)和(7-13)所显示的交互条件。另外，既然 $\phi_{\alpha\beta}\equiv\phi_{\beta\alpha}$，在(7-21b)等式中右边利用链导法则，可得：

$$f_{1\alpha}\frac{\partial x_1^*}{\partial\beta}+f_{2\alpha}\frac{\partial x_2^*}{\partial\beta}=\lambda^*\left(g_{1\beta}\frac{\partial x_1^*}{\partial\alpha}+g_{2\beta}\frac{\partial x_2^*}{\partial\alpha}\right)+g_\beta\frac{\partial\lambda^*}{\partial\alpha} \tag{7-22}$$

当两个参数 β_1 和 β_2 都仅进入约束条件时，可得到一个额外的交互关系集，这些关系必然涉及 λ^* 的偏导，这在(7-21b)中可明显看出。我们将这些推导留给学生作为练习。在目前情况，这些交互关系并不使人感兴趣，但在许多更具体化的模型中，(7-22)化简成有趣的表达式。最后，非常一般的交互关系能从参数进入目标函数和约束条件的模型中得出，但不存在任何有趣的著名的例子。

一个重要的特别的例子

经济学家中遇到的大部分模型涉及某些参数，特别是商品或要素价格的线性表达。因此，考虑目标画数涉及表达式 $\sum\alpha_i x_i$ 的模型：

$$\text{最大化}\qquad y=f(x,\alpha)=\theta(x_1,\cdots,x_n)+\sum\alpha_i x_i \tag{7-23}$$

$$\text{满足约束}\qquad g(x_1,\cdots,x_n,\beta)=0 \tag{7-24}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta$ 是只进入约束条件的任何参数向量。进入约束条件的参数被假定不进入目标函数。

将间接目标函数写成 $\phi(\alpha,\beta)$。从以前的分析可知 $f(x,\alpha)-\phi(\alpha,\beta)$ 必定是 α 的凹函数，并且矩阵 $(f_{\alpha\alpha}-\phi_{\alpha\alpha})$ 必定是负半定的。只要一阶和二阶条件满足，参数 β 和 g 的函数形式是不相关的。然而，既然 f 是 α_i 的线性函数，$f_{\alpha\alpha}\equiv0$，因此 f 对初始一对偶函数的曲率没有影响。因此，对这些模型来说，$-\phi$ 是 α 的凹数(或者 ϕ 是 α 的凸函数)，并且矩阵 $[-\phi_{\alpha\alpha}]$ 必定是对称的(由杨氏定理)和负半定的。在具有这些性质的极小化例子中，$\phi(\alpha)$ 是凹的，并且 $[\phi_{\alpha\alpha}]$ 是负半定矩阵。

比这些曲率性质更重要的是用来得出比较静态定理的隐含规定。利用包络定理，在这些模型中，$\phi_{\alpha i}=f_{\alpha i}=x_i^*$。因此，矩阵 $[\phi_{\alpha\alpha}]$ 由 $\frac{\partial x_i^*}{\partial\alpha_j}$ 构成。由对称性，$\frac{\partial x_i^*}{\partial\alpha_j}=\frac{\partial x_j^*}{\partial\alpha_i}$。正半定矩阵的性质包括非负对角元，即 $\frac{\partial x_i^*}{\partial\alpha_i}\geqslant0$，和正的高阶主子式。这些结果构成了经济学中有用

的定理。

上面得到的利用函数展示出这些性质(但注意到 α_i 是负的价格)。在下一章中我们将研究成本极小化模型,该有相似的结构。我们将证明与带有一般性质的生产函数相联系的成本函数必定是凹的,并且被该模型隐含的需求函数有负的斜率。

拉格朗日乘子的解释

到目前为止拉格朗日乘子的引入主要是为了描述极大化一阶和二阶条件的便利。事实上,经济学中使用拉格朗日技巧的主要原因是 λ 自身经常有一个有趣的解释。

考虑带约束的极大化模型:

最大化 $\quad f(x_1,x_2)=y$

满足约束 $\quad g(x_1,x_2)=k$

通常我们令约束方程为 0。这里,它等于某任意的值 k。将约束条件如此表达,我们能够以函数的值考虑参数变化。利用拉格朗日函数:

$$\mathscr{L}=f(x_1,x_2)+\lambda(k-g(x_1,x_2))$$

一般的一阶条件是:

$$\mathscr{L}_1=f_1(x_1,x_2)-\lambda g_1(x_1,x_2)=0 \tag{7-25a}$$

$$\mathscr{L}_2=f_2(x_1,x_2)-\lambda g_2(x_1,x_2)=0 \tag{7-25b}$$

$$\mathscr{L}_\lambda=k-g(x_1,x_2)=0 \tag{7-25c}$$

从方程(7-25a)和(7-25b):

$$\lambda=\frac{f_1}{g_1}=\frac{f_2}{g_2} \tag{7-26}$$

然而,利用包络定理能够得到 λ 更有意义的表达式。

解方程组(7-25),可得 $x_1^*(k)$,$x_2^*(k)$和 $\lambda^*(k)$。将这些解代入 $f(x_1,x_2)$可得间接目标函数:

$$\phi(k)=f(x_1^*(k),x_2^*(k))$$

利用包络定理在约束极大化模型中的结果,方程(7-19):

$$\phi_k(k)=\frac{\partial\lambda}{\partial k}=\lambda^*(k) \tag{7-27}$$

即拉格朗日乘子 λ 等于目标函数极大值的变化与以约束条件值表示的参数变化的比率。再次考虑方程(7-19),$\phi_\alpha(\alpha)=f_\alpha+\lambda g_\alpha$。利用(7-27)我们能够理解这个关系。将(7-19)视作:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}=\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial\alpha}$$

当进入目标函数和约束某个参数变化时,它产生两种不同的影响。首先,目标函数被直接影响,由$\frac{\partial f}{\partial\alpha}$表示。另外,约束条件的值被影响,以$\frac{\partial g}{\partial\alpha}$表示。将$\frac{\partial g}{\partial\alpha}$乘以 $\lambda\left(=\frac{\partial f}{\partial g}\right)$转换成目标函数 f 的单位。两者的加总是 α 的变化对 y 的极大值的影响。

方程(7-27)的普通应用涉及目标函数是生产函数,且在受资源限制在水平 k 的约束条

件下极大化的模型。如果资源条件增加一点 Δk，产出将增加 $\Delta y^* \approx \lambda^* \Delta k$。换句话说，$\lambda^*$ 是资源的边际价值。在一个竞争性的经济中，厂商愿意为资源增加一单位支付 λ^*。在数学规划文献中，λ^* 被称作资源的影子价格。在社会产出是在参数化的劳动力和资本约束下极大化的模型中，与这些约束联系的拉格朗日乘子即影子要素价格，即劳动力的工资和资本的租金。在下一章中，在生产水平约束下总成本极小化的模型中，λ^* 估测在产出变化时总成本的变化，即边际成本。我们将在下一章探索这些关系。

再次考虑模型：

最大化	$f(x_1, x_2) = y$
满足约束	$g(x_1, x_2) = k$

既然参数 k 进入约束条件，我们知道一般来说 $\frac{\partial \lambda^*}{\partial k}$ 的符号是不确定的。然而，在一些重要的模型中，额外的假定能为此项规定符号。将方程组(7-25)对 k 微分：

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ -g_1 & -g_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial k} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial k} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{7-28}$$

解得：

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial k} = \frac{-H33}{H}$$

其中 H 是 $\mathcal{L}$ 的加边海赛行列式。由充分性的二阶条件，$H>0$。现在假定 f 和 g 都是严格增函数以致 $\lambda^*>0$(为什么?)。另外假定 f 是凹函数，g 是凸函数。那么 $-g$ 定是凹函数，因此 $\mathcal{L}$ 是凹的。在这种情况下，$H_{33} = \mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{12}^2 \geqslant 0$，因此 $\frac{\partial \lambda^*}{\partial k} \leqslant 0$。如果 g 是线性的，只要 f 是凹的这些条件就被满足。利用初始—对偶方法，可以证明如果 $\frac{\partial \lambda^*}{\partial k} < 0$，$\mathcal{L}$ 必定是一严格凹函数。该证明留作练习。

这些结果可很容易扩展到带多个约束的模型中：

最大化	$f(x) = y$
满足约束	$g(x) \leqslant k$

其中 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$g(x)=g^j(x_1, \cdots, x_n)$，并且 $k=(k_1, \cdots, k_m)$，$j=1, \cdots, m$。被这个模型隐含的选择函数 $x=x^*(k)$ 和拉格朗日函数 $\lambda^*(k)$ 在假定充分性二阶条件成立下是通过解一阶拉格朗日条件得出的。间接目标函数是 $\phi(k)=f(x^*(k))$。利用包络定理，$\lambda^{j*}(k) = \frac{\partial \phi}{\partial k^j}$。如果 $f(x)$ 是凹的，并且 $g^j(x)$ 是凸的 $j=1, \cdots, m$，那么 $\phi(k)$ 是 k 的凹函数，并且 (ϕ_{kk})

$=(\partial\lambda^*/\partial k)$是半负定。既然$(\phi_{kk})$的对角元是非正的，这隐含着$\partial\lambda^*/\partial k\leqslant 0$。在许多重要的模型中，约束条件都是线性的。这样的指定满足该定理的条件。

证明取决于凹和凸函数的定义。令 k^1 和 k^2 是向量 k 的两个任意值，并且将隐含的选择向量表示成 $x^1=x^*(k^1)$，$x^2=x^*(k^2)$。令 $k^t=tk^1+(1-t)k^2$，$x^t=tx^1+(1-t)x^2$，$0\leqslant t\leqslant 1$。由约束条件的凸性：

$$g(x^t)\leqslant tg(x^1)+(1-t)g(x^2)\leqslant tk^1+(1-t)k^2=k^t$$

因此，x^t 是此模型的一个可行选择或解。当 $k=k^t$ 时，它满足约束条件。

既然 $f(x)$是凹函数：

$$f(x^t)\geqslant tf(x^1)+(1-t)f(x^2)=t\phi(k^1)+(1-t)\phi(k^2)$$

但由 ϕ 的定义，$\phi(k^t)\geqslant f(x^t)$。因此：

$$\phi(k^t)\geqslant t\phi(k^1)+(1-t)\phi(k^2)$$

因此，$\phi(k)$是 k 的凹函数。假设可微性，海赛矩阵 ϕ_{kk} 当然是半负定。这个结果的一个重要应用是在国外贸易的“小国”模型中，其中一个经济体的总产出在禀赋约束下极大化。要素价格是与这些禀赋约束相联的拉格朗日乘子。如果生产函数是凹的，这个定理隐含着某要素禀赋的增加不能增加要素的价格。这个模型将在有关一般均衡的章节中充分展示开。

Le Châtelier 影响

现在我们考虑当一个额外的等式约束加到模型后选择变量对某参数变化时如何反应。我们在第 4 章的利润极大化模型考察过 Le Châtelier 影响。在那个模型中我们证明如果一个要素固定在它的利润极大化水平，那么在此均衡点的一个邻域中另一要素的需求变得更少弹性。现在我们考虑更一般的模型，并且我们最有兴趣去探索某种模型的结构，这种模型当一个等式约束加到模型中时可预期选择变量对参数变化反应的差异。既然在参数进入约束条件和目标函数的模型中不存在可证伪的结果，我们将讨论限制到某参数 α 仅进入目标函数和参数 β 仅进入约束条件的模型。为了便于记述，我们在此节中将应用向量表示。因此，摘要重述。考虑：

最大化　　$y=f(x,\alpha)$

满足约束　　$g(x,\beta)=0$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，并且 α 和 β 分别是仅在目标函数和约束条件出现的参数向量。假定一阶必要和二阶充分性条件成立，我们可得选择函数 $x^*(\alpha,\beta)$ 和 $\lambda^*(\alpha,\beta)$。间接效用函数是 $\phi(\alpha,\beta)=f(x^*(\alpha,\beta),\alpha)$。既然表达式 $f(x,\alpha)-\phi(\alpha,\beta)$ 在 α 有无约束极大值，我们可得关于任何具体分量 α 的一般比较静态结果：

$$\sum_i f_{i\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\geqslant 0 \tag{7-10}$$

现在假定一个额外的约束，$h(x)=0$，此约束与原先的均衡一致且被加到模型中去。即定义 $x^0=x^*(\alpha^0,\beta^0)$，我们要求 $h(x^0)=0$。我们说此约束条件是恰好紧绷的，是因为它不扰乱原先的极大值点。然而，它的确影响参数变化时选择变量的变化率。让我们将新的选择

函数(该函数是最初的一阶条件和 $h(x)=0$ 的解),表示作 $x^s(\alpha,\beta)$(s 表示短期),新的间接目标函数表示作 $\phi^s(\alpha,\beta)$。

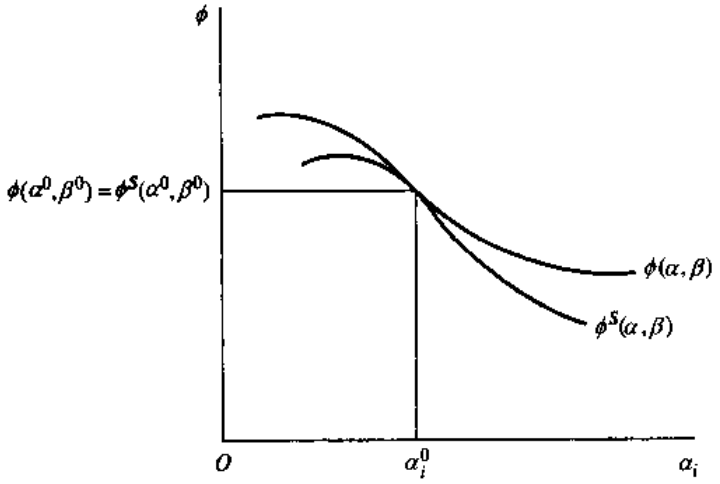

图 7-4　$\phi^s(\alpha,\beta)$表示约束条件 $h(x)=0$ 被加上后的间接效用函数。约束条件 $h(x)=0$ 加上后不能扰乱解 $x^0=x^*(\alpha^0,\beta^0)$。由此,$\alpha=\alpha^0$ 时,$\phi(\alpha,\beta)=\phi^s(\alpha,\beta)$在 α^0 的任意领域 $\phi(\alpha,\beta)>\phi^s(\alpha,\beta)$。因此,函数 $F(\alpha,\beta)=\phi(\alpha,\beta)-\phi^s(\alpha,\beta)$对 α 来说在 α^0 达到无约束极小值。可知 $\phi(\alpha,\beta)$在 α^0 与 $\phi^s(\alpha,\beta)$相切,并且在 α^0 的某个领域比 $\phi^s(\alpha,\beta)$更凸或较少凹。这隐含着在 α^0 某个领域 $\phi_{\alpha_i\alpha_i}\geqslant\phi^s_{\alpha_i\alpha_i}$。

在图 7-4 中我们画出这两条曲线。由定义,当时 $\alpha=\alpha^0,\beta=\beta^0$ 时,$\phi=\phi^s$,但当 $\alpha\neq\alpha^0$ 或 $\beta\neq\beta^0$ 时,$\phi>\phi^s$。等价地,只要参数 α 和 α 不在辅助约束中,函数 $F(\alpha,\beta)=\phi-\phi^s$ 对 α 和 α 来说在点(α^0,β^0)处取到无约束极小值 0。假定这些函数可微,这意味着 ϕ^s 比 ϕ 更凹。这隐含着必要的一阶条件是:

$$F_\alpha=\phi_\alpha-\phi^s_\alpha=0 \tag{7-29a}$$

$$F_\beta=\phi_\beta-\phi^s_\beta=0 \tag{7-29b}$$

必要的二阶条件是矩阵 $F_{\alpha\beta}$是半正定的。这条件隐含着子矩阵 $F_{\alpha\alpha}$和 $F_{\beta\beta}$同样是半正定的,因此这些矩阵的对角元是非负的。因此对任何具体的参数分量 α,

$$F_{\alpha\alpha}=\phi_{\alpha\alpha}-\phi^s_{\alpha\alpha}\geqslant 0 \tag{7-30}$$

利用得出式(7-10)的分析方法,可得:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i\alpha}\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial\alpha}-\frac{\partial x_i^s}{\partial\alpha}\right)\geqslant 0 \tag{7-31}$$

虽然(7-31)总结了关于参数 α 的比较静态 Le Châtelier 结果,但仅当共轭定理的条件成立时,即 α 仅进入第 i 个一阶方程时,才得到最有用的结果。在这种情况下,(7-31)简化为一项,可得:

$$f_{\alpha}\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha}\geqslant f_{\alpha}\frac{\partial x_i^c}{\partial \alpha}\geqslant 0 \tag{7-32}$$

既然 f_{α} 可能是负数，就不能将这项去掉。然而，既然 $\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha}$ 和 $\frac{\partial x_i^c}{\partial \alpha}$ 与 f_{α} 符号相同，x_i 对 α 变化的反应的绝对值在没有附加约束的情况下比有附加约束的情况下大：

$$\left|\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha}\right|\geqslant\left|\frac{\partial x_i^c}{\partial \alpha}\right| \tag{7-33}$$

Le Châtelier 结果通常以将某个选择变量定为常数产生的影响来阐述。这里我们可以看到没必要如此严格。对辅助约束惟一重要的限制是它不能包括正在考虑的参数。因此，Le Châtelier 结果在比 $x_n=x_n^0$ 更复杂的约束条件也成立，另外，当附加的恰好紧绷的约束条件被加上时以上进程也一样。

既然参数 β 由拉格朗日乘子的表达一直存在，一般来说，参数 β 并不能产生像(7-32)一样简单的结果。然而，考虑约束条件为 $g(x)=k$ 形成的重要的特殊模型。定义此模型的拉格朗日函数为 $\mathscr{L}=f(x,\alpha)+\lambda(k-g(x))$ 并且假定独一无二的内点解 $x^*(\alpha,k)$ 和 $\lambda^*(\alpha,k)$。令 $\phi(\alpha,k)$ 为间接效用函数。从(7-27)式可知，$\phi_k=\lambda^*(\alpha,k)$。从一般比较静态分析可知 $\partial\lambda^*/\partial k\neq 0$。然而，十分奇怪的是 Le Châtelier 影响是可预期的。

像以前一样加上一个额外的不起约束作用的条件 $h(x)=0$。令 $\phi^c(\alpha,k)$ 为新的约束条件加上后的间接效用函数，令 $\lambda^c(\alpha,k)$ 是约束条件 $g(x)=k$ 的拉格朗日乘子的解。函数 $\phi-\phi^c$ 对 k 有一无约束极小值。必要的一阶条件是 $\phi_k-\phi_k^c=0$，即 $\lambda^*=\lambda^c$。二阶条件表明 $\phi_{kk}-\phi_{kk}^c\geqslant 0$，并且：

$$\frac{\partial\lambda^*}{\partial k}\geqslant\frac{\partial\lambda^c}{\partial k} \tag{7-34}$$

因此在这相当一般的形式，即使(7-34)式中两项都未由极小化规定符号，但是当一个辅助约束加入到模型中时，k 变化引起 λ 的变化比 k 自身的变化更小。在下一章我们研究成极小化模型、拉格朗日乘子就是边际成本函数。这个结果说明即使极小化并没有隐含边际成本函数斜率的符号，短期边际成本曲线比长期成本曲线上升得更快或下降得更慢依然成立。

习题

1. 考虑极大化模型：

最大化 $y=f(x_1,x_2,\alpha)$

满足约束 $g(x_1,x_2)=k$

拉格朗日函数 $\mathscr{L}=f(x_1,x_2,\alpha)+\lambda[k-g(x_1,x_2)]$，其中 x_1,x_2 是选择函数，α,β 是参数。

(a) 定义 $\phi(\alpha,k)=$ 此模型中给定 α 和 k 时 y 的极大值。在 α 为水平轴，ϕ 和 f 为纵轴的图上，从几何上解释包络结果 $\phi_{\alpha}=f_{\alpha}$ 和 $\phi_{\alpha\alpha}>f_{\alpha\alpha}$。

(b) 在一个相似的图上，解释为什么不可能对参数 k 贯彻同样的步骤。这些结果如何与经济学中可证伪的比较静态定理的出现相联系？

(c) 利用结果(a)证明：

$$f_{1\alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}+f_{2\alpha}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha}>0$$

(d) 利用初始-对偶方法，代数上证明包络定理结果：

(i) $\phi_\alpha=f_\alpha$

(ii) $\phi_{\alpha\alpha}>f_{\alpha\alpha}$

(iii) $\phi_k=\lambda^*$

(e) 证明：$f_{1\alpha}(\partial x_1^*/\partial k)+f_{2\alpha}(\partial x_2^*/\partial k)=\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial \alpha}$

(f) 假定目标函数 f 测量某种活动的净值，并且约束条件代表在某种资源上的限制。利用(d)中结果(iii)，解释为什么拉格朗日乘子是资源的影子价格，即以此模型中指定目标表述的资源的边际价格。在这些模型中，当约束条件放松即当 k 增加，资源的边际评价怎么变化？

(g) 现在假定目标函数是 α 的线性函数，即 $f(x_1,x_2,\alpha)=h(x_1,x_2)+\alpha x_1$。证明 $\phi(\alpha)$ 是 α 的凸函数，并且，假定充分性二阶条件成立，$\phi_{\alpha\alpha}>0$。

2. 考虑模型：

最大化　　$y=f(x_1,x_2)+h(x_1,\alpha)$

满足约束　　$g(x_1,x_2,\beta)=0$

其中 x_1 和 x_2 是选择变量，α,β 是参数。

(a) 得到关于 α 的一个可证伪的比较静态结果，并且证明关于 β 不存在这样的结果。

(b) 令 $\phi(\alpha,\beta)$=此模型中给定义 α 和 β 时 y 的极大值，利用初始—对偶方法，证明包络定理结果：

$$(i)\ \phi_\alpha=h_\alpha(x_1^*,\alpha)$$

$$(ii)\ \phi_\beta=\lambda^* g_\beta(x_1^*,x_2^*,\beta)$$，其中 λ^* 是拉格朗日乘子。

(c) 证明“交互(reciprocity)”定理：

$$h_{1\alpha}\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial \beta}\right)=\lambda^*\left[g_{1\beta}\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha}\right)+g_{2\beta}\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha}\right)\right]+g_\beta\left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial \alpha}\right)$$

(d) 在 y 为纵轴 α 为水平轴的图中，画出可能的曲线 $\phi(\alpha,\beta)$ 和 $f(x_1^0,x_2^0)+h(x_1^0,\alpha)$，其中 x_1^0,x_2^0 和 β^0 是这些变量某固定的值。画图证明 $\phi_\alpha=h_\alpha$，并且 $\phi_{\alpha\alpha}>h_{\alpha\alpha}$。

(e) 解释为什么不可能对 β 进行同样的分析，并且为什么仅从极大化要求不能得出可证伪的比较静态定理。

3. 考虑模型：

最小化　　$AC=\dfrac{w_1x_1+w_2x_2}{y}$

其中 x_1 和 x_2 为要素投入，w_1 和 w_2 为要素价格，并且 $y=g(x_1,x_2)$ 是生产函数。令 $AC^*(w_1,w_2)$ 为给定要素价格下最小的平均成本。

(a) 解释要素需求函数 $x_i^*(w_1,w_2)$ 和间接目标函数如何导出。证明要素需求函数是 0 齐次，并且 AC^* 是要素价格的 1 次齐次函数。

(b) 在 AC 和 AC^* 为纵轴，w_1 为水平轴的图上，画出典型的 AC 和 AC^* 曲线。画图证明 AC^* 是

$w_1(w_2)$的凹函数。

(c) 求给定 w_1 时，AC^* 的斜率。

(d) 利用图表分析，证明$\partial(x^*/y^*)/\partial w_1<0$。

(e) 证明要素 1 的需求弹性小于产出供给对 w_1 的弹性。

(f) 建立初始一对偶模型，min$AC-AC^*$，代数上导出上述结果。

(g) 比照该模型中导出的要素需求 $x_i^*(w_1,w_2)$与从 max$pf(x_1,x_2)-w_1x_1-w_2x_2$，$p$ 为参数中导出的要素需求 $x_i^p(w_1,w_2,p)$。求这两个模型的一阶条件，并且通过解释等式 $x_1^*(w_1,w_2)\equiv x_1^p(w_1,w_2,p^*(w_1,w_2))$，其中 $p^*=AC^*(w_1,w_2)$来解释这两个模型之间的关系。

(h) 由上述等式，证明从 minAC 中导出的 x_1 的需求弹性，$\left[\left(\frac{w_1}{x_1^*}\right)\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}\right)\right]$等于从利润极大化模型导出的弹性加上等于在 x_1 上花费份额的产出效果与产出价格弹性的乘积。

4. 考虑两要素利润极大化厂商模型。定义厂商在总花费约束下行动为短期。即在短期，总费是固定(在长期利润最大化水平)。长期则定义为厂商不受任何约束的情况。

(a) 短期需求曲线是否必然向下倾斜?

(b) 证明此模型的短期要素需求曲线的弹性并不必然比长期要素需求曲线小。为什么此模型得到这种奇怪的结果?

(c) 证明如果就要素对总花费变化的反应而言，某要素是劣质的，则长期该要素需求曲线的斜率必定比短期该要素需求曲线更小。

5. 考虑模型：

最大化	$y=f(x_1,\cdots,x_n)$
满足约束	$g(x_1,\cdots,x_n)=k$

令 $\phi(k)$=给定 k 时 f 的极大值。假定存在内点解，证明如果 f 和 g 都是 r 次齐次，那么 $\phi(k)$是 k 的线性函数，即 $\phi(k)=ak$，其中 a 是任意常数，并且此模型的拉格朗日函数为常数。

部分参考文献

Samuelson, P. A.: "The Le Châtelier principle in Linear Programming, *RAND Corporation Monograph*, August 4, 1949 (Chap, 43 in *Scientific Papers* below).

---: "An Extension of the Le Châtelier Principle," *Econometrica*, pp. 368-379, April 1960 (Chap 42 in *Scientific Papers* below).

---: "Structure of a Minimum Equilibrium System," In R. W. Pfouts (ed.), *Essays, in Economics and Econometrics: A Volume in Honor of Harold Hotelling*, The University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1960 (Chap. 44 in *Scientific Papers* below).

These three articles have all been reprinted in J. Stiglitz (ed.): *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, The M. I. T. Press, Cambridge, MA, 1966.

Samuelson, P. A.: *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947.

Silberberg, E.: " A Revision of Comparative statics Methodology in Economics, or, How to Do Economics on the Back of an Envelope," *Journal of Economic Theory*, 7:159-172, February 1974.

——: "The Le Châtelier Principle as a Corollary to a Generalized Envelope Theorem," *Journal of Economic Theory*, 3:146-155, June 1971.

Viner, J.: " Cost Curves and Supply Curves," *Zeitschrift fur Nationalokonomie*, 3:1932. Reprinted in American Economic Association, *Readings in Price Theory*, Richard D. Irwin, Chicago, 1952.

第 8 章　成本函数的推导

8.1　成本函数

本章将首先讨论一个数学概念——追求利润(财富)最大化企业的成本函数,它已经成为关于厂商及产业行为的经济文献的重要组成部分。特别的,我们将给出任意既定产出水平下总成本函数的性质。由于总成本显然要受到企业所使用投入的价格的影响,因此,成本函数必然可以写成:

$$C=C^*(y,w_1,\cdots,w_n) \tag{8-1}$$

其中,y 是产出水平,$w_1,\cdots,w_n$ 分别是要素 $x_1,\cdots,x_n$ 的价格。(为方便起见,这里假设要素价格是常数。)

但是,前述函数的存在必须要以厂商的行为为基础。例如,如果企业随机行事,那么,在既定的产出水平和要素价格向量下,成本函数将不惟一。即使没有随机性的假设,对于既定的投入,企业也可以用多种方式组织生产,从而出现各种产出水平。各种不同的投入安排将带来不同的成本,从而就不能对类似(8-1)式的函数给出很好的定义。因此,为了能够很好地定义成本函数,就非常有必要给出一套厂商理论,这在前面已经讨论过了。在定义成本函数时,我们明确地了解到生产成本取决于企业的所有者或经理打算做什么(理论上的主张),以及要受到什么约束,如生产函数本身、合同规定以及要素价格(从某些方面来说)。追求财富最大化企业的成本函数有可能不同于"社会主义合作社"类型的企业,后者追求企业内工人的人均产出的最大化。这两类企业不仅目标函数不同(不同的行为主张),而且,如果后者位于两个不同的国家,产权和合同规定也可能不同。因此,即使这些企业的生产函数相同,他们的成本函数也会不同。而且,即使生产函数可以视为是严格的技术上的关系(通常是不可能的,因为法律体制和签约成本都会影响产出水平),成本函数从来不会被认为是这样的。成本函数通常取决于企业的目标。

我们认为财富最大化是企业行为的主要特征,而且,我们以此为基础来推导成本函数。财富最大化和由此推导出来的成本函数只是一些主张。它们的用处大小取决于可证伪的假设能够在多大程度上从这一理论中推导出来。即使可以找到那些可证伪的假设,但由于它们也可以从关于企业行为的其他假设中推导出来,因此,我们认为并不能"证明"企业会使财富最大化。

下面，认为企业对数量 π 取最大值，其中：

$$\pi = pf(x_1, \cdots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tag{8-2}$$

当然，这一数量 π 不是财富，财富是存量的概念，而 π 是利润，是一个流量的概念。π 的现值或者资本化价值，才是财富。在我们目前的模型中，没有包括调整费用，使得 π 最大化也必然使得财富最大化。如何推导出成本函数(8-1)$C=C^*(y, w_1, \cdots, w_n)$？注意，在成本函数中，产出 y 是一个参数。但是，追求利润最大化的企业将 y 作为一个决策变量，而非参数。即投入作为要素价格和产出价格的函数，同时也决定了产出。追求利润最大化的企业，其要素需求曲线是 $x_i = x_i^*(w_1, \cdots, w_n, p)$。在这些函数里，$y$ 都不是自变量。而且，$y = y^*(w_1, \cdots, w_n, p)$定义了这样一个企业的供给曲线。从这一函数可知，不同的产出价格(以及投入价格)应该对应多少产出。(8-1)式所表示的生产函数意味着当试验条件(产出)自动改变，而要素价格不变时，我们可以观测到成本 C 的变化。但是，追求利润最大化的企业从来不会自动改变产出，只有当某个要素的价格或者某个产品的价格发生变化时，产出 y 才会改变。因此，(8-2)式所表示的利润最大化的模型，不能直接用来推导企业的成本函数。

成本函数必须从产出 y 作为参数的模型中推导出来。即我们必须假定企业以一种特殊的方式在运行，企业在某一产出水平 y^0 上进行生产，上标表明这是一个参数的取值。但是，如果假定我们所讨论的企业追求财富最大化或利润最大化，那么，接下来必然是这样一个企业必定会在成本最小时安排生产。对任何既定的产出水平，总收入 py 是固定不变的。只有当该产出水平下的总成本尽可能小的时候，总收入和总成本之间的差额才会取最大值。因此，与利润最大化行为相一致的成本的有关论断是：

最小化

$$C = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tag{8-3a}$$

满足约束：

$$f(x_1, \cdots, x_n) = y^0 \tag{8-3b}$$

其中，y^0 是给定参数取值的产出水平。

下面，我们从数学上逐步分析这一结论。将含有两个变量的利润最大化模型写成约束问题如下：

$$\max_{x_1, x_2, y} \quad py - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

满足约束：

$$f(x_1, x_2) = y$$

这里，我们将 x_1, x_2, y 作为三个自变量，它们通过约束条件联系在一起。在第 4 章中，我们对该模型的分析是将约束条件代入目标函数。

当然，我们可以构造合适的拉格朗日函数，令所有的一阶偏导等于零，像往常一样进行求解。但是，我们也可以逐步进行：首先，让 y 保持在某一产出水平 y^0，只对 x_1, x_2 求最大值，它们的解是 w_1, w_2, y^0 的表达式。接下来，可以将 x_1, x_2 的这些解代入目标函数和约束条件，并对 y 求最大值。如果这个问题只有惟一一个全局最大值，我们必定可以像往常一样得到同样的最大值。因此，在第一步中，令 $y = y^0$，问题转化为：

$$\underset{x_1, x_2}{\text{最大化}}$$

$$py^0 - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

满足约束：

$$f(x_1, x_2) = y^0$$

因为 py^0 是一个常量，因此在对 x_1, x_2 求导时不会出现。剩下的各项在成本最小化的目标函数(8-3a)中都取负值。由于对某个量求最大值等价于对其相反数求最小值，显然，该模型等价于(8-3)。因此，利润最大化就转变成了利润最大化产出水平下的成本最小化。后面一步，对 y 求最大值，要求企业要选择一个特定的产出水平，在该产出水平下，边际成本等于产品价格，其证明留作练习(本章末的习题 5)。(同时，也会产生某些结论，特别是当明确地指出约束条件时，可以很容易的证明那些关于产出 y 的结论，如 $\partial y^* / \partial p > 0$。)

回到(8-3a)和(8-3b)，假设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是一个非常好的函数，因此可以求出约束极小值的一阶条件和二阶条件，通过求解一阶拉格朗日方程，可以从该模型推出如下可观测的关系式：

$$x_i = x_i^*(w_1, \cdots, w_n, y^0) \quad i = 1, \cdots, n \tag{8-4}$$

只有当企业确实是在产出恒定的约束下运行时，方程(8-4)才是追求利润最大化企业的要素需求曲线。一定要注意，这些需求曲线不同于第 4 章中对追求利润最大化企业所推导出来的关系式 $x_i = x_i^*(w_1, \cdots, w_n, p)$。那些要素需求是产品价格和要素价格的函数，要素需求关系式(8-4)是产出水平(和要素价格)的函数。因为这些函数包括不同的自变量，因此它们是不同的函数。一定要常常牢记我们在考虑哪一个函数——即模型包括的是哪一个函数。

说明这些关系式的目的是定义间接成本函数(通常简称为成本函数)：

$$C = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^*(w_1, \cdots, w_n, y^0) = C^*(w_1, \cdots, w_n, y^0) \tag{8-5}$$

成本函数 $C^*(w_1, \cdots, w_n, y^0)$ 是这样构造的：将生产为 y^0 且成本最小时的投入取值代入总成本的一般表达式。因此，C^* 一定是与变量取值 $w_1, \cdots, w_n, y^0$ 相关的最小成本(见图8-1)。为了减少符号的混乱，下面将从变量 y 中去掉上标 0。

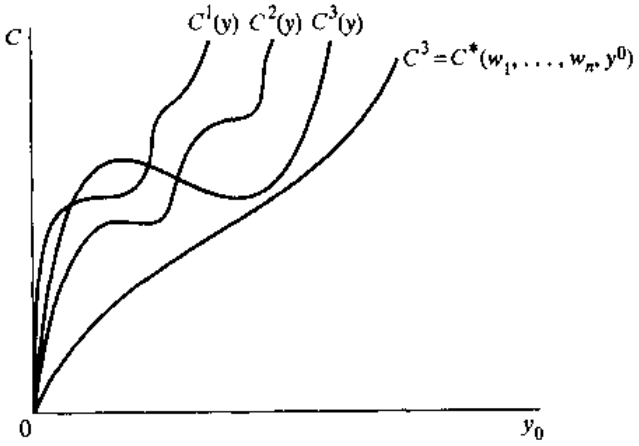

图 8-1　成本函数是关于产出水平 y^0 和要素价格 $w_1,\cdots,w_n$ 的最小成本。它是与追求财富最大化企业的行为相关的惟一成本。其他的行为假设可能意味着不同的成本结构，如图中所示的成本函数 $C^1(y),C^2(y),C^3(y)$。

8.2　边际成本

不严格地说，既定产出水平的边际成本是指总成本的变化对产出变化的比率。即边际成本是指对于约束(产出水平)的变化，用总成本(一种结果)来度量的企业的反映。据此，可以将边际成本 MC 简单地定义为：

$$MC=\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{\partial(\sum w_i x_i)}{\partial y}$$

但是，这样定义却忽略了前面一节关于成本函数涵义的讨论。

根据前面的写法，成本 $=C=\sum w_i x_i$ 不是产出 y 的函数，它只是投入 $x_1,\cdots,x_n$ 和要素价格 $w_1,\cdots,w_n$ 的函数。一个函数对其不含有的自变量求导，在数学上是没有任何意义的。从数学方面可以看出：成本函数还没有得以很好地定义。

正如上一节所指出的，要将投入组织起来进行生产，有很多种方式，但是只有一种方式与我们这里的讨论相关。对于既定水平的产出，只有按照成本最小化的原则将投入组织起来才是相关的。此外，边际成本并不只是由于产出水平的增加所导致的总成本的增加，而且是最小的增加。由于(8-5)式定义的函数 $C^*(w_1,\cdots,w_n,y)$ 给出了任一产出(和要素价格)水平下的最小成本，因此，从 C^* 的角度来说，边际成本可以这样定义：

$$MC=\frac{\partial C^*(w_1,\cdots,w_n,y)}{\partial y} \tag{8-6}$$

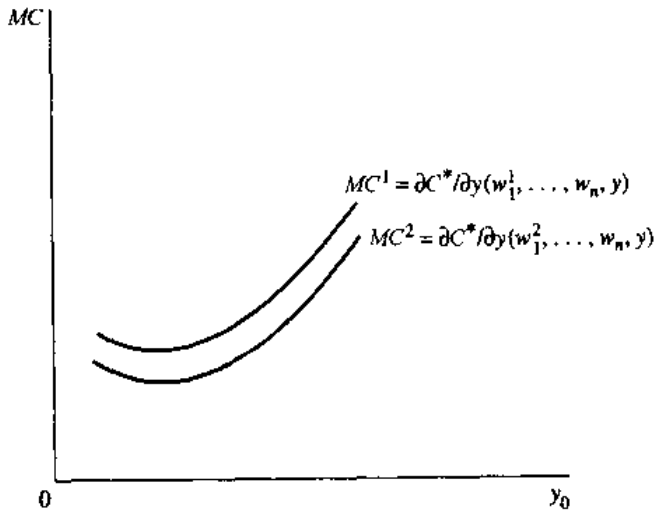

图 8-2 边际成本函数。边际成本函数是 $C^*(w_1, \cdots, w_n, y)$ 对 y 的偏导，本身也是自变量 $w_1, \cdots, w_n, y$ 的函数。图中给出了 w_1 的两个不同取值所对应的两个边际成本函数。从该图不可能确定 w_1^1 和 w_1^2 的大小关系。

该偏导定义得很好，一旦画出边际成本的图形，该偏导也说明了什么是保持不变的——其他条件相同。边际成本函数通常画在二维平面内（如图 8-2），它取决于要素价格的取值，即 MC 随要素价格的变化而上下移动。在图 8-2 中，要素价格的变化导致 MC 曲线的移动，这只是因为此处所画的 MC 只是 y 的函数，而所有的 w_i 都保持不变。也可以将 MC 画成 w_1 的函数，而 $y, w_2, \cdots, w_n$ 保持不变，这样的一条曲线如图 8-3 所示。该曲线没有一般的称谓，但是，正如我们稍后将看到的那样，其斜率 $\partial MC/\partial w_1$ 可正可负，即它的符号不能由财产最大化导出。该图中，y 和其他要素价格的变化都可使得曲线移动。下面几节中，我们将讨论财富最大化和成本最小化在边际成本函数方面的涵义。此外，我们还将讨论边际成本和

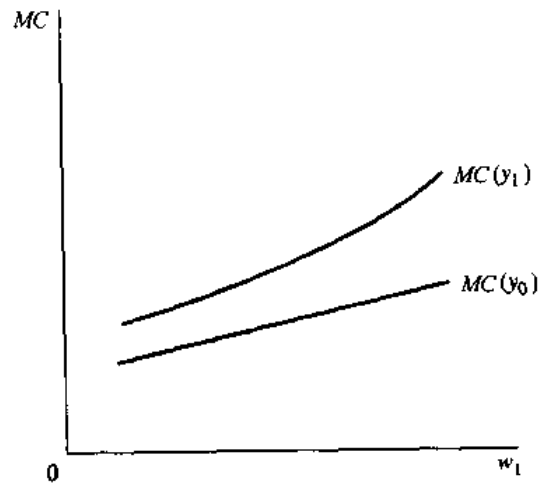

图 8-3 在某一产量水平下的边际成本，它是某一要素价格的函数。该曲线没有一般的称谓，只是用来说明边际成本的多面性。其斜率 $\partial MC/\partial w_1$ 在这里显示为正，它的符号实际上是不能确定的。

平均成本之间的关系。

8.3　平均成本

我们通常所说的平均成本函数 AC 可以这样定义：

$$AC=\frac{C^*(w_1,\cdots,w_n,y)}{y}=AC^*(w_1,\cdots,w_n,y) \tag{8-7}$$

同样，AC 必须根据任意产出水平和要素价格水平下都能达到的最小成本来定义，正如 $C^*(w_1,\cdots,w_n,y)$ 的定义一样。要正确地定义平均成本函数，在逻辑上必须进行行为假定，如同定义边际成本函数一样。AC^* 是要素价格和产出的函数，因此就可以很好地定义偏导 $\partial AC^*/\partial w_i, i=1,\cdots,n$ 和 $\partial AC^*/\partial y$。即研究产出和要素价格变化时的平均成本的变化就很有意义了。通常都将平均成本画成关于产出 y 的曲线，如图 8-4 所示。曲线类似 U 型，这并不只是由于成本最小化造成的，我们后面将加以讨论。如图 8-4 所示，要素价格的变化将使平均成本发生移动。我们稍后将证明，要素价格的上升只会增加企业的平均成本（却并不一定能增加边际成本！），如瞬时影响所揭示的那样。否则，企业会对某些生产要素，如劳动力，支付更多的报酬，从而获取更大的利润。对此很容易达成一致的意见。显然，所有的经验证据都可以驳倒这一特殊的利益协调。达到一定程度之后，企业肯定会缺少收入，并认为要素成本的增加导致了利润的下降。

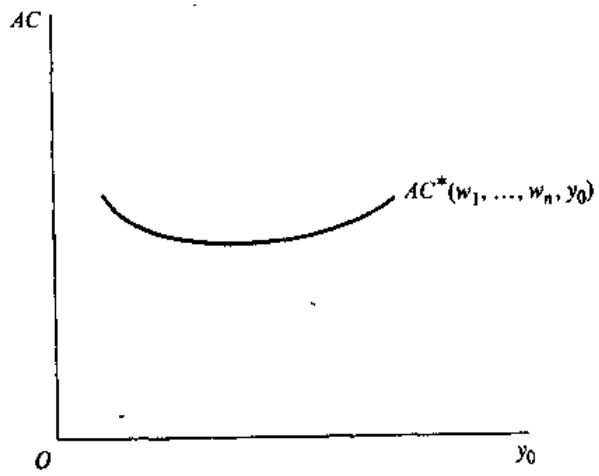

图 8-4　平均成本函数。该曲线画成了通常所认为的 U 型。由于 y_0 是惟一变化的量，要素价格的变化会导致曲线的移动。事实上，对所有的要素价格而言，$\partial AC^*/\partial w_i>0$。即要素价格的上升会导致该产出水平的平均成本的增加。也可以将 AC 画成关于 w_1 的曲线，保持 $w_2,\cdots,w_n,y_0$ 不变。这样画出来的曲线斜率一定为正。

8.4　平均成本和边际成本之间的一般关系

根据定义有：

$$AC^* \equiv \frac{C^*(w_1, \cdots, w_n, y)}{y}$$

这是一个数学恒等式，所以恒等式两边可以对任意一个自变量求导。恒等式对 y 求导可得（右边利用除法法则）：

$$\frac{\partial AC^*}{\partial y} \equiv \frac{[y(\partial C^*/\partial y) - C^*]}{y^2} \tag{8-8}$$

注意到$\partial C^*/\partial y \equiv MC^*$，上式可以改写为：

$$MC^* \equiv AC^* + \frac{\partial AC^*}{\partial y} y \tag{8-9}$$

上式是边际量和平均量之间的一般关系。（对平均产出和边际产出等同样成立）理解这些量的本质非常有用。

边际成本不是生产“最后”一个单位的产品所带来的成本。生产最后一个单位的产品所带来的成本和生产第一个单位及其他任何一个单位的产品所带来的成本都相同，实际上，也是产品的平均成本。边际成本（从有限的意义上来说）是多生产一个单位的产出所导致的成本的增加（或下降），这与“最后一个单位的产品所带来的成本”不是一回事。增加产出需要更多的利用要素投入。在大多数情况下（除了生产过程是规模报酬不变的那些厂商，即生产函数为线性齐次），更多的利用要素投入会导致其效率的降低（也可能增大）。要素比例和强度一旦改变，根据报酬递减定律可知，要素的边际生产力会发生变化，从而影响每单位产出的成本。这些复杂的相互关系的效应可以用(8-9)式表示。注意，该等式表明：边际成本等于平均成本加上一个调整因子。后一项是由于产出增加对所有生产要素造成的损害（在边际成本下降的情况下，是收益），从而导致每单位产出的成本增加（对于边际成本下降的情况，是减少）。所有“外部的”的损失等于$\partial AC^*/\partial y$乘以涉及的产出量 y。换句话说，边际成本与平均成本的差别等于对更高产出下的成本的单位影响乘以涉及的产出量（总产出）。边际量通常比平均量更有用，原因正在于平均量没有包含所有相关的经济变量（在这种情况下，指要素投入）之间的相互关系，然而边际量包含了这种相互关系。

平均成本和边际成本之间的差别或许可以用经济学中一个有名的问题（交通堵塞）来很好地解释，这个问题首先是由芝加哥大学一位著名的理论家 Frank Knight 于 1924 年进行了分析。如果免费的高速公路上不拥挤，那么再驶入一辆汽车时，对高速公路上已经在行驶的其他汽车的平均速度或路途时间没有影响。假设这一不拥挤的高速公路上所有的旅途都要花费 1/2 小时的时间，在这种情况下，平均时间和边际时间都等于 30 分钟。再假设在高速公路的某一路段内已经有 10 辆汽车，当第 11 辆汽车驶入时，道路有一些拥挤，导致每个人的旅途时间都减慢了 2 分钟。则现在的平均时间是 32 分钟，但这不是第 11 辆汽车所带来的边际时间成本。增加第 11 辆汽车的边际时间成本等于这辆汽车的旅行时间（32 分钟）加上前面 10 辆汽车中每辆汽车所增加的旅行时间（2 分钟），即 32+10(2)=52 分钟。(8-9)式给出了连续时间下的表达式。

之所以出现高速公路拥挤这一“经济问题”，是因为使用免费高速公路的消费者无需为

使用高速公路而付费——免费的高速公路之所以称谓“免费的高速公路”是因为使用高速公路不收任何费用。由于使用拥挤的高速公路的边际成本超过了要支付的价格，我们“过多地”使用了高速公路。Frank Knight 指出，如果道路归私人所有，根据利润最大化，道路可以得到很有效的使用。要征收的通行费等于使用辅路(可能会比较慢)和使用高速公路的时间价值之间的差别。如果辅路旅途的价值保持在某一恒定水平 p，则私人所有者将最大化 $T=x(p-AC(x))$，其中，$AC(x)$是使用高速公路所花费时间的平均成本，用美元表示。该模型的一阶条件是 $p=MC(x)$，同一般的利润最大化相同。但是，在这个模型中，该等式意味着如果不走高速公路时对社会的边际机会成本超过了使用其他交通方式的边际价值，汽车就不会走高速公路，这样，高速公路就可以得到很有效地利用。

8.5　成本最小化问题

下面直接转入数学模型，从该模型可以推导出财富最大化时的所有成本曲线：

最小化

$$C=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tag{8-10}$$

满足约束

$$f(x_1,\cdots,x_n)=y \tag{8-11}$$

其中，w_i 是单位要素的价格(恒定)，$f(x_1,\cdots,x_n)$是企业的生产函数，y 是产出变量的取值。这个模型通常称为成本最小化模型，该模型认为企业将使得任何既定产出水平下的总成本 $\sum w_i x_i$ 最小化。下面我们来讨论这一观点的经验性含义。

在解决问题之前，我们先来讨论含有两个变量的模型。即假设企业只使用两种要素 x_1,x_2。这是一个约束最小化的问题，构造拉格朗日函数如下：

$$\mathcal{L}=w_1x_1+w_2x_2+\lambda[Y-f(x_1,x_2)] \tag{8-12}$$

其中，λ 是拉格朗日乘子，$\mathcal{L}$ 分别对 x_1,x_2 及 λ 求导，得到最小化的一阶条件为：

$$\mathcal{L}_1=w_1-\lambda f_1=0 \tag{8-13a}$$

$$\mathcal{L}_2=w_2-\lambda f_2=0 \tag{8-13b}$$

$$\mathcal{L}_\lambda=y-f(x_1,x_2)=0 \tag{8-13c}$$

内部最小化的二阶充分条件是如下的海塞加边行列式为负(当然，这一行列式只是由拉格朗日函数 L 对 x_1,x_2 及 λ 的二阶偏导所组成的矩阵的行列式)：

$$H=\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -f_1 \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix}<0 \tag{8-14}$$

该行列式各行的元素是一阶条件(8-13)式的--阶偏导，从而得到了拉格朗日函数 L 的二阶

偏导。

取最小值的这些数学条件可以用几何图形来解释。图 8-5 中，水平曲线 $f(x_1,x_2)=y$ 是成本最小化问题中的约束条件，它定义了得到产出 y 的投入组合的轨迹。经济学家把这些水平曲线称为等产量线。（要想有更多的了解，参见第 3 章。）这些等产量线在任一点处的斜率是由恒等式 $f(x_1,x_2(x_1))\equiv y$ 对 x_1 求导得到的，即：

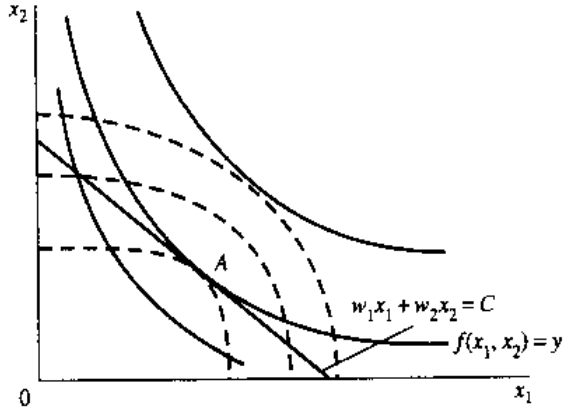

图 8-5 成本最小化问题的相切解。假设边际产出为正，即，增加任一种投入（曲线向东北方向移动），产出都会增加。则等产量线一定会凸向原点，以使切点成为既定产出下的最小成本。如果等产量线如这里的虚线所示，A 点代表最大成本，即，生产产出 y 最没有效率的一种方式。

$$f_1+f_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\equiv 0$$

整理为：

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\equiv -\frac{f_1}{f_2} \tag{8-15}$$

假设 $f_2\neq 0$，即等产量线在该点不是垂直的。等产量线的斜率是投入 1 的边际产出对投入 2 的比率的相反数。因此，$-f_1/f_2$ 定义了 x_1x_2 平面上的某一个方向。

从另一个角度出发，目标函数 $C=w_1x_1+w_2x_2$ 也定义了一个方向。对于 C 的任一既定取值 C^0，目标函数是一个线性曲线，即 x_1x_2 平面上的一条直线，其斜率是 $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1=-w_1/w_2$。

在(8-13a)和(8-13b)中，将 λf_1 和 λf_2 移到等式右边，再把两式相除，消去 λ 可得：

$$\frac{w_1}{w_2}\equiv\frac{f_1}{f_2} \tag{8-16}$$

即两种要素的工资之比等于它们的边际产出之比。这是第 6 章中讨论的最大化定理的直接应用。从图 8-5 可以很容易地看到，相切是成本最小化问题有解的必要条件。较低的成本与离原点较近的等成本线（即成本相等的曲线，$C=w_1x_1+w_2x_2$）相对应。成本最小化问题是指：找出离原点最近的等成本线，但是仍然可以达到产出 y。显然，$C=w_1x_1+w_2x_2$ 能够距原点最远且与等产量线 $f(x_1,x_2)=y$ 相交的点是切点 A。

从二阶条件(8-14)可知，生产函数是拟凹的，即在两维的情况下，等产量线“凸向原点”。如果等产量线形如图 8-5 中的虚线所示，即凹向原点，显然，彼此相切时并不代表成本最小

问题的解。在等产量线与一个坐标轴相交的位置，成本会降低。这不是切线解，而是“角点解”。

生产的等产量线不是形如图 8-5 中的虚线，而是凸向原点，如最初所示的形状，这也是二阶条件(8-14)所蕴含的，之所以这样认为，有一个重要的经验性原因。这个原因是，如果等产量线不是凸向原点，则我们应该观测到企业只会使用一种生产要素。如果等产量线在各个方向上都凹向原点，则成本最小化问题的解将位于等产量线与一个坐标轴相交的位置。(在不太可能的情况下，在同一个成本下，将会有两个或多个交点，从而出现多重解。)由于追求财富最大化的企业也是追求成本最小化的企业，成本最小化问题的解是只使用一种要素。此外，我们考虑一种要素价格变化时，解如何变化。图8-6 中，要素价格 w_1 低于其最初取值 w_1^0，成本最小化问题的解仍在角点 B，即企业对要素价格的下降没有反应。企业使用 x_2 的数量是 x_2^0。那么，在 w_1 的某一临界值 w_1^1，等成本线将穿过两个角点，即等产量线与坐标轴相交的两点。企业使用 x_2^0 个 x_2 或者使用 x_1^0 个 x_1，是无关紧要的。即在角点 A 和角点 B，企业的成本相同。w_1 一旦降低到低于 w_1^1 的水平，即使只是低一点点，企业将突然转为完全使用 x_1，使用量为交点 A 所给出的 x_1^0。对于 w_1 的进一步降低，企业将没有反应。这一情况意味着含有两种要素的需求曲线将形如图 8-7 所示的垂直部分。对于要素价格的某些变化，企业没有反应。但是对于其他一些变化，企业反应剧烈。在下面的讨论中，在现实世界中，我们不考虑这一极端且不连续的要素使用组合。相反，企业对要素价格的变化会逐渐做出反应。如果价格变化较大，企业的反应较大。我们观测到的这一行为与等产量线凹向原点相矛盾，因此，我们可以确信生产函数是拟凹的。确实，想像一下，如果图 8-5 中等成本线的斜率改变，要素价格的变化意味着在等产量线凸向原点的情况下，要素使用的变化是连续的、平滑的。

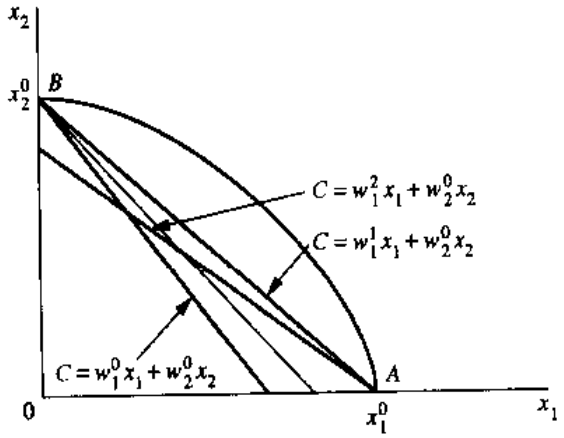

图 8-6　拟凸成本函数的经验性含义。如果等产量线凹向原点，工资既定为 w_1^0，w_2^0，成本最小化问题的解位于点 B，即只使用 x_2。对 x_1 的需求为 0。如果 w_1 降低，成本线围绕 B 转动，它与 x_1 轴的交点向着 A 移动。到达 A 时，出现多重解。企业使用 x_2^0 个 x_2 或者使用 x_1^0 个 x_1，是无关紧要的。如果 w_1 在数值上变得更小，对 x_2 的需求下降到 0，对 x_1 的需求不连续地增加到 x_1^0。此后，随着 w_1 的进一步降低，对 x_1 的需求将稳定在 x_1^0。在该水平下，对 x_1 的需求曲线是垂直的。

可能有人凭感觉相信或自认为等产量线凸向原点。沿着任何一条等产量线，随着 x_1 使用量的增大，斜率 $-f_1/f_2$ 的绝对值变小，这看似有理。这通常称为边际技术替代率递减定理。它不同于第 3 章中所讨论的规模递减律，后者认为 $f_{ii}<0$。这两个“定理”不能相互

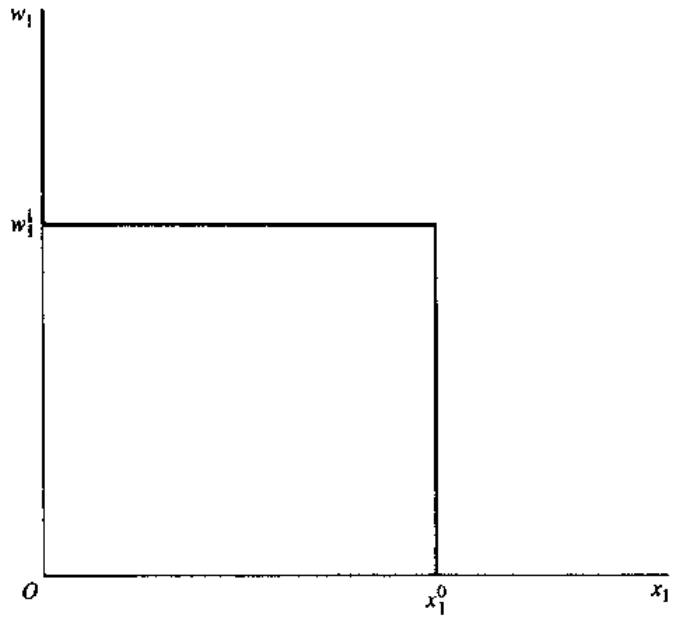

图 8-7 如果等产量线凹向原点，对 x_1 的需求。等产量线不会凹向原点的原因是，这样的等产量线意味着经验性行为与事实相矛盾。尤其是，这样的企业将不会对要素价格的变化有所反应，除非在工资的临界水平（在这里，指 w_1^1）。需求曲线由两个垂直部分组成。现实世界中的企业不会出现这样的行为。

包含。

如果所有这些在你看来似乎都有道理，那当然好了。但是凭直觉还不足以使人认同等产量线的凸性。没有人曾见到过等产量线，而且我们也不可能见到。能够有把握地相信等产量线凸性的惟一原因是，在相反的情况下，企业的行为与现实世界的事实（即企业对要素价格变化的反应非常极端且不连续）相矛盾。

前面已经证明了内切点是成本最小化问题惟一有意义的解，即不与事实相抵触。而且从图 8-5 的几何图形显然可以看出，切点 A 是成本最小化问题的解。可能有人接着会问：企业得到这种类型的解，其决策过程是怎样的？即对于成本最小化问题的决策过程，这样的解（切点）意味着什么？这样询问还是非常有趣的，也非常有用。要回答这一问题，再回顾一下水平曲线斜率（在这里，指 $-f_1/f_2$，$-w_1/w_2$）的意义，是非常必要的。（如果有必要的话，读者应该复习第 3 章有关水平曲线和界面的各节。）

考虑图 8-8 中位于等产量线 $f(x_1,x_2)=y$ 上的点 A'。成本线 $C=w_1x_1+w_2x_2$ 的斜率是 $-w_1/w_2$，它的绝对值小于 $f(x_1,x_2)=y$ 上点 A' 处斜率 $-f_1/f_2$ 的斜率。假设企业决定在 A 点生产同样的产出，多使用 dx_1 个 x_1，少使用 dx_2 个 x_2。从概念上来说，从 A' 到 A 的移动可以看做是从 A' 到 B、再从 B 到 A 的移动。减少使用 x_2 所导致的产出的降低是 x_2 的边际产出 MP_2，大约等于 A 点处的 f_2 乘以 x_2 的减少量，即 f_2dx_2。图 8-8 中，这是由于从

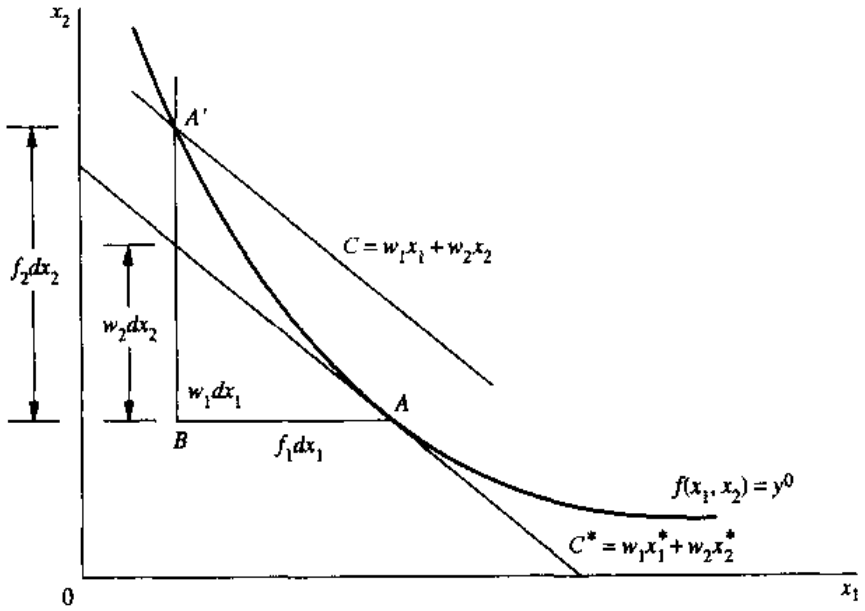

图 8-8　切点和非切点。从图形可以很明显地看出，A'不是成本最小化问题的解。但是，根据关于追求成本最小化企业的经济学知识可知，点 A'意味着企业放弃一部分 x_2，转而投入一部分 x_1，其大小等于等产量线在点 A'处的斜率，这并不等于企业这样做的机会成本，机会成本的大小为等成本线 $C=w_1x_1+w_2x_2$。在点 A'，从内部来说，企业增加 x_1 的大小等于等产量线在点 A'处的斜率 f_1/f_2。这一内解大于企业将一部分 x_2 换为一部分 x_1 的市场成本，即 w_1/w_2。因此，从 A'移到 A 时，成本减少。如果 A'位于 A 的右侧，也是同样的道理。因此，在市场价格下，x_2 是最合适使用的要素。

A'到 B 的移动所导致的产出的下降。从 B 移动到 A 时，x_1 的增加量等于 $\mathrm{d}x_1$，且对于这一增加部分的 x_1，其边际产出近似等于 A 点处的 f_1，因此从 B 移动到 A 时产出的增加等于 $f_1\mathrm{d}x_1$。由于 A 点的产出与 A'点的产出相同，两者都等于 y，在这种情况下一定有 $f_1\mathrm{d}x_1+f_2\mathrm{d}x_2=0$。如果 A'点逐渐无限地接近 A 点，则这种近似会越来越好，结果是：沿着任何一条水平曲线，全微分 $\mathrm{d}y=f_1\mathrm{d}x_1+f_2\mathrm{d}x_2$ 都等于 0。假设 x_2 可以写做 x_1 的函数，等产量线的斜率等于 $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1=-f_1/f_2$。现在，我们就可以理解这样一种关系对于一个企业意味着什么。等产量线的斜率表示每增加一个单位的 x_1，应该放弃多少个单位的 x_2，才能保持产出不变。保持产出不变时，要素之间的这一比率必定等于要素的单位变化所导致的产出增加量($MP_1=f_1$)与产出减少量($MP_2=f_2$)之间的比率。因此，斜率 f_1/f_2 表示从企业内部度量的、用 x_2 表示的 x_1 的大小。

例如，假设 x_1 的边际产出等于 10，x_2 的边际产出等于 5，则 $f_1/f_2=2$。显然，x_1 每增加一个单位，x_2 就要减少 2 个单位，对于“微小”的变化，至少这是可能的。这里，比率 f_1/f_2 等于 2，它测量了在保持产出不变的情况下，x_1 可以替换 x_2 的比率。这是边际技术替代率。

下面，再考虑图 8-8 中的 A' 点。假设 $w_1/w_2=1$，即等成本线的斜率等于 -1。这意味着在要素市场上，投入 x_1 可以等价地替换投入 x_2。即每增加一个单位的 x_1，恰好要放弃一个单位的 x_2，才能维持同样的支出水平。在前面的例子中，我们已经看到，企业放弃两个单位的 x_2，增加一个单位的 x_1，才能保持同样的产出水平。因此，向 A 点移动时，成本可以节省一个单位的 x_2。因此，A' 点不是成本最小化问题的解。

通常，等产量线的斜率度量了企业用一种投入替换另一种投入（用 x_1 替换 x_2）的意愿。等成本线的斜率度量的是在要素市场上采取这样一种做法的机会成本。如果企业愿意用一种要素替换另一种要素，且数量不等于要素市场的交换比率，则有可能发生成本节约。这就是切点解的含义。原点是位于等产量线 $f(x_1,x_2)=y^0$ 上 A 点的左边还是右边，是无关紧要的。从更广泛的意义上来说，从交易（以固定的价格和一般市场进行交易，同与某些个人进行交易是一样的）中获得的收益不会结束，除非某人进行交易的意愿（如大小等于企业保持产出不变时的要素替代率）等于进行这一交易的机会成本（如大小等于一种要素替换另一种要素的成本）。对企业而言，这样有效的要素组合可以归结为条件 $f_1/f_2=w_1/w_2$。

8.6 要素需求函数

下面，再回到一阶条件(8-13)式，即：

$$w_1-\lambda f_1=0 \tag{8-13a}$$

$$w_2-\lambda f_2=0 \tag{8-13b}$$

$$y-f(x_1,x_2)=0 \tag{8-13c}$$

二阶充分条件是由拉格朗日函数 L 对 x_1,x_2 及 λ 的二阶偏导所组成矩阵的行列式为负，该矩阵实际上是由(8-13a)、(8-13b)、(8-13c)式（这些式子已经是 L 的一阶偏导）对这些变量的一阶偏导所组成。

行列式即为：

$$H=\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -f_1 \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix}<0 \tag{8-14}$$

从第 5 章中讨论的隐函数定理可知，如果一组方程的一阶偏导所组成的行列式非零，则这些方程有解（通常可能并不容易求解），这里是因为这一系统中含有剩余变量（这里指参数）的显函数要对那些变量求导。行列式 H 就是这样的一个行列式，而且非零，实际上根据二阶充分条件可知该行列式为负。因此，从(8-13)式可以求解出 x_1,x_2,λ，它们可以用参数 w_1，w_2,y 来表示，得到：

$$x_1=x_1^*(w_1,w_2,y) \tag{8-17a}$$

$$x_2=x_2^*(w_1,w_2,y) \tag{8-17b}$$

$$\lambda=\lambda^*(w_1,w_2,y) \tag{8-17c}$$

(8-17a)和(8-17b)表示产出不变时的要素需求曲线，前面是以(8-4)式讨论的。注意这些式子中的参数 y。如果将 x_1 画在二维图中，另一个坐标轴代表其工资，图像将是一条曲线(实际上，是(8-17a)式的一维投影)，在这条曲线上，w_2 和 y 保持不变。因此，这些曲线并不代表企业在无约束利润最大化问题中的要素需求函数，在这种情况下，产出是变量，产品的价格(在竞争环境下)是参数。

对拉格朗日乘子的说明

(8-17c)式指出，λ 是 w_1,w_2,y 的函数。但 λ 是什么？引入这一新的变量是一种技巧——是求解约束最小化问题的一种简便方法。λ 有什么经济含义吗？实际上，我们可以证明 λ，或者确切地说是 $\lambda^*(w_1,w_2,y)$等价于企业的边际成本函数！

关于 λ^* 这一解释的第一个线索可从(8-13)一阶式中得到。求解 λ^* 可得：

$$\lambda^*=\frac{w_1}{f_1}=\frac{w_2}{f_2} \tag{8-18}$$

同样，在(8-13a)式两边同乘以 x_1，(8-13b)式两边同乘以 x_2，两式相加，得到：

$$\lambda^* f_1x_1^*+\lambda^* f_2x_2^*=w_1x_1^*+w_2x_2^*$$

提出公因子 λ^*，并注意 $w_1x_1^*+w_2x_2^*=C^*$，可得：

$$x^*=\frac{C^*}{f_1x_1^*+f_2x_2^*}$$

注意 $w_1/f_1,w_2/f_2$ 的“单位”。例如，x_1 是“劳动”，x_2 是“资本”。工资率 w_1 是用美元度量的单位劳动力的大小；劳动的边际产出是单位劳动力的产出量的大小。约去劳动力的单位，因此，表达式 w_1/f_1 是用美元表示的单位产出的大小。实际上，用美元度量的单位产出包括了边际成本的单位，当然，它也包括了平均成本的单位。

那么，下面的扩展式有什么含义呢？

$$\lambda^*=\frac{w_1}{f_1}=\frac{w_2}{f_2}=\frac{C^*}{f_1x_1^*+f_2x_2^*} \tag{8-19}$$

企业此时的投入组合使得其成本最小。假设企业要增加很小一个数量 Δx_1 的投入 x_1，如劳动。总成本将增加$(w_1)(\Delta x_1)$。产出也会增加，增加量为$(MP_1)(\Delta x_1)=(f_1)(\Delta x_1)$。因此 $\lambda=w_1/f_1=(w_1)(\Delta x_1)/(f_1)(\Delta x_1)$，表示由于一种投入(这里是 x_1，即劳动)增加使得产出增加所对应的增量成本。类似，$\lambda=w_2/f_2=(w_2)(\Delta x_2)/(f_2)(\Delta x_2)$表示另一种投入(这里是 x_2，即资本)增加使得产出增加所对应的增量成本。由(8-18)式可知，这两个增量成本式意味着成本最小化的必要条件是，增加的那部分产出对应的所有量的边际成本(即每一个决策自变量)必须相同。这部分共同的增量成本是产出的边际成本。(8-18)式说明在达到这一边际成本时，企业增加劳动或资本是无关紧要的——对每种投入而言，这样做所增加的成

本都是相同的。

对于成本最小化的那点，这当然成立。因为如果企业使用劳动，而不使用资本，假设这样做成本的增加更低。在这种情况下，减少资本但增加劳动，显然总成本的增加更低。只有当所有量的边际成本都相等时，才能得到成本最小化问题的解，这一共同的边际成本等于 λ^*。

(8-19)式中的后一部分 $\lambda^* = C^*/(f_1 x_1^* + f_2 x_2^*)$ 是什么意思呢？这一部分更加难以解释。先考虑 $\lambda^* = w_1/f_1 = w_1 x_1^*/f_1 x_1^*$。显然，$w_1/f_1$ 是指要素 1 的单位变化，$w_1 x_1^*/f_1 x_1^*$ 说明该要素的边际成本($w_1 x_1^*$)和收益($f_1 x_1^*$)与总体投入水平有关。同样，$\lambda = w_2 x_2^*/f_2 x_2^*$，即每单位要素 2 的边际收益乘以其使用量，其所对应的该要素所有使用量的成本，也等于边际成本，因为对于各个边际量，增量的成本都必须相同。因此，由初等代数知识可知[1]：

$$\lambda^* = \frac{w_1 x_1^*}{f_1 x_1^*} = \frac{w_2 x_2^*}{f_2 x_2^*} = \frac{w_1 x_1^* + w_2 x_2^*}{f_1 x_1^* + f_2 x_2^*}$$

该式说明，不仅各个量的边际成本都相同，而且如果两种(在多要素的情况下，每一种)要素的组合改变，边际成本也相同。“任一个量或两个量”的边际成本都相同。

$\lambda = \lambda^*(w_1, w_2, y)$ 为何会被公认为边际成本函数，前面给出了直观的解释。尽管直观上看似有道理(而且最终可以看出这也是合理的)，但根据我们最初对边际成本的定义，这种方法还不完善。尤其：

$$MC = \frac{\partial C^*}{\partial y}$$

其中，$C^*(w_1, w_2, y)$ 是(间接的)成本函数。$\lambda \equiv \partial C^*/\partial y$ 还未加以明确的证明。下面我们就来证明这一恒等式。

根据定义：

$$C^* = w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y) \tag{8-20}$$

即将投入的取值(它们是从成本最小化问题中推出来的)代入总成本函数的表达式 $C = w_1 x_1 + w_2 x_2$，可以求得任一产出水平 y 下的最小成本。这些是关系式 $x_i = x_i^*(w_1, w_2, y)$，$i = 1, 2$(8-17a、8-17b 式)。因此，C^* 对 y 求偏导可得：

$$\frac{\partial C^*}{\partial y} = w_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial y} + w_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial y} \tag{8-21}$$

从一阶条件可知，$w_1 = \lambda^* f_1$，$w_2 = \lambda^* f_2$。将这些取值代入(8-21)式，并提出 λ^* 可得：

$$\frac{\partial C^*}{\partial y} = \lambda^* \left(f_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial y} + f_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial y} \right) \tag{8-22}$$

如果 $\lambda^* = \partial C^*/\partial y$，(8-22)式中圆括号内的项必定等于 1。如何证明呢？考虑一阶条件的最后一个式子(实际上是约束条件)：

$$y - f(x_1, x_2) = 0$$

---

1 可以将相等分数的分子和分母分别相加。因此，如果 $a/b = c/d$(这意味着 $ad = bc$)，则 $a/b = c/d = (a+c)/(b+d)$，可以很快地得到证实。

将一阶关系式的解(产出保持恒定时的要素需求函数)(8-17a、8-17b)式再代入到那些一阶条件,(8-13)式就成了恒等式。尤其:

$$y-f(x_1^*(w_1,w_2,y),x_2^*(w_1,w_2,y))\equiv 0$$

即对于 w_1,w_2,y 的任意取值,x_1^* 和 x_2^* 总处于产出水平为 y 的等产量线上,正是因为 x_1^* 和 x_2^* 是方程的解,其中,产出保持为 y 的水平。

因此,这一恒等式对 y 求微分可得:

$$1-f_1\frac{\partial x_1^*}{\partial y}-f_2\frac{\partial x_2^*}{\partial y}\equiv 0$$

整理得到:

$$f_1\frac{\partial x_1^*}{\partial y}+f_2\frac{\partial x_2^*}{\partial y}\equiv 1$$

得证。(8-22)式圆括号内的项等于 1,因此:

$$\lambda^*\equiv\frac{\partial C^*}{\partial y} \tag{8-23}$$

$\lambda^*\equiv\partial C^*/\partial y$ 实际上是包络定理的一个简单结论,我们在上一章已经推导出包络定理。这里为简单起见,回顾一下带有一个约束的最大化问题:

最大化

$$f(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots a_m)=z$$

满足约束

$$g(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_m)=0$$

构造该问题的拉格朗日函数如下:

$$\mathcal{L}=f(x,a)+\lambda g(x,a)$$

由包络定理可知:

$$\frac{\partial z^*}{\partial a_i}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i}=f_{a_i}+\lambda^* g_{a_i}$$

即间接目标函数(其中,所有的 x_i 都能够根据某一个变量的变化而做相应的调整)的变化率实际上等于拉格朗日函数(它在数量上相当于目标函数,因为约束等于 0)对该变量(所有的 x_i 都保持不变)的变化率。

将这一定理应用于目前的问题:

最小化

$$C=w_1x_1+w_2x_2$$

满足约束

$$y-f(x_1,x_2)=0$$

构造出:

$$\mathcal{L}=w_1x_1+w_2x_2+\lambda(y-f(x_1,x_2))$$

这里,参数 y 只是出现在约束中,因此:

$$\frac{\partial C^*}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial y}=\lambda=\lambda^*$$

引入拉格朗日乘子是书写约束最大化问题的一阶条件和二阶条件的一种技巧，是为了方便起见。然而，在这里我们也看到拉格朗日乘子有非常有趣的经济解释。这在很大程度上增强了拉格朗日方法的价值。后面我们将看到，这些乘子时常会为分析经济问题提供有用的公式，也有助于理解问题。

8.7 比较静态分析：传统的方法

下面，我们将研究追求成本最小化的企业对其所涉及参数的变化的反应。下一节，我们将使用一种更强大的新方法（对偶理论）来推导这些结论。但是，我们首先使用第 6 章中提到的传统方法进行论证，以使这一重要的方法能够得以解释和理解。如前所述，除了基本的方法之外，对于非最大化问题的模型，这可能是研究决策变量对参数变化的反应的惟一可行的方法。

我们可能会问，追求成本最小化的企业对于一种要素价格的上升或下降会做出什么反应呢？当该要素的价格或其他要素的价格上升时，投入会增加还是会减少？对边际成本和平均成本有何影响呢？如果竞争压力迫使该企业保持在平均成本曲线上的最小点，企业是会增加产出还是会减少产出？

将这些问题用数学语言来描述，即：

最小化

$$\dot{C}=w_1x_1+w_2x_2$$

满足约束

$$f(x_1,x_2)=y$$

其中，w_1 和 w_2 是要素价格，y 是要确定的产出水平。拉格朗日函数是：

$$L=w_1x_1+w_2x_2+\lambda(y-f(x_1,x_2))$$

对 x_1，x_2，λ 求导，可得约束最小化问题的一阶条件：

$$w_1-\lambda f_1=0 \tag{8-13a}$$

$$w_2-\lambda f_2=0 \tag{8-13b}$$

$$y-f(x_1,x_2)=0 \tag{8-13c}$$

二阶充分条件是：

$$H=\begin{vmatrix}-\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -f_1\\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -f_2\\ -f_1 & -f_2 & 0\end{vmatrix}<0 \tag{8-14}$$

在前面有关各节中曾对这些关系式给出了文字解释。

如果已知生产函数 $y=(x_1,x_2)$，则(8-13)式可直接用来描述成本最小化问题的解。关

于企业的一切情况都会一目了然，包括在任一产出水平下要使用的各种要素的总量，以及由于一个变量的变化而导致的所有变化。但经济学家通常并不知道这类信息。然而，我们认为存在某种类型的生产关系 $y=(x_1,x_2)$，它具有拟凹性的特征（如(8-14)式所总结的，$H<0$）。接着，我们将研究企业对于参数变化的反应，即我们将讨论限制在边际量的范围内。这里使用的是前面提到的比较静态分析的方法。

(8-13)式是含有六个变量 $x_1,x_2,\lambda,w_1,w_2,y$ 的三个方程。只要存在某些数学条件，即 $H\neq 0$，这些方程就可以求解，大致可以得到如下的关系式（前面已经讨论过）：

$$x_1=x_1^*(w_1,w_2,y) \tag{8-17a}$$

$$x_2=x_2^*(w_1,w_2,y) \tag{8-17b}$$

$$\lambda=\lambda^*(w_1,w_2,y) \tag{8-17c}$$

新的变量 λ 称为边际成本。

该模型的比较静态分析可以归结为对下面 9 个偏导符号的确定问题：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j} \quad i,j=1,2\\ &\frac{\partial x_i^*}{\partial y} \quad i=1,2\\ &\frac{\partial \lambda^*}{\partial w_i} \quad i=1,2\\ &\frac{\partial \lambda^*}{\partial y}\end{aligned} \tag{8-24}$$

首先，我们要确定约束最小化假设产生（定性）信息（关于这些边际量）的范围。我们还将证明这些偏导中存在的一些关系式，并推导出一些表达式，除了最小化假设外，在使用经验性信息时，这些表达式会比较有用。

当然，比较静态分析的第一步是将解(8-17)式代入到一阶条件(8-13)（正是从这个条件中求解出(8-17)）。这样，可以得到下面的恒等式：

$$w_1-\lambda^*(w_1,w_2,y)f_1(x_1^*(w_1,w_2,y),x_2^*(w_1,w_2,y))\equiv 0 \tag{8-25a}$$

$$w_2-\lambda^*(w_1,w_2,y)f_2(x_1^*(w_1,w_2,y),x_2^*(w_1,w_2,y))\equiv 0 \tag{8-25b}$$

$$y-f(x_1^*(w_1,w_2,y),x_2^*(w_1,w_2,y))\equiv 0 \tag{8-25c}$$

因为将(8-13)式的解代入到从其中求得解的方程中，因此这些式子是恒等式。这一步骤的经济涵义在于，下面我们认为无论要素价格和产出水平如何，企业通常能够立即将要素投入（该问题的决策变量）调整到某一水平，从而使得该产出水平下总成本最小。从恒等式(8-25)可知，我们已经认为企业只能是追求成本最小化。因为已经建立了这一较强的假设，接下来就可以变化这些参数，从而观测 x_i 的相应变化。方法是，将恒等式(8-25)对一个参数求导，从中求解(8-24)中列出的各个偏导。

下面，我们先讨论 w_1（要素 1 的价格）变化时，追求成本最小化的企业的反应。恒等式(8-25)对 w_1 求导，对 $\lambda^* f_1$ 和 $\lambda^* f_2$ 利用乘积定则和链式法则，可得：

$$1-\lambda^* f_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}-\lambda^* f_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}-f_1\frac{\partial \lambda^*}{\lambda w_1}\equiv 0 \tag{8-26a}$$

$$-\lambda^* f_{21}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}-\lambda^* f_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}-f_2\frac{\partial \lambda^*}{\partial w_1}\equiv 0 \tag{8-26b}$$

$$-f_1\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}-f_2\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\equiv 0 \tag{8-26c}$$

这些关系式可以用矩阵来更清楚地表达。由于(8-26)表示含有 3 个未知量$\partial x_1^*/\partial w_1$、$\partial x_2^*/\partial w_1$、$\partial \lambda^*/\partial w_1$ 的 3 个线性方程(确切地说,是恒等式),因此(8-26)式可以改写为:

$$\begin{bmatrix} -\lambda^* f_{11} & -\lambda^* f_{12} & -f_1 \\ -\lambda^* f_{21} & -\lambda^* f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial w_1} \\ \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial w_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8-27}$$

我们只需从(8-27)中求解出边际量。利用克莱姆法则,有:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -\lambda^* f_{12} & -f_1 \\ 0 & -\lambda^* f_{22} & -f_2 \\ 0 & -f_2 & 0 \end{vmatrix}}{H}=-\frac{H_{11}}{H} \tag{8-28a}$$

同理,对克莱姆法则的分子,将 H 中的第二列和第三列用列向量(−1,0,0)替换,可得:

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}=\frac{-H_{12}}{H} \tag{8-28b}$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial w_1}=\frac{-H_{13}}{H} \tag{8-28c}$$

其中,H_{ij}是行列式 H 中第 i 行第 j 列元素的余子式(有正负之分)。

$H\neq 0$ 时,这些解才有意义。否则,前面的偏导还未加定义。从数学上可知,这些偏导要存在,解(8-17)必须先要很好地加以定义。第 5 章的隐函数定理说明,如果(8-13)的一阶偏导组成的行列式非零,则这些解有意义。这个行列式正是 H,从约束最小化问题的二阶充分条件可知,实际上 $H<0$。因此,在这些假设下,解(8-28)是有意义的表达式。

这些偏导的符号是什么?我们刚才已经看到,这些表达式的分母 H 都取负值。余子式 H_{11}有界的主子式,在最小化的假设下,取值为负。经过观察可知:

$$H_{11}=\begin{vmatrix} -\lambda^* f_{22} & -f_2 \\ -f_2 & 0 \end{vmatrix}=-f_2^2<0$$

因此,显然有定性结果$\partial x_1^*/\partial w_1<0$。

余子式 H_{12}不是有界的主子式,一般来说,其符号是未知的,因此$\partial x_2^*/\partial w_1$ 的符号不能确定。但是,在只含有两个变量的情况下,假设边际产出为正,则:

$$H_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-\lambda^* f_{21} & -f_2\\ -f_1 & 0\end{vmatrix}=+f_1 f_2>0$$

因此，对于只含有两个变量的情况，有：

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}>0$$

$\partial x_2^*/\partial w_1>0$ 对两个要素的情况一定成立，这一事实很容易证明。假设 w_1 下降，企业会使用更多的 x_1。如果企业也使用更多的 x_2，在边际产出为正的假设下，产出将会增加。而且，只要要素价格 w_1、w_2 为正，边际产出就取正值。如果 x_1 增大，则产出要保持不变，x_2 必须下降。但是，这一关系对于多于两种要素的情况不一定成立。其他的某一种（或两种）要素必须下降，但是不一定是这一种要素或另一种要素。最后，

$$H_{13}=\begin{vmatrix}-\lambda^* f_{21} & -\lambda^* f_{22}\\ -f_1 & -f_2\end{vmatrix}=\lambda^*(f_{21}f_2-f_{22}f_1)\gtrless 0$$

因此，$\partial\lambda^*/\partial w_1$ 大于 0 或者小于 0。

对于 w_2 变化的反应，可以推导出类似的关系式。在这种情况下，-1 出现在矩阵方程右边的第二列，这是因为 w_2 只出现在一阶偏导的第二个式子中：

$$\begin{pmatrix}-\lambda^* f_{11} & -\lambda^* f_{12} & -f_1\\ -\lambda^* f_{21} & -\lambda^* f_{22} & -f_2\\ -f_1 & -f_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_2}\\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial w_2}\\ \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial w_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\tag{8-29}$$

同样，根据克莱姆法则可知：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}=\frac{-H_{21}}{H}\tag{8-30a}$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_2}=\frac{-H_{22}}{H}\tag{8-30b}$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial w_2}=\frac{-H_{23}}{H}\tag{8-30c}$$

余子式 H_{22} 是有界的主子式，由二阶充分条件可知，它一定为负。实际上，经过进一步的检查可知，$H_{22}=-f_1^2<0$。因此，对于这些关系式，有可证伪的假设 $\partial x_2^*/\partial w_2<0$。余子式 H_{12} 也有确定的符号。事实上，根据行列式 H 的对称性可知，$H_{12}=H_{21}=f_1 f_2>0$。同样，该模型中的 $\partial x_1^*/\partial w_2>0$ 不能推广到 n 种要素的情形。如果含有两种以上的要素，$\partial x_2^*/\partial w_1$ 或者 $\partial x_1^*/\partial w_2$ 的分子将是一个 $n\times n$ 的非对角线余子式，它的符号不确定。但奇怪的是，像利润最大化模型那样，存在交互关系式：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}=\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\tag{8-31}$$

这是因为通过比较(8-28b)和(8-30a)式可知 $H_{12}=H_{21}$。这与无约束利润最大化问题的结果不同。在前面的模型中，x_i 是要素价格和产品价格的函数，即 $x_i=x_i^*(w_1,w_2,p)$。而这里要素是产出水平 y 的函数：$x_i=x_i^*(w_1,w_2,y)$。这是两种不同的函数，因此，结果也不相同。(尽管如此，为了避免符号混乱，我们还是使用了同样的符号"x_i^*"。)

最后，如前所述，H_{23} 是非对角线(而且非有界)的余子式，从 H_{23} 大于或小于 0 可知 $\partial\lambda^*/\partial w_2$。下面先讨论产出水平的参数变化，稍后将对这一符号的不确定性进行解释。

对于产出的自发移动，企业将如何调整？从前面各章的分析可知，由于 y 出现在约束中，对于这一参数，无法推出可证伪的命题。恒等式(8-25)对 y 求导(注意 y 只是出现在第三个恒等式(8-25c)中)可得：

$$\begin{bmatrix} -\lambda^* f_{11} & -\lambda^* f_{12} & -f_1 \\ -\lambda^* f_{21} & -\lambda^* f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial y} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{8-32}$$

根据克莱姆法则可知：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -\lambda^* f_{12} & -f_1 \\ 0 & -\lambda^* f_{22} & -f_2 \\ -1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix}}{H}=\frac{-H_{31}}{H}\lessgtr 0 \tag{8-33a}$$

同理可得：

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial y}=\frac{-H_{32}}{H}\lessgtr 0 \tag{8-33b}$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial y}=\frac{-H_{33}}{H}\lessgtr 0 \tag{8-33c}$$

考虑最后一个式子$\partial\lambda^*/\partial y$，即$\partial MC/\partial y$，该式给出了边际成本函数的斜率。分子 H_{33} 是行列式：

$$H_{33}=\begin{vmatrix} -\lambda^* f_{11} & -\lambda^* f_{12} \\ -\lambda^* f_{12} & -\lambda^* f_{22} \end{vmatrix}$$

(注意 $f_{12}=f_{21}$)。因此，$H_{33}=\lambda^{*2}(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)$。它看似我们前面曾见过的一个表达式，确切地说，是在利润最大化的模型里，式子$(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)$出现在比较静态分析式子中的分母里。由利润最大化问题的二阶充分条件可知，该表达式取值为正。那么，我们为什么不能从(8-33c)式推出$\partial MC/\partial y>0$，即由于 $H_{33}>0$，边际成本曲线是向上倾斜的。

实际上，这些成本曲线指企业达到最大利润时的情形(即企业达到了利润最大化问题的内解)，在这种情况下，边际成本函数确实是向上倾斜的。但是，从成本最小化并不能推出利润最大化。从隐含的企业行为，以及成本最小化假设使得生产函数的曲率必须具备的数学

条件可知，成本最小化是更弱一些的假设。对利润最大化而言，生产函数必须是严格凹的（下凹）。对于成本最小化问题的充分条件，严格凹并不是必须的。成本最小化问题的二阶条件只要求拟凹性，即水平曲线（这里指等产量线）凸向原点。

很容易看出，这是一个更弱的条件。考虑图 8-9 所示的生产函数 $y=x_1x_2$。该生产函数是 2 次齐次的。它的水平曲线是直角双曲线，显然，成本最小化问题的解对于要素的所有价格都存在。但是，利润最大化的点可以达到（在要素的收益不变时）吗？如果两种投入水平都加倍，产出将会增加 4 倍。但是，成本 $C=w_1x_2+w_2x_2$ 只是原来的两倍。因此，企业的边际成本函数和平均成本函数必然下降（稍后将给出严格的证明）。因此，利润最大值的点永远都找不到。企业的产出增大，利润也常常会增加。从利润最大化的二阶条件可立即推出：

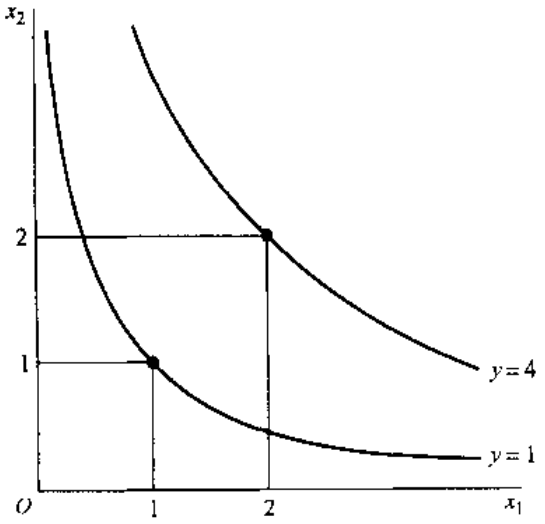

图 8-9　成本函数 $y=x_1x_2$。该生产函数的水平曲线显然是凸的，是直角双曲线。对所有要素价格的组合，成本最小化问题的解必然都存在。但是，例如 $x_1=x_2=2, y=4$ 与 $x_1=x_2=4, y=16$。当成本增加两倍时，收入通常也会增加两倍，因此利润最大化的点不存在。这里，边际成本函数和平均成本函数通常是下降的。利润最大化是比成本最小化更强的条件，即与成本最小化相比，前者对生产函数的形状施加的约束更强。

$$f_{11}f_{22}-f_{12}^2=0\times0-1^2=-1<0$$

与成本最小化相比，利润最大化的假设对生产函数的形状施加的约束更强。凹性隐含着拟凹性，但拟凹性自身并不包含凹性。

下面讨论(8-33a)和(8-33b)式。这些表达式说明，如果产出水平增加，要素投入水平要么增加要么下降。这种情况类似于消费理论中劣等品的情形（第 10 章中将正式讨论），那种情形我们更加熟悉。在劣等品的情形下，当收入增加时，人们普遍都认为许多人对汉堡的消费量将减少，而不是增加。汉堡通常被认为是“劣等品”。同样，生产要素也可以是劣等品。

考虑非熟练工人的情况。假设一个企业要挖一个或两个排水沟，企业多半会雇佣一个或两个工人，并使用一些铁锹。但是，如果企业打算挖好几条城市街道的排水沟，无疑，企业将使用挖掘机（反铲挖土机）及熟练的操作人员。这将会降低企业对非熟练劳动力的需求，甚至有可能降低到零。

因此，$\partial x_i^*/\partial y$ 的符号无法预测，是合情合理的。从最小化假设并不能严格地推导出关于产出效应的可证伪的假设。$\partial x_i^*/\partial y$ 是正是负与模型都是一致的。

还应当指出的是，在产出的全部范围内，所使用的要素不能是劣等品。即必须是这样的情况：在某一较低的产出水平上，$\partial x_i^* / \partial y > 0$，否则，该要素永远都不能首先投入使用。注意，这些比较静态关系式是局部结论，不是全局的。

还有一组关于产出效应的关系式，它们并非那么直观，或者从图像上看那么显然。再注意一下式子：

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial w_1} = \frac{-H_{13}}{H} \tag{8-28c}$$

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial y} = \frac{-H_{31}}{H} \tag{8-33a}$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial w_2} = \frac{-H_{23}}{H} \tag{8-30c}$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial y} = \frac{-H_{32}}{H} \tag{8-33b}$$

由行列式 H 的对称性，立即可知：

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial w_i} = \frac{\partial x_i^*}{\partial y} \quad i=1,2 \tag{8-34}$$

即边际成本函数对要素价格的变化率等于（因此具有相同的符号）该要素的产出效应的

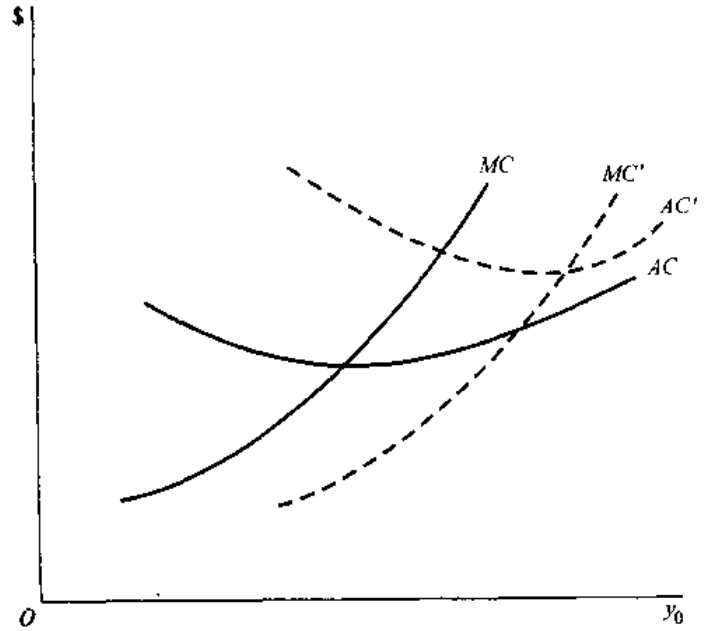

图 8-10 劣等要素的价格发生变化时，边际成本曲线和平均成本曲线的变化。一种劣等要素的价格上升时，企业的边际成本曲线下移，平均成本曲线上移。只要要素成本增加，单位生产成本一定会增加。企业永远不会将将要素成本的增加视为是有利的。但是，如果要素是劣等品，产出的边际成本将下降。

数值。但是，产出效应可以为负，也可以为正。这就导致了非常奇怪的结论：当劣等要素的价格上升时，边际成本曲线（通常都是关于产出的曲线如图 8-10）将会下移。如果$\partial x_1^* / \partial y < 0$，则 x_1 是劣等要素（产出增加时，其使用量反而更小）。如果 w_1 增加，边际成本曲线实际上下移，即在 x_1 是劣等要素的整个范围内，曲线都下移。

我们如何解释这一结论？考虑图 8-11。在一种要素价格上升（产出保持不变）时，追求成本最小化的企业将如何做？当然，企业将会替换掉该要素。但是，如果 x_1 是劣等要素，则对于 x_1 的任何使用水平，x_2 的增加都会导致新的等产量线，这一等产量线比前一等产量线（在这一 x_1，产量水平更低）更加平坦。即等成本线的平行移动导致切点位于原来切点的左侧，因此，等产量线上与原来的切点位于同一条垂线上的点，其斜率的绝对值更小。这意味着随着 x_1 的减少，代表连续产出水平的等产量线之间的距离将缩小。因此，w_1 的增加将降低 x_1，并使得增加部分的产出所对应的成本降低。

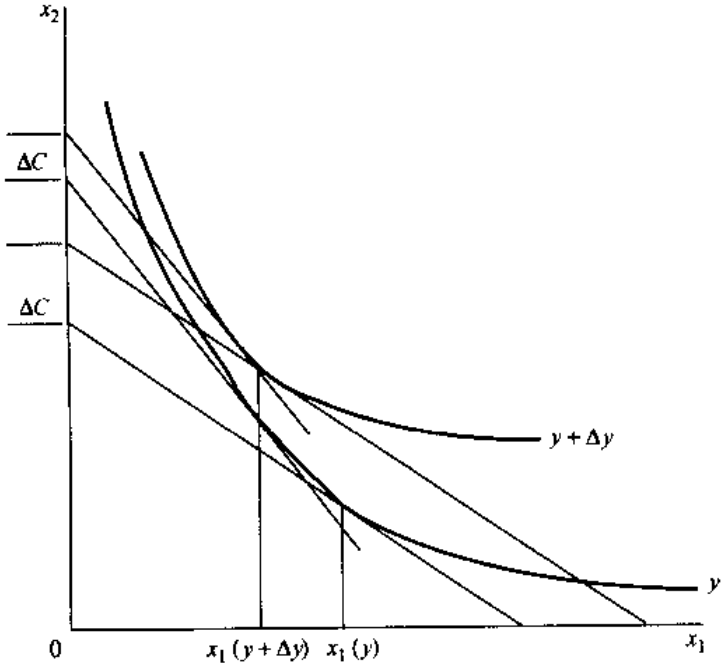

图 8-11　单位劣等要素的成本增加所带来的影响。要素 x_1 是劣等品，产出从 y 增加到 $y+\Delta y$ 将使得对 x_1 的需求降低。对于 x_1 的任何使用水平，当 x_2 的数量增加（垂直移动）时，等产量线会变得更加平坦。我们可以任意定义单位，如令 $w_2=1$。由于等成本线在纵轴上的截距是 $x_2=C/w_2=C$，因此可将垂直移动视为边际成本。当 x_1（x_1 是劣等品）下降时，等产量线将会汇聚，因此，当 x_1 使用的较少（即，w_1 增大）时，产出从 y 增加到 $y+\Delta y$ 的边际成本就越少。

8.8 利用对偶理论推导比较静态关系式

下面，我们来讨论利用对偶理论这一重要模型的性质，对偶理论曾在第 7 章中阐述。

交互条件

可以利用包络定理对交互条件$\partial x_i^* /\partial w_j=\partial x_j^* /\partial w_i$及$\partial\lambda^* /\partial w_i=\partial x_i^* /\partial y$进行更简单、更有力地证明和解释。再回顾一下一般性的约束最大化(或最小化)问题：

最大化

$$f(x_1,x_2,\alpha)=y$$

满足约束

$$g(x_1,x_2,\alpha)=0$$

其中，α代表一个或多个参数，满足$\partial y^* /\partial\alpha=\partial L/\partial\alpha$。即决策变量$x_1$和$x_2$可以通过$x_1=x_1^*(\alpha)$，$x_2=x_2^*(\alpha)$进行“调整”，$f$的最大值(对任意的$\alpha$)对$\alpha$的变化率等于拉格朗日函数$L=f(x_1,x_2,\alpha)+\lambda g(x_1,x_2,\alpha)$对$\alpha$的偏导($x_i$保持不变)。我们已经利用这一理论来证明$\lambda$可以解释为边际成本(参见(8-23)式)。

成本最小化问题：

最小化

$$C=w_1x_1+w_2x_2$$

满足约束

$$f(x_1,x_2)=y$$

其拉格朗日函数为：

$$\mathscr{L}=w_1x_1+w_2x_2+\lambda(y-f(x_1,x_2))$$

因此，从包络定理可知：

$$\frac{\partial C^*}{\partial w_1}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial w_1}=x_1=x_1^*(w_1,w_2,y) \tag{8-35}$$

对x_2也类似。同样，如前面的(8-23)式所示，$\partial C^* /\partial y=\partial\mathscr{L}/\partial y=\lambda^*(w_1,w_2,y)$。(8-35)式通常称为 Shephard's lemma，这是成本函数和生产函数包络定理的重要组成部分。前面我们也证明了：

$$\frac{\partial C^*}{\partial y}\equiv\lambda^*(w_1,w_2,y) \tag{8-23}$$

现在$C^*(w_1,w_2,y)$是二次可微的，假设生产函数性质良好，即可以求得成本最小化问题的稳定的内解。但是看一下$C^*(w_1,w_2,y)$的混合偏导：由于$C_{w_1}^*\equiv x_1^*(w_1,w_2,y)$，$C_{w_1w_2}^*$即为$\partial x_1^* /\partial w_2$；即：

$$C_{w_1w_2}^*\equiv\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}$$

但是，由于求偏导时可以不考虑顺序，因此 $C^*_{w_1w_2}\equiv C^*_{w_2w_1}$。所以，显然：

$$C^*_{w_2w_1}\equiv\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\equiv\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}\equiv C^*_{w_1w_2}$$

即(8-31)式。

同理，由于$\partial C^*/\partial y\equiv C^*_y=\lambda^*(w_1,w_2,y)$：

$$C^*_{yw_1}\equiv\frac{\partial\lambda^*}{\partial w_1}$$

但是，$C^*_{yw_1}\equiv C^*_{w_1y}\equiv\partial x_1^*/\partial y$。因此：

$$\frac{\partial\lambda^*}{\partial w_1}=\frac{\partial x_1^*}{\partial y}$$

即(8-34)式。同理可证$\partial\lambda^*/\partial w_2\equiv\partial x_2^*/\partial y$。

这是一种非常有效、又非常简单的考虑交互条件的方式。(或许，正是因为它的简单，它才有效。)交互条件简单的认为，成本函数的混合偏导与求导的顺序没有关系。交互条件存在，却仅仅是因为$C^*(w_1,w_2,y)$的一阶偏导具有特别简单的形式$\partial C^*/\partial w_i=x_i^*$，$\partial C^*/\partial y\equiv\lambda^*$。这些一阶偏导之所以简单，是因为拉格朗日函数 $L=w_1x_1+w_2x_2+\lambda(y-f(x_1,x_2))$实际上是参数 w_1,w_2,y 的线性函数。如果拉格朗日呈现这样的线性，则交互条件将存在。

包络定理目前的理论进展使得我们能够简单的推导成本最小化模型的交互涵义。该模型所包含的比较静态关系式是(间接)成本函数曲率性质(尤其是凹性)的推论。我们使用与利润最大化模型类似的方法来推导。对于给定的要素价格和产出水平，某一要素的水平隐含在下式中：

$$x_1^0=x_1^*(w_1^0,w_2^0,y^0)$$
$$x_2^0=x_2^*(w_1^0,w_2^0,y^0)$$

图 8-12 中，将成本画成了 w_1 的曲线。画出“约束”成本函数 $C=w_1x_1^0+w_2x_2^0$，作为“参照”线。注意，惟一的“变量”是 w_1，其他变量都保持为特定的取值。该函数显然是线性的，斜率 x_1^0 为正。

下面研究 $C^*(w_1,w_2^0,y^0)$将出现在图中的什么位置。根据定义，C^* 是在既定产出和工资水平下的最小成本，因此，$C^*(w_1,w_2^0,y^0)$不能总是位于约束成本线的上方。但是，当 $w_1=w_1^0$ 时，正是合适的(即成本最小)的投入水平。因此，当 $w_1=w_1^0$ 时，$C^*(w_1,w_2^0,y^0)=w_1x_1^0+w_2x_2^0=C$。此外，在 w_1^0 的任意一边，假设存在惟一解，$C^*<C$。从几何图形显然可以看出，$C^*(w_1,w_2^0,y^0)$对 w_1 一定是凹的(根据对称性可知，对 w_2 显然也是凹的)。(实际上，根据第 7 章的代数知识可知，海赛阵必定半负定。)这一凹性的结论还包括 $C^*_{w_1w_2}\leqslant 0$。然而，根据包络定理，$C^*_{w_i}=x_i^*$，因此，$C^*_{w_1w_2}=\partial x_1^*/\partial w_1\leqslant 0$。类似可以对 x_2^* 进行分析。这些结论在第 7 章中给出了代数推导，没有利用几何图形。这些结论可以直接推广到含有 n 种要素的模型。

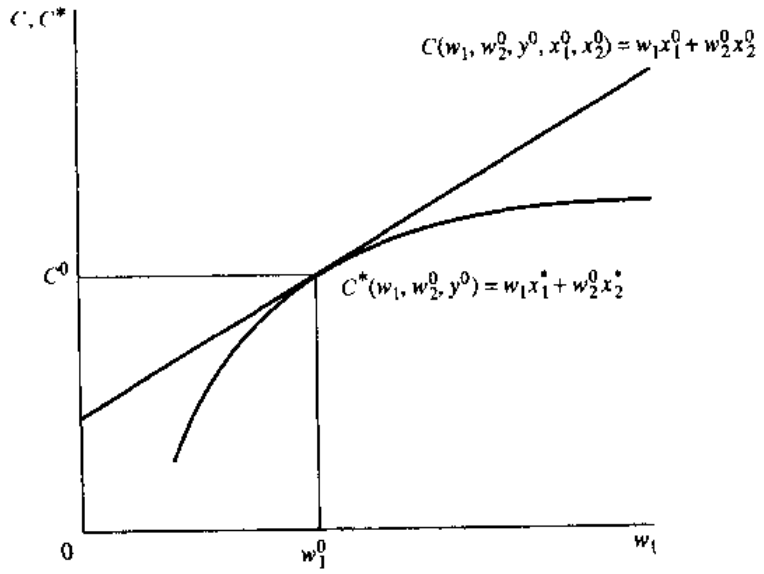

图 8-12 成本函数 $C^*(w_1, w_2^0, y^0)$(w_1 变化，w_2，y 保持不变)及成本函数 $C(w_1, w_2^0, y^0, x_1^0, x_2^0)$($x_1$，$x_2$ 分别保持在 $x_1^0 = x_1^*(w_1, w_2^0, y^0)$和 $x_2^0 = x_2^*(w_1, w_2^0, y^0)$)。$C(w_1, w_2^0, y^0, x_1^0, x_2^0) = w_1x_1^0 + w_2x_2^0$ 关于 w_1 显然是线性的；即，从几何图形上来看，它是一条直线。当 $w_1 = w_1^0$ 时，由于 x_1^0, x_2^0 恰好是在约束条件下使得总成本最小的数量，因此 $C = C^*$。对于 $w_1 \neq w_1^0$，由于此时使用了"不恰当"的 x_i，成本为 C，而 C^* 是最小成本，利用任何适合的 x_1^*, x_2^* 计算得到，因此，$C^* < C$。但是因为当 $w_1 = w_1^0$ 时，$C = C^*$，在 x_1^0 的邻域内，$C^* < C$，C^* 一定是 C 在 w_1^0 的切点；同理，由于 $C = w_1x_1^0 + w_2x_2^0 C^*$ 对 w_1 是线性的，因此 C^* 在 w_1 方向上一定是凹的。因此，根据切线可知 $C_{w_1} = C_{w_1}^* = x_1^* = x_1^0$，根据在 w_1 方向上的凹性可知 $C_{w_1w_2}^* = \partial x_1^* / \partial w_1^* \leqslant 0$。

短期成本曲线和长期成本曲线

在著名的 Viner Wong 成本图表(参见图 7-1)中，在任何既定的产出水平上，短期及长期的边际成本函数是相同的。然而，与长期成本函数相比，短期成本曲线要么增加得更快，要么下降得更慢。我们可以利用条件需求的方法对这一结果进行严格的证明。

从短期来看，一种要素保持恒定，因此，我们必须认为模型含有两种以上的要素。已经有了一个约束条件 $f(x_1, x_2) = y^0$，再增加一个约束条件必定将解完全指定在等产量线 y_0 的某一特定点上，最小化假设就没有增加自由度的空间了。因此，我们来考虑含有 n 种要素的一般模型。利用向量记法，令 $x = (x_1, \cdots, x_n)$及 $w = (w_1, \cdots, w_n)$分别代表要素水平和工资水平。联系短期和长期的边际成本函数的基本恒等式如下：

$$\lambda^*(w, y) \equiv \lambda^S(w_1, \cdots, w_{n-1}, x_n^*(w, y), y) \tag{8-36}$$

其中，λ^S 是适当定义的短期边际成本函数，它是从成本最小化问题(x_n 为参数时)中推导出

来的。当然，产出 y 是参数。

基本恒等式对产出 y 求导可得：

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial y} \equiv \frac{\partial \lambda^S}{\partial y} + \left(\frac{\partial \lambda^S}{\partial x_n^0}\right)\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial y}\right) \tag{8-37}$$

恒等式对 w_n 求导可得：

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial w_n} \equiv \left(\frac{\partial \lambda^S}{\partial x_n^0}\right)\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial w_n}\right) \tag{8-38}$$

对成本函数利用杨氏定理和包络定理，得到交叉条件：

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial w_n} \equiv \frac{\partial x_n^*}{\partial y}$$

用上式和(8-38)式替换(8-37)式中的$\partial \lambda^* / \partial x_n^0$，得到：

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial y} \equiv \frac{\partial \lambda^S}{\partial y} + \frac{(\partial x_n^* / \partial y)^2}{(\partial x_n^* / \partial w_n)} \tag{8-39}$$

从(8-39)式可知，长期边际成本函数的斜率与短期函数的斜率相差一个非正的数量；因此：

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial y} \leqslant \frac{\partial \lambda^S}{\partial y} \tag{8-40}$$

从(8-39)式还可以知道，短期和长期边际成本函数之间的差别与产出效应的大小成正比，与要素需求曲线的斜率成反比。

利用图 8-13，我们可以证明边际成本在短期比在长期增加得更快，或者下降得更慢。图(a)描述了传统的 Viner Wong 图表。长期的和短期的平均成本曲线相同，并在某一产出水平 y^0 下相切，长期的和短期的边际成本在该点相等，但是长期边际成本在下降，而短期边际成本在上升。图(b)画出了相应的总成本曲线。曲线 $C^*(y)$是长期(总)成本函数。(这里我们不讨论该函数的其他看法)曲线 $C^S(y)$是我们增加某一补充约束时的短期成本函数，该约束使得原来的约束最小值在产出水平 y^0 下不受干扰。因此，在产出水平 y^0 下 $C^* = C^S$，但是在 y^0 的任何一侧，一定是 $C^* < C^S$，因为根据定义，C^* 是任意产出水平下的最小成本，而且补充约束只是增加了 $y \neq y^0$ 时某一产出下的生产成本。C^* 的斜率是 λ^*；$C^S(y)$的斜率是短期边际成本函数 $\lambda^S(y)$。注意，C^* 最初是凹的。然后是凸的。这意味着边际成本可以先下降，然后再上升。假设这些函数可微，显然 C^S 与 C^* 切于 y^0，且此时，C^S 更凸或更不凹。用数学语言来表示，函数 $F = C^* - C^S$ 在 y 取值为 y^0 时取得无约束最大值。因此，$F_y = C_y^* - C_y^S = 0$，即 $\lambda^* = \lambda^S$，且 $F_{yy} = C_{yy}^* - C_{yy}^S \leqslant 0$，即$\partial \lambda^* / \partial y \leqslant \partial \lambda^S / \partial y$。尽管条件需求关系式(8-39)只适合于一种要素保持不变的情况，不等式(8-40)(从该式可知，增加一种补充约束时，边际成本函数的斜率增加)对更一般的“短期”情形都成立，即对增加某一种补充约束时成立。非常有趣的是，即使推导不出边际成本函数斜率的符号，实际上还是能够推导出其斜率如何变化的系统关系式，尤其是当在模型中增加一个补充约束时，边际成本增加得更快，或者下降得更慢。最后，注意在 y^0 处，平均成本(它们是从原点到 C^* 或 C^S 的射线的斜率)必须相等，但是当 $y \neq y^0$ 时，短期平均成本大于长期平均成本。

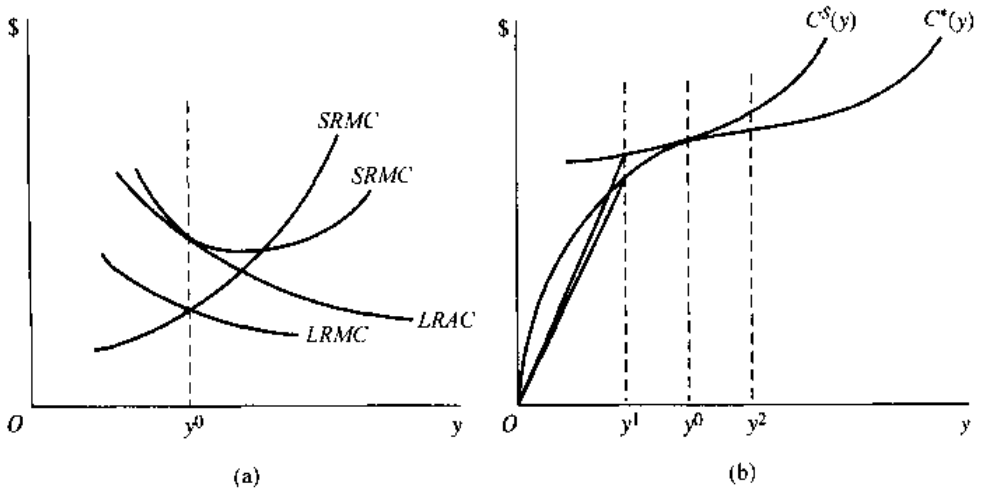

图 8-13 Viner Wong 图表。(a)传统的 Viner Wong 图表。在某一产出水平 y_0 下，短期平均成本和长期平均成本相等、并且相切，此时，短期边际成本曲线从下方与长期边际成本曲线相交。(b)长期总成本函数(C^*)和短期总成本函数(C^S)。由于补充约束只有在 y^0 处才起作用，因此在 y^0 处 $C^*=C^S$，但是在 y^0 的任一侧，$C^*<C^S$，这是因为 C^* 是最小成本。因此，C^S 和 C^* 在 y^0 处相切，但是在该点，C^S 比 C^* 更凸或更不凹。相切意味着短期边际成本曲线和长期边际成本曲线的斜率相等。C^S 的相对凸性意味着在 y^0 处，短期成本曲线的斜率大于长期边际成本曲线的斜率。

短期要素需求和长期要素需求

类似可以证明一种要素保持不变对恒定产出下要素需求的斜率的影响。假设 x_n 是固定生产要素，关于要素 1 到 $n-1$ 的基本恒等式如下：

$$x_i^*(w,y)\equiv x_i^S(w_1,\cdots,w_{n-1},x_n^*(w,y),y) \tag{8-41}$$

上式对 w_i 求导可得：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_i}\equiv\frac{\partial x_i^S}{\partial w_i}+\frac{\partial x_i^S}{\partial x_n^0}\frac{\partial x_n^*}{\partial w_i} \tag{8-42}$$

基本恒等式对 w_n 求导可得：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_n}\equiv\frac{\partial x_i^S}{\partial x_n^0}\frac{\partial x_n^*}{\partial w_n} \tag{8-43}$$

但是，$\partial x_i^*/\partial w_n\equiv\partial x_n^*/\partial w_i$。将该式代入(8-43)可得：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_i}\equiv\frac{\partial x_i^S}{\partial w_i}+\frac{(\partial x_n^*/\partial w_i)^2}{(\partial x_n^*/\partial w_n)} \tag{8-44}$$

该式与边际成本函数情况下的(8-39)式相似。同样，由于恒等式右侧的第二项必然非正，可知：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_i}\leqslant\frac{\partial x_i^S}{\partial w_i}\leqslant 0 \tag{8-45}$$

x_n 和 w_i 之间的交叉效应越大，且 x_n 的斜率 $\partial x_n^*/\partial w_n$ 越小，则短期和长期要素需求曲线的

斜率之间的差异就越大。

短期和长期的交叉效应之间存在相似的表达式，然而，定性结论取决于对要素互补性或替代性的其他假设。这些关系式留作练习。

例　考虑生产函数 $y=x_1x_2^2$。该函数的边际报酬递增，因此在恒定价格下，无法达到有限的利润最大值。但对于任何既定的产出水平 y，还是存在成本最小化的投入组合。下面将寻找恒定产出下的要素需求曲线。

最小化

$$C=w_1x_1+w_2x_2$$

满足约束

$$x_1x_2^2=y$$

构造拉格朗日函数如下：

$$\mathscr{L}=w_1x_1+w_2x_2+\lambda(y-x_1x_2^2)$$

上式分别对 x_1，x_2，λ 求导，可得：

$$\mathscr{L}_1=w_1-\lambda x_2^2=0$$
$$\mathscr{L}_2=-w_2-2\lambda x_1x_2=0$$
$$\mathscr{L}_\lambda=y-x_1x_2^2=0$$

合并前两个表达式，可得：

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{x_2}{2x_1}$$

变形为：

$$x_2=\frac{2w_1x_1}{w_2}$$

现在，将 x_2 的这一表达式代入生产函数，得到：

$$x_1\left(\frac{2w_1x_1}{w_2}\right)^2=y$$

整理为：

$$\frac{4x_1^3w_1^2}{w_2^2}=y$$

求解 x_1：

$$x_1^*=4^{-1/3}w_1^{-2/3}w_2^{2/3}y^{1/3}$$

同理，根据相切的一阶条件可知：

$$x_1=\frac{w_2x_2}{2w_1}$$

将上式代入生产函数可得：

$$\frac{w_2x_2}{2w_1}x_2^2=y$$

求解 x_2 可得：

$$x_2^* = 2^{1/3} w_1^{1/3} w_2^{1/3} y^{1/3}$$

注意，x_1^* 和 x_2^* 对要素价格和产出是分离的。x_1^* 和 x_2^* 对 w_1 和 w_2 是 0 次齐次的。将 x_1^* 和 x_2^* 代入 $C=w_1x_1+w_2x_2$，可以求得成本函数：

$$\begin{aligned} C^* &= w_1 4^{-1/3} w_1^{-2/3} w_2^{2/3} y^{1/3} + w_2 2^{1/3} w_1^{1/3} w_2^{-1/3} y^{1/3} \\ &= k w_1^{1/3} w_2^{2/3} y^{1/3} \end{aligned}$$

其中，$k=4^{-1/3}+2^{1/3}=2^{-2/3}+2^{1/3}=2^{1/3}(2^{-1}+2^0)=\frac{2}{3}(2^{1/3})$。注意，$C^*$ 对 w_1 和 w_2 是 1 次齐次的，这是成本函数的一个普遍性质。同样要注意：

$$\frac{\partial C^*}{\partial w_1} = \frac{1}{3} k w_1^{-2/3} w_2^{2/3} y^{1/3} \equiv x_1^*$$

及

$$\frac{\partial C^*}{\partial w_2} = \frac{2}{3} k w_1^{1/3} w_2^{-1/3} y^{1/3} \equiv x_2^*$$

包络线的这些性质的一般情形在(8-35)中给出。

与利润最大化的关系

前面我们提到，讨论成本最小化模型的主要原因是它与利润最大化下企业的行为有关。在利润最大化的点，企业必然使得该产出水平下的成本最小。换句话说，在 $x_i^*(w_1, w_2, y)$ 中如果用 y^*（利润最大化时的产出水平）来代替参数值 y，结果必然是从利润最大化中推导出的要素需求函数 $x_i^*(w_1, w_2, p)$。在含有 n 变量的情况下，利润最大化模型和成本最小化模型共有 $n-1$ 个一阶条件，$f_i/f_j=w_i/w_j$。模型之间的差别只在于产出水平的不同。在成本最小化模型中，产出是参数，然而在利润最大化模型中，产出是由利润最大化假设内生确定的。

由于符号“x^*”是用来代表两个不同的函数，表示从利润最大化模型中推导出来的要素需求 $x_i^p(w_1, w_2, p)$，以及从成本最小化模型中推导出来的要素需求 $x_i^y(w_1, w_2, p)$。那么，上面的推理可以用恒等式来表示：

$$x_1^p(w_1, w_2, p) \equiv x_1^y(w_1, w_2, y^*(w_1, w_2, p)) \tag{8-46}$$

关于 x_2 的表达式类似。这一基本关系式可用来推导这两种需求函数的斜率之间的关系。

假设追求利润最大化的企业面临着某一要素价格（如 w_1）的下降。那么，我们可以将用要素需求来度量的反应想象为发生在两个理性阶段。首先出现的是“纯替代”效应。企业处在同一条等产量线上，但是会沿着这条等产量线移动到对 x_1, x_2 新的选择上，以使成本最小。换句话说，企业首先根据成本最小化模型的需求函数 $x_i^y(w_1, w_2, p)$ 做出反应。明确地说，企业选择使用更多的 x_1。但接下来将出现“产出效应”，企业选择利润最大化的产出水平。与纯替代效应不同的是，这一产出水平不能确定。当 w_1 下降时，产出要么增加，要么

下降。$x_i^y(w_1,w_2,p)$和 $x_i^p(w_1,w_2,p)$，哪一种需求函数更富有弹性？

如果企业能够选择“最大化”产出水平的类型，他就会选择更大的绝对要素反应（的类型），则这种推理对两种模型都正确。（但是要注意，这样的直觉并不总是正确的，在消费者理论中并不正确，这很重要。）这一结果可以进行严格的证明，恒等式(8-46)对 w_1 微分，对右边利用链式法则可得：

$$\frac{\partial x_1^p}{\partial w_1}\equiv\frac{\partial x_1^y}{\partial w_1}+\frac{\partial x_1^y}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial w_1} \tag{8-47}$$

仔细检查恒等式右边的符号：x_1^y 是参数产出水平 y 的函数，因此出现在链式法则表达式的第一部分。但是，产出是根据利润最大化来进行选择的，因此 y^* 出现在该表达式的第二部分。

(8-47)式表明，两种需求函数的斜率的差别在于有关产出效应的混合项，包括 x_1 的变化对产出 y 的变化之间的比率。第二项的符号可以确定吗？确实可以——回顾交叉条件 $\partial x_1^*/\partial p=-\partial y^*/\partial w_1$，它是将杨氏定理应用到间接利润函数中而推导出来的。（参见第 4 章的命题 1）将该式代入(8-47)式可得：

$$\frac{\partial x_1^p}{\partial w_1}\equiv\frac{\partial x_1^y}{\partial w_1}-\frac{\partial x_1^y}{\partial y}\frac{\partial x_1^p}{\partial p} \tag{8-48}$$

需要明确的是，由于 p 和 y 沿着同样的方向变化，因此恒等式右边最后两项的符号相同。可以进行严格的证明，基本恒等式对 p 求导可得：

$$\frac{\partial x_1^p}{\partial p}\equiv\frac{\partial x_1^y}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial p}$$

利用上式和(8-47)式可得：

$$\frac{\partial x_1^p}{\partial w_1}\equiv\frac{\partial x_1^y}{\partial w_1}-\left(\frac{\partial y^*}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial x_1^y}{\partial y}\right)^2 \tag{8-49}$$

由于供给曲线是向上倾斜的，因此，$(\partial y^*/\partial p)\geqslant 0$。于是有：

$$\frac{\partial x_1^p}{\partial w_1}\leqslant\frac{\partial x_1^y}{\partial w_1}\leqslant 0 \tag{8-50}$$

同理，可以分析这两个模型中交叉效应 $\partial x^*/\partial w_2$ 的相对大小。对于这些不同，并不能得到确定的符号；还需要对产出效应做出进一步的假设，分析过程留作练习。

从利润最大化推导出来的要素需求函数和从成本最小化推导出来的要素需求函数之间的系统关系、可以表述为基本的 Le Châtelier 关系，我们在第 7 章中已经讨论过。成本最小化模型是加上了约束条件 $y=y^0$ 的利润最大化模型。一旦在利润最大化模型中加入任何约束条件，都存在 $\partial x_i^*/\partial w_i=\partial x_i^c/\partial w_i$。(8-50)式只是这一情况的一个特例。

8.9　弹性；要素需求曲线的其他性质

要素需求曲线 $x_i=x_i^*(w_1,w_2,y)$和边际成本曲线 $\lambda=\lambda^*(w_1,w_2,y)$的性质，通常用无

维度量纲的弹性来表示，而不是直接使用斜率(偏导)。需求弹性定义为：

$$\epsilon_{ij}=\lim_{\Delta w_j\to 0}\frac{\Delta x_i/x_i}{\Delta w_j/w_j}$$

其中，ϵ_{ij}表示在某一要素价格w_j的变化率给定的情况下(产出不变)，要素投入量x_i的变化率(的极限)。$i=j$时，称为要素需求的自弹性；$i\neq j$时，称为交叉弹性。

利用极限的定义，对后一项进行简化，可得：

$$\epsilon_{ij}=\frac{w_j}{x_i^*}\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j}\quad i,j=1,2 \tag{8-51}$$

同样，我们也可以定义要素需求的产出弹性，即一种要素投入量的变化率与产出的变化率之比(要素价格不变)：

$$\epsilon_{iy}=\lim_{\Delta y_i\to 0}\Delta x_i/x_i/\Delta y/y=\frac{y}{x_i^*}\frac{\partial x_i^*}{\partial y} \tag{8-52}$$

齐次性

需求曲线$x_i=x_i^*(w_1,w_2,y)$对要素价格或对w_1,w_2(对于使用两种要素的情况)是0次齐次的。即$x_i^*(tw_1,tw_2,y)=x_i^*(w_1,w_2,y)$。保持产出$y$不变时，所有要素的价格同比例变化，投入组合不会发生变化。这也用另一种方法说明了只有相对价格的改变(而非绝对价格的变化)才会影响经济行为。

如果追求成本最小化的企业面对的要素价格是tw_1,tw_2，问题将变成：

最小化

$$tw_1x_1+tw_2x_2$$

满足约束

$$f(x_1,x_2)=y$$

由于$tw_1x_1+tw_2x_2=t(w_1x_1+w_2x_2)$是对目标函数非常简单的单调的变形，我们猜测一阶条件的表达式不会有实质性的变化。构造拉格朗日函数$\mathcal{L}=t(w_1x_1+w_2x_2)+\lambda(y-f(x_1,x_2))$，有约束时的最小化的一阶条件是：

$$\mathcal{L}_1=tw_1-\lambda f_1=0 \tag{8-53a}$$

$$\mathcal{L}_2=tw_2-\lambda f_2=0 \tag{8-53b}$$

$$\mathcal{L}_\lambda=y-f(x_1,x_2)=0 \tag{8-53c}$$

从(8-53a)式和(8-53b)式中消去拉格朗日乘子，可得：

$$\frac{tw_1}{tw_2}=\frac{w_1}{w_2}=\frac{f_1}{f_2}$$

所以，对要素价格(tw_1,tw_2)，存在着和要素价格(w_1,w_2)一样的相切条件。对于t的任意取值，切线的斜率都必须等于w_1/w_2。同时，产出仍然保持在水平y。因此，对于要素价格(tw_1,tw_2)和(w_1,w_2)，成本最小化问题(用x_i来表示)存在相同的解。所以，在要素价格(w_1,w_2)被(tw_1,tw_2)替换之后，解不变，仍是$x_i=x_i^*(w_1,w_2,y)$。因此，$x_i^*(w_1,w_2,y)\equiv x_i^*(tw_1,tw_2,y)$，即要素需求曲线(产出保持不变)对要素价格是0次齐次的。对于含有n

种要素的情形，这一结论也完全成立：$x_i^*(w_1,\cdots,w_n,y)\equiv x_i^*(tw_1,\cdots,tw_n,y),i=1,\cdots,n$。

但是，如果要素价格扩大某一倍数，显然一定有某个量发生了改变。发生变化的量是总成本，因此，边际成本和平均成本也发生了变化。如果要素价格加倍，投入组合不变，但购买该投入组合的名义成本显然会加倍。总成本 $C\equiv C^*(w_1,w_2,y)$对要素价格是 1 次齐次的。总成本 $C^*(w_1,w_2,y)\equiv w_1x_1^*+w_2x_2^*$ 是 x_i^* 的线性函数。如果要素价格扩大到 t 倍，x_i^* 不变，则：

$$\begin{aligned}C^*(tw_1,tw_2,y)&\equiv tw_1x_1^*(tw_1,tw_2,y)+tw_2x_2^*(tw_1,tw_2,y)\\&\equiv tw_1x_1^*(w_1,w_2,y)+tw_2x_2^*(w_1,w_2,y)\\&\equiv t[w_1x_1^*(w_1,w_2,y)+w_2x_2^*(w_1,w_2,y)]\\&\equiv tC^*(w_1,w_2,y)\end{aligned}$$

同样，这一结论对 n 种要素的情况也完全成立。成本函数对要素价格是 1 次齐次的。

由于总成本函数与要素价格增加或减少相同的倍数，因此，边际成本和平均成本也受到类似的影响。由于：

$$AC\equiv\frac{C^*(w_1,w_2,y)}{y}$$

$$\begin{aligned}AC(tw_1,tw_2,y)&\equiv C^*(tw_1,tw_2,y)\frac{1}{y}\\&\equiv tC^*(w_1,w_2,y)\frac{1}{y}\\&\equiv tAC(w_1,w_2,y)\end{aligned}\tag{8-54}$$

类似，$MC\equiv\lambda^*(w_1,w_2,y)$，根据一阶函数有：

$$\lambda^*(tw_1,tw_2,y)\equiv\frac{tw_i}{f_i(x_1^*,x_2^*)}\quad i=1,2$$

要素价格扩大 t 倍时，要素投入 x_i^* 不变。因此，上式中只有分子按照简单的线性关系发生了变化，下式成立：

$$\lambda^*(tw_1,tw_2,y)\equiv\lambda^*(w_1,w_2,y)\tag{8-55}$$

即边际成本函数对要素价格是 1 次齐次的。

需要注意的是，上面所讨论的齐次结果与生产函数自身的任何齐次性是完全无关的。上述结果对于任何一个追求成本最小化的企业都是可以推导出来的，任何地方都没有使用或隐含有关成本函数齐次性的假设。因此，对于有成本最小化的切点解的任何成本函数，这些结果都成立。

欧拉关系式。因为要素需求曲线 $x_i=x_i^*(w_1,w_2,y)$对 w_1,w_2 是 0 次齐次的，根据欧拉定理：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_1}w_1+\frac{\partial x_i^*}{\partial w_2}w_2\equiv 0\cdot x_i^*\equiv 0\quad i=1,2\tag{8-56}$$

上式可以用弹性简单地进行表示。(8-56)式两边同除以 x_i^*，得到：

$$\frac{w_1}{x_i^*}\frac{\partial x_i^*}{\partial w_1}+\frac{w_2}{x_i^*}\frac{\partial x_i^*}{\partial w_2}\equiv 0 \quad i=1,2$$

利用(8-51)式中给出的弹性和交叉弹性的定义，上式即为：

$$\varepsilon_{i1}+\varepsilon_{i2}\equiv 0 \quad i=1,2 \tag{8-57}$$

一般地，对于 n 个要素的情形，要素需求 $x_i^*(w_1,\cdots,w_n,y)$ 对 $w_1,\cdots,w_n$ 是 0 次齐次的。同理，可得：

$$\varepsilon_{i1}+\varepsilon_{i2}+\cdots+\varepsilon_{in}\equiv 0 \quad i=1,\cdots,n$$

即：

$$\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\equiv 0 \quad i=1,\cdots,n \tag{8-58}$$

对于任何一种要素而言，在产出不变时，该要素的需求自弹性和它对其他所有要素价格的交叉弹性之和恒等于 0。

有关交叉弹性的另一个关系式可以利用交互关系 $\partial x_i^*/\partial w_j=\partial x_j^*/\partial w_i$ 进行推导。该交互关系可以转化成弹性的形式，如下所示。两边同乘以 1(为避免标号混乱，下式中省略了星号)：

$$\frac{x_i}{x_i}\frac{w_j}{w_j}\frac{\partial x_i}{\partial w_j}\equiv\frac{x_j}{x_j}\frac{w_i}{w_i}\frac{\partial x_j}{\partial w_i}$$

重新排列各项，可以得到：

$$\frac{x_i}{w_j}\left(\frac{w_j}{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial w_j}\right)\equiv\frac{x_j}{w_i}\left(\frac{w_i}{x_j}\frac{\partial x_j}{\partial w_i}\right)$$

即：

$$(w_ix_i)\varepsilon_{ij}\equiv(w_jx_j)\varepsilon_{ji}$$

两边同除以总成本 $C=\sum w_ix_i$：

$$k_j\varepsilon_{ij}\equiv k_j\varepsilon_{ji} \quad i,j=1,\cdots,n \tag{8-59}$$

其中，$k_i=w_ix_i/C$ 表示要素 x_i 占总成本的份额。

顺便提一句，切记什么量是保持不变的。这些弹性和份额指的是约束最小化，即产出不变时的要素曲线。对于追求(无约束)利润最大化的企业而言，可以推导出略为不同的关系式。

用弹性表达的交互关系式(8-59)式代入到(8-58)式中，就得到交叉弹性新的相互关系。将(8-59)式代入(8-58)式：

$$\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{k_i}\varepsilon_{ji}\equiv 0$$

乘以 k_i，得到：

$$\sum_{j=1}^{n}k_j\varepsilon_{ji}\equiv k_1\varepsilon_{1i}+k_2\varepsilon_{2i}+\cdots+k_n\varepsilon_{ni}=0 \quad i=1,\cdots,n \tag{8-60}$$

(8-58)式和(8-60)式的区别在于，(8-60)式的最后一项考虑的弹性是各种要素和某一种要素

价格之间的弹性，而在(8-58)式中，弹性都是某一要素 x_i 对所有要素价格的弹性。在前面一种情形中，不含有份额，是直接从欧拉方程推导出来的关系式；而后面一种情形是关于所有要素与某一给定的价格变化之间有什么关系，分摊到那些要素的成本份额就起作用了。

(8-60)式也可以用另一种思路进行推导。假设生产函数约束为 $f(x_1^*, x_2^*) \equiv y$，对某一要素价格 w_i 求导：

$$f_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial w_i} + f_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial w_i} \equiv 0$$

根据一阶关系式 $w_j = \lambda f_j$，上式等价于：

$$w_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial w_i} + w_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial w_i} \equiv 0 \tag{8-61}$$

注意，(8-61)式中的各项指的是各种要素对同一种要素价格 w_i 的变化。类似对(8-59)式的推导，从(8-61)式可以推出(8-60)式。

产出弹性

产出弹性也是互相联系的，将产出约束 $f(x_1^*, x_2^*) \equiv y$ 对 y 求导即可看出：

$$f_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial y} + f_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial y} \equiv 1$$

在利用一阶关系式 $w_j = \lambda^* f_j$ 可得：

$$\frac{w_1}{\lambda^*} \frac{\partial x_1^*}{\partial y} + \frac{w_2}{\lambda^*} \frac{\partial x_2^*}{\partial y} \equiv 1$$

要将上式中的各项转化为弹性，只需将第一项乘以 $(y/y)(x_1^*/x_1^*)$，即乘以 1。第二项也进行类似的处理，用 x_2^* 替换 x_1^*，得到：

$$\frac{w_1 x_1^*}{\lambda^* y}\left(\frac{y}{x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial y}\right) + \frac{w_2 x_2^*}{\lambda^* y}\left(\frac{y}{x_2^*}\frac{\partial x_2^*}{\partial y}\right) \equiv 1$$

即：

$$k_1' \varepsilon_{1y} + k_2' \varepsilon_{2y} \equiv 1 \tag{8-62}$$

其中，“权重”k_i' 等于各要素的总成本除以边际成本与产出的乘积。这一结果可以很容易地推广到 n 种要素的情形：

$$\sum k_i' \varepsilon_{iy} \equiv 1 \tag{8-63}$$

其中，$k_i' = w_i x_i / \lambda^* y$。

注意，这些权重 k_i' 自身相加不等于 1，因此(8-63)式也不能称为是对产出弹性的加权平均。实际上，$\sum k_i' = (\sum w_i x_i)/\lambda^* y = (1/\lambda^*)(C^*/y) = AC/MC$。一种特例是，当边际成本 λ 等于平均成本时，权重相加确实等于 1。如果一个企业运营在平均成本曲线的最

低点，即边际成本曲线与平均成本曲线的交点处时，就是这种情况。因此，我们可以认为，一个企业在长期竞争均衡的情况下，所有要素的产出弹性的加权平均之和等于 1，其中，权重是花费在某一种要素上的总成本的份额。

8.10 平均成本曲线

下面将讨论平均成本曲线（AC），一个企业使用两种不同的要素 x_1，x_2，要素价格分别是 w_1，w_2。根据定义：

$$AC=\frac{C^*(w_1,w_2,y)}{y}=\frac{1}{y}(w_1x_1^*+w_2x_2^*) \tag{8-64}$$

如果一种要素的价格 w_1 发生变化，平均成本将如何变化呢？要素价格上升，平均成本会上升吗？在这种情形下，可以证明直觉是正确的——要素成本增加时，只有总的平均成本增加。如果情况相反，企业可以支付更高的薪资，从而得到更大的利润。这种情况并不常见。

我们可以证明 AC 和 w_1 之间正向变化的关系，如下所示。(8 64)式对 w_1 求导可得：

$$\frac{\partial AC}{\partial w_1}=\frac{1}{y}\left(x_1^*+w_1\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}+w_2\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\right)$$

注意，对 $w_1x_1^*$ 项使用了乘法法则。利用一阶关系式 $w_j=\lambda^* f_j$，可得：

$$\frac{\partial AC}{\partial w_1}=\frac{x_1^*}{y}+\frac{\lambda^*}{y}\left(f_1\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}+f_2\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\right)$$

但约束恒等式 $f(x_1^*,x_2^*)\equiv y$ 对 w_1 求导（参见(8-26c)式）得到：$f_1(\partial x_1^*/\partial w_1)+f_2(\partial x_2^*/\partial w_1)\equiv 0$。因此，括号内的表达式可以消去，余下的式子为：

$$\frac{\partial AC}{\partial w_1}=\frac{x_1^*}{y}>0$$

推广到一般的情形，对使用任意数量的要素的企业，同理可得：

$$\frac{\partial AC}{\partial w_i}=\frac{x_i^*}{y}\quad i=1,\cdots,n \tag{8-65}$$

余下的项只有正的要素投入和产出（惟一相关的东西），平均成本一定与要素价格的变化方向相同。

直接根据 AC 的定义，可以很直观地得到(8-65)式。平均成本是 w_1 的线性函数：$AC=(x_1^*/y)w_1+(x_2^*/y)w_2$。如果 w_1 变化为 $w_1+\Delta w_1$，从边际上来说，AC 的变化只是 w_1 的一个倍数（x_1^*/y），即 $(x_1^*/y)\Delta w_1$。对于有限的变动，(x_1^*/y) 和 (x_2^*/y) 也发生变化，但从边际上来说，AC 的瞬时变化率只是 (x_1^*/y)（在 x_1^* 可以变化之前）。

实际上，这是包络定理的另一个简单应用。由于 $AC=C^*/y$：

$$\frac{\partial AC}{\partial w_1}=\frac{1}{y}\frac{\partial C^*}{\partial w_1}$$

但根据包络线定理，回顾拉格朗日函数 $\mathcal{L}=w_1x_1+w_2x_2+\lambda(y-f(x_1,x_2))$：

$$\frac{\partial C^*}{\partial w_1}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_1}=x_1^*$$

因此，可知：

$$\frac{\partial AC}{\partial w_1}=\frac{x_1^*}{y}$$

8.11　企业的长期竞争均衡分析

将前面的分析进行调整，可以扩大到用来分析经济中一个常见的情形：一个竞争行业由许许多多相同的企业组成，考虑其中的一个企业，它是价格的接受者。同样假定进入该行业非常容易，即进入成本非常低。该行业中，企业的行为如何呢？即对于要素价格的变化，或者可能出现的其他变量的变化，这些企业会如何反应呢？（参见第 6 章习题 8）

如果行业可以盈利，新企业会立即进入，在这种情况下，对所有企业而言，产出价格一定会立即下降到平均成本的最小值。对于某一变量的变化，企业采取任何行动时，都会考虑到产出价格都有可能瞬时调整到平均成本的最小值。在这种情况下，利润最大化将等价于各个企业都将其平均成本最小化，因为在其他任何一点，企业将无法生存。

下面将讨论一种要素价格的变化会如何影响平均成本最小点的位置。平均成本的最小点位于：

$$MC(w_1,w_2,y)=AC(w_1,w_2,y) \tag{8-66}$$

问题在于，当一种要素的价格发生变化时，产出水平 y 与最小平均成本的变化是如何联系起来的？我们认为，y 与要素价格 w_1,w_2 是函数相关的。这一函数关系从何而来呢？(8-66)式给出了 y,w_1,w_2 的隐函数。假设隐函数定理的充分条件存在，从(8-66)式可以求解出一个变量用其他两个变量的表达式，即：

$$y=y^*(w_1,w_2) \tag{8-67}$$

利用隐微分法可以求出 $\partial y^*/\partial w_i$。将(8-67)式代回到(8-66)式，可以得到下面的恒等式：

$$MC(w_1,w_2,y^*(w_1,w_2))\equiv AC(w_1,w_2,y^*(w_1,w_2)) \tag{8-68}$$

这一表达式是恒等式，因为对于 w_1 或 w_2 的任何变化，假定 y 总是按照(8-67)式进行调整，以使企业的平均成本最低。将这一恒等式对 w_1 求导：

$$\frac{\partial MC}{\partial w_1}+\frac{\partial MC}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial w_1}\equiv\frac{\partial AC}{\partial w_1}+\frac{\partial AC}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial w_1}$$

在平均成本取最小值时，根据最小化的一阶条件可知，$\partial AC/\partial y=0$。从上式求解 $\partial y^*/\partial w_1$ 可得：

$$\frac{\partial y^*}{\partial w_1}=\frac{1}{\partial MC/\partial y}\left[\frac{\partial AC}{\partial w_1}-\frac{\partial MC}{\partial w_1}\right] \tag{8-69}$$

对$\partial y^*/\partial w_2$，存在类似的表达式。

(8-69)式有很简单的含义。该式说明，w_1 增加时，如果 AC 曲线向上移动的距离超过了边际成本曲线移动的距离，平均成本曲线的最小值点将向右移动(即平均成本取最小值时的产出水平将增加)。(注意，在平均成本取最小值时，$\partial MC/\partial y>0$。)这从几何图形上可以很容易就看出来，参见图 8-14。边际成本曲线通常都从下面与平均成本曲线相交，两条曲线交于边际成本的最小值点。如果 w_1 增加，从(8-65)式可知，平均成本曲线向上移动一段距离。如果边际成本曲线移动的距离小于平均成本曲线移动的距离，平均成本的最小值点显然将向右移动。当然，如果边际成本实际上随 w_1 的增加面向下移动(这意味着 x_1 是一种劣等品)，那么，新的边际成本曲线与新的平均成本曲线(它是向上移动的)的交点必定位于原来的平均成本最小值点的右方，即产出水平更高。

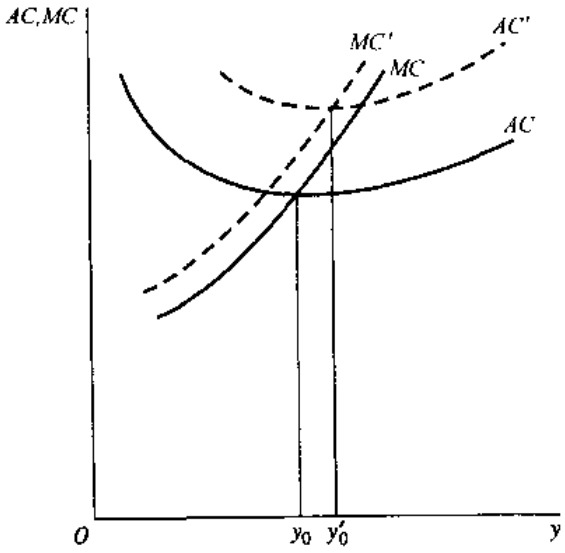

图 8-14 要素价格变化时，MC 和 AC 曲线的移动。

(8-69)式可以用来解释产出水平的变化与要素需求的产出弹性之间的直接关系。从(8-65)式可知：

$$\frac{\partial AC}{\partial w_1}=\frac{x_1^*}{y}$$

从(8-34)式可知：

$$\frac{\partial MC}{\partial w_1}=\frac{\partial x_1^*}{\partial y}$$

将上面两式代入(8-69)式可得：

$$\frac{\partial y^*}{\partial w_1}=\frac{1}{\partial MC/\partial y}\left[\frac{x_1^*}{y}-\frac{\partial x_1^*}{\partial y}\right]$$

上式提出 x_1^*/y，得到：

$$\frac{\partial y^*}{\partial w_1}=\frac{x_1^*/y}{\partial MC/\partial y}[1-\varepsilon_{1y}] \tag{8-70}$$

其中，$\varepsilon_{iy}=(y/x_i)(\partial x_i/\partial y)$是要素 i 的产出弹性(根据(8-52)式的定义)。

要素价格的变化对企业在长期竞争均衡下的产出效应，可以通过(8-69)式和(8-70)式中得到。如果一种要素价格(如 w_1)增加，那么，如果要素 1 是产出有弹性的(即 $\varepsilon_{1y}>1$)，则所有的企业的产出将减少。平均成本的最小值(以及产品价格)增加，但是边际成本曲线将向上移动更大的距离。因此，销售的总产出更少，因为产品需求曲线是向下倾斜的。如果要

素 1 是产出无弹性的(但不是劣等品)(即 $0 \leqslant \varepsilon_{1,} < 1$),边际成本曲线向上移动的距离小于平均成本曲线,根据(8-70)式,$\partial y^* / \partial w_1 > 0$。最后,如果要素 1 是劣等品($\varepsilon_{1,} < 0$),那么,当 w_1 增加时,边际成本曲线将向下移动,平均成本曲线向上移动,则$\partial y^* / \partial w_1 > 0$。

长期的要素需求分析

利润最大化和新企业进入或企业退出,其综合效应导致企业在采取平均成本最小化的策略时存在延迟。因此,接下来我们将讨论公司的长期行为,直接考虑下面模型的比较静态含义:

最小化

$$AC = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2}{f(x_1, x_2)} \tag{8-71}$$

找出该模型所隐含的要素需求函数 $x_i^L(w_1, w_2), i = 1, 2$。产出价格 p 是内生变量,因此,要素需求只是要素价格的函数。平均成本函数 $AC^*(w_1, w_2)$是该模型的间接目标函数。可以利用传统的比较静态分析方法对该模型进行分析(参见第 6 章习题 8。这里,我们利用对偶理论进行分析)。参见图 8-15,将 AC 用 w_1 来表示。对于 w_1 和 w_2 的既定取值,如 w_1^0 和 w_2^0,隐含了一定量的要素投入:$x_1^0 = x_1^L(w_1, w_2)$,$x_2^0 = x_2^L(w_1, w_2)$。因此,$y^0 = f(x_1^0, x_2^0)$。x_1,x_2,w_2 取这些值不变,有约束的平均成本函数 $AC = (w_1 x_1^0 + w_2^0 x_2^0)/y^0$ 是一条直线,斜率为正,等于 x_1^0 / y^0。一般来说,根据最小值的定义,平均成本的最小值点一定位于这条直线的下方。但是,当 $w_1 = w_1^0$ 时,恰巧使用了合适的(即平均成本取最小值)x_1 和 x_2。因此,在该点处,$AC^* = AC$,且在 w_1^0 的两侧,$AC^* \leqslant AC$。从几何图形上显然可以看出 AC^* 对 w_1 是凹的。(AC^* 对所有的要素价格都是凹的,其数学证明留做练习,可以利用第 7 章的初等对偶理论进行证明。)因此,可以得到下面的"包络线"结论:

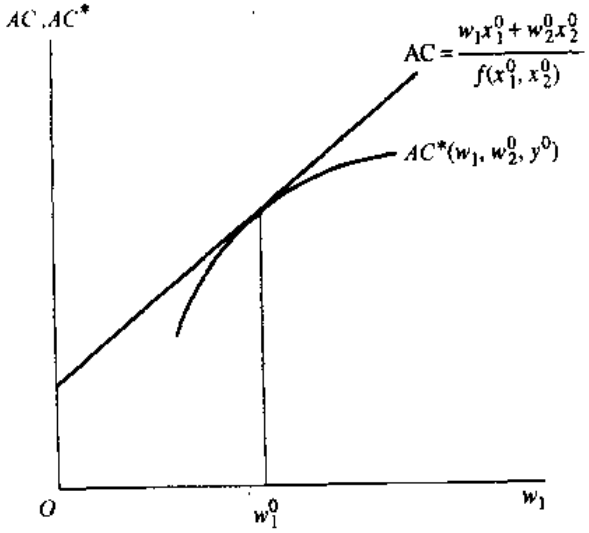

图 8-15　长期平均成本函数的凹性。有约束的平均函数(其中,除了 w_1 之外的其他变量都不变)是 w_1 的线性函数,斜率为 x_1^0 / y^0。在 w_1^0 点,使用了"恰当数量的"的 x_1 和 x_2;在 w_1 与 w_1^0 处,使用量不等于平均成本最小化时的使用量。因此,在 w_1^0 点,$AC^* = AC$,而在 w_1^0 点的两侧,$AC^* < AC$。由于 AC 是 w_1 的线性函数,AC^* 对 w_1 一定是凹的。由对称性可知,AC^* 对 w_2 一定也是凹的。因此,$AC^*_{w_1} = x_1^* / y^*$,$AC^*_{w_1 w_1} = \partial(x_1^* / y^*)/\partial w_1 \leqslant 0$。

$$AC^*_{w_1} = \frac{x_1^L}{y^L} \tag{8-72}$$

$$AC^*_{w_1 w_1} = \frac{\partial (x_1^L / y^L)}{\partial w_1} \leqslant 0 \tag{8-73}$$

在这个模型中，要素需求 x_i^L 不是间接目标函数的一阶偏导。因此，可证伪的比较静态关系不能用于推出这些要素需求。但要素投入和产出之间的比率（"相对"投入）是这样的一阶偏导。因此，从间接目标函数的凹性可以推出这些相对投入函数可证伪的含义，如(8-73)式所示。利用商数法则，可得：

$$\frac{w_1}{x_1^L}\frac{\partial x_1^L}{\partial w_1} \leqslant \frac{w_1}{y^L}\frac{\partial y^L}{\partial w_1} \tag{8-74}$$

如果要素 1 的价格上升，使用要素 1 的百分比变动一定小于企业长期产出的百分比变动。但产出效应不一定是反向的。因此，企业的长期竞争并不意味着长期要素需求的斜率为负。

利用传统的需求分析方法来分析短期和长期的要素需求之间的关系，我们可以得到这些变量之间更进一步的关系。从短期来看，产品价格是一个变量，用符号 p 来表示。从长期来看，一个行业中企业的进出导致价格下降到边际企业平均成本取最小值处。所有的企业除了规模可能不同之外，其他情况都相同，即所有企业平均成本的最小值都相同，竞争将导致价格下降到平均成本的最小值处。产品价格将不再是变量，而是由等式 $p = \min AC^*(w_1, w_2)$ 来决定。因此，要素 1 的短期需求和长期需求的基本恒等式如下所示：

$$x_1^L(w_1, w_2) \equiv x_1^f(w_1, w_2, p^*(w_1, w_2)) \tag{8-75}$$

其中，$p^*(w_1, w_2)$ 即是 AC^*。上式对 w_1 求导，可得：

$$\frac{\partial x_1^L}{\partial w_1} \equiv \frac{\partial x_1^f}{\partial w_1} + \frac{\partial x_1^f}{\partial p}\frac{\partial p^*}{\partial w_1} \tag{8-76}$$

利用包络定理可知，$\partial p^* / \partial w_1 = x_1 / y$；而且，对于标准的（短期）利润最大化模型，可知 $\partial x_1^f / \partial p = (\partial x_1^y / \partial y)(\partial y^* / \partial p)$。因此，(8-76)式可以改写为：

$$\frac{\partial x_1^L}{\partial w_1} \equiv \frac{\partial x_1^f}{\partial w_1} + \frac{x_1}{y}\frac{\partial x_1^y}{\partial y}\frac{\partial y^*}{\partial p} \tag{8-77}$$

已知，$\partial x_1^f / \partial w_1 < 0$，$\partial y^* / \partial p > 0$。假设 x_1 和 y 都取正值，因此，如果 x_1 是一个常量，即 $\partial x_1^y / \partial y > 0$，$\partial x_1^L / \partial w_1$ 取负的程度一定小于 $\partial x_1^f / \partial w_1$。此外，(8-77)式等号右边第二项的绝对值可能比第一项要大。此时，长期曲线的斜率将取正值。

不要误解了这一结论——这是综合效应的结果。比如说 w_1 增加，从短期来看，企业使用的 x_1 将减少，但 w_1 的这一增加将导致平均成本的最小值和产品价格的上升。据此，企业将扩大生产。在要素价格上涨之后，如果企业的规模变得足够大，这一"扩张"效应将超过短期效应（减少 x_1 的使用量）。但这只是对单一企业做出反应的描述。由于产品价格的上升，再假定行业需求曲线向下倾斜，则市场需要的总产出减少。因此，从行业的角度来看，根据需求法则，x 的使用量将减少，但这也可能是因为越来越少的多数企业在要素价格上涨之前就使用了较多的这种要素。（严格地说，w_1 和 p 的增加确实导致了企业的进入，但新进入

企业的规模都比前一个进入的企业的规模小。）

习题

1. 请解释成本函数并非仅仅是技术资料。成本为什么依赖于企业的目标以及企业运营必须遵守的定律体系？
2. 假定等产量线凸向原点，这是经验之谈，还是因为有约束的成本最小化问题有内点解的二阶必要条件？
3. 本章推导出来的要素需求曲线（如从成本最小化推导出来）和前面章节中从利润最大化模型中推导出来的要素需求曲线之间有什么差别？两者之间有什么明显的不同（大体上来说）？
4. 讨论互补要素的下列定义之间的关系：

   (a) $f_{ij}>0$

   (b) $(\partial x_i/\partial w_i)_{w_j,p}<0$

   (c) $(\partial x_i/\partial w_j)_{w_i,y}<0$

其中，$f(x_1,x_2)$是竞争企业的生产函数，括号外的参数表示保持不变的参数。

5. 考虑一家追求利润最大化的企业，使用两种要素。该模型可视为有约束的最大化问题：

最大化

$$py-w_1x_1-w_2x_2$$

使得：

$$y=f(x_1,x_2)$$

构造拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=py-w_1x_1-w_2x_2+\lambda[f(x_1,x_2)-y]$$

(a) 证明，如果认为利润最大化可以通过两步达到：第一步，y 不变，y 的函数对 x_1,x_2 取最大值，然后，对变量 y 取最大值，则该模型可以表述为：

$$\mathcal{L}=\max_{y}\left(py-\min_{x_1,x_2}\{(w_1x_1+w_2x_2)+\lambda[y-f(x_1,x_2)]\}\right)$$

(b) 证明利润最大化意味着在产出取最大值时的成本最小化。

(c) 将 y,x_1,x_2 看做约束条件的自变量，推导该模型的比较静态关系。注意与原来的无约束情形相比，交互条件$\partial y^*/\partial w_i=-\partial x_i/\partial p$ 和供给斜率$\partial y^*/\partial p>0$ 更容易推导出来。

6. 对于生产函数 $y=x_1^{a_1}x_2^{a_2}$，证明产出不变时的要素需求函数具有如下形式：

$$x_i^*=k_iw_i^{-a_i/(a_1+a_2)}w_j^{a_i/(a_1+a_2)}y^{1/(a_1+a_2)}$$

证明成本函数具有如下形式：

$$C^*=(k_1+k_2)w_1^{a_1/(a_1+a_2)}w_2^{a_2/(a_1+a_2)}y^{1/(a_1+a_2)}$$

且$\partial C^*/\partial w_i=x_i^*$。

7. 假设生产函数 $y=f(L,K)$是线性齐次的。

   (a) 证明：

$$f_{LL}L+f_{LK}K\equiv 0$$

$$f_{KL}L+f_{KK}K\equiv 0$$

(b) 证明：

$$f_{KL}L^2=f_{KK}K^2$$

(c) 如果将规模报酬递减定律应用到两种要素中，试证明要素是技术互补的，即如果一种要素的使用量增大，另一种要素的边际产出将增加。

(d) 如果边际产出为正，则等产量线是向下倾斜的。试加以证明。

(e) 证明：

$$H=-\lambda\begin{vmatrix} f_{LL} & f_{LK} & f_L \\ f_{KL} & f_{KK} & f_K \\ f_L & f_K & 0 \end{vmatrix}$$

其中，H 同(8-14)式中的定义，λ 是边际成本。

(f) 证明：如果 $f(L,K)$是一次齐次的，则 $H=\lambda(y^2/K^2)f_{LL}=\lambda(y^2/L^2)f_{KK}$。并证明：如果等产量线凸向原点，则生产过程中没有"阶段Ⅰ"和"阶段Ⅲ"。

8. 对交叉效应$\partial x_i^*/\partial w_j$ 和$\partial x_i^S/\partial w_j(i\neq j)$，推导出类似(8-44)式的表达式。证明：如果$x_i$，$x_j$同是 x_n 的替代品或同是 x_n 的互补品，则$\partial x_i^*/\partial w_j\leqslant\partial x_i^S/\partial w_j$。

9. 对于利润最大化和成本最小化时的交叉效应$\partial x_i^*/\partial w_j$ 和$\partial x_i^S/\partial w_j(i\neq j)$之间的关系，推导出一个类似(8-49)式的表达式。如果 x_i，x_j 是常量，哪一个交叉效应更大？这些短期交叉效应和长期交叉效应的符号不同吗？

部分参考文献

Alchian, A. A.: "Costs and Outputs," in M. Abramovits (ed.), The Allocation of Economic Resources, Stanford University Press, Stanford, CA, 1959.

Allen, R. G. D.: Mathematical Economics, Macmillan & Co., Ltd., London, 1956.

Coase, R. H.: "The Nature of the Firm," Economica, (N. S.), 4:331-351, 1937. Reprinted in American Economic Association, Readings in Price Theory, Richard D. Irwin, Chicago, 1952.

Fuss, M., and D. McFadden.: Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications, North Holland, Amsterdam, 1978.

Hicks, J. R.: Value and Capital, 2d ed., Clarendon Press, Oxford, 1946.

Samuelson, P. A.: Foundations of Economic Analysis, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947.

Shephard, Tonald W.: Cost and Production Functions, Princeton University Press, Princeton NJ, 1953; also the revised version of this book which has become a classic, The Theory of Cost and Production Functions, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

第 9 章　成本函数和生产函数：专题

9.1　齐次生产函数和同势生产函数[1]

一类有趣且重要的生产函数是同势生产函数，齐次生产函数是其中的一个子集。如果所有要素同时增大(或缩小)相同的比例，产出增大(或缩小)这一比例的 r 次幂，则生产函数是 r 次齐次的。正式的表述为，如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 r 次齐次的，则：

$$f(tx_1,\cdots,tx_n)\equiv t^r f(x_1,\cdots,x_n)$$

前面的章节已经讨论了齐次生产函数一般意义上的若干性质，尤其是欧拉定理，这些性质也得到了很广泛的应用。此外，同势的性质：

$$\frac{f_i(tx_1,\cdots,tx_n)}{f_j(tx_1,\cdots,tx_n)}\equiv\frac{f_i(x_1,\cdots,x_n)}{f_j(x_1,\cdots,x_n)}$$

即给定一条从原点出发的射线，沿着该射线上的各点，水平曲线的斜率相等。利用一阶偏导 f_i 和 f_j 的 $r-1$ 次齐次性，可以证明这条性质。

但齐次函数并非是具有这条几何性质的惟一函数。下面讨论齐次生产函数 $z=f(x_1,\cdots,x_n)$ 的单调转置 $F(z)$，即讨论 $y=H(x_1,\cdots,x_n)=F(f(x_1,\cdots,x_n))$，其中 $F'(z)>0$。条件 $F'(z)>0$ 保证了 z 和 y 沿着同一个方向运动，例如，z 增加时，y 必定也增加。x_ix_j 平面上的水平曲线 $H(x_1,\cdots,x_n)=y$ 的斜率是：

$$\frac{H_i}{H_j}=\frac{F'(z)f_i}{F'(z)f_j}=\frac{f_i}{f_j}$$

但我们已经知道，在射线的展开式中，f_i/f_j 是不变的。因此，函数 $H(x_1,\cdots,x_n)=F(f(x_1,\cdots,x_n))$ 也具有这一性质。

在函数集 $y=H(x_1,\cdots,x_n)=F(f(x_1,\cdots,x_n))$ 中，$F'\neq 0$，且 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是齐次函数，该函数集称为同势函数。事实上，不失一般性的，可将 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 限制为线性齐次函数，即函数是一次齐次的。原因在于，如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 r 次齐次的，则 $[f(x_1,\cdots,x_n)]^{1/r}$ 是一次齐次的：

$$[f(tx_1,\cdots,tx_n)]^{1/r}\equiv[t^r f(x_1,\cdots,x_n)]^{1/r}\equiv t[f(x_1,\cdots,x_n)]^{1/r}$$

f 的 r 次根可以并入单调变换 $y=F(z)$，即 $F(z)$ 自身可以视为一个复合函数，其第一部分是 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的 r 次根，第二部分是变换产生的 $H(x_1,\cdots,x_n)$。因此，可以将同势函数集

1　希望读者能够阅读第 3 章中有关齐次性的章节。

定义为 $H(x_1,\cdots,x_n)=F(f(x_1,\cdots,x_n))$的所有函数，其中 $f(x_1,\cdots,x_n)$是一次齐次的，且 $F'\neq 0$。

在原点的射线扩张或缩并下，水平曲线的斜率不变，即 $x_1,\cdots,x_n$ 可以用 $tx_1,\cdots,tx_n$ 来代替，这一论述可以用另一种方式来表达，任一点处的水平曲线（或水平面）的斜率都是 H_i/H_j。这恰好是 x_i 的另一个函数，即定义为：

$$\frac{H_i}{H_j}=h_{ij}(x_1,\cdots,x_n)$$

函数 $h_{ij}(x_1,\cdots,x_n)$表示 x_ix_j 平面上的水平曲线 H 的斜率（取负值）。在 $x_1,\cdots,x_n\to tx_1,\cdots,tx_n$ 时，斜率不变。但这只说明了 $h_{ij}(x_1,\cdots,x_n)$是 0 次齐次的，即 $h_{ij}(tx_1,\cdots,tx_n)\equiv h_{ij}(x_1,\cdots,x_n)$。同势也可以用这种方式进行定义，事实上，这可以用更高级的理论进行证明，即对所有的 x_ix_j 平面而言，如果 $h_{ij}(x_1,\cdots,x_n)$都是 0 次齐次的，那么 $H(x_1,\cdots,x_n)$一定可以如下表述：$H(x_1,\cdots,x_n)=F(f(x_1,\cdots,x_n))$，其中，$f(x_1,\cdots,x_n)$是一次齐次的，且 $F'\neq 0$。

例 考虑生产函数 $y=H(x_1,x_2)=x_1x_2+x_1^2x_2^2$。很容易证明，该函数不是齐次的。但它是同势的，因为 $H(x_1,x_2)\equiv z+z^2$，其中 $z=x_1x_2$。即 $H(x_1,x_2)=F(f(x_1,x_2))$，其中，$F(z)\equiv z+z^2$。注意，$F'(z)=1+2z\neq 0$，因为假定生产函数不是齐次的。水平曲线 $H(x_1,x_2)$的斜率是：

$$-\frac{H_1}{H_2}=-\frac{x_2+2x_1x_2^2}{x_1+2x_1^2x_2}$$

$$=-\frac{x_2(1+2x_1x_2)}{x_1(1+2x_1x_2)}=-\frac{x_2}{x_1}$$

注意，$F'(z)=1+2z$ 同时出现在分子和分母中。因此，$H_1/H_2=h_{12}(x_1,x_2)=x_2/x_1$。显然，函数 h_{12}是 0 次齐次的：$h_{12}(tx_1,tx_2)\equiv tx_2/tx_1\equiv x_2/x_1\equiv h_{12}(x_1,x_2)$。因此，水平曲线 $x_1x_2+x_1^2x_2^2$ 在从原点出发的任一给定射线上的所有点上的斜率都相同。

表达同势性的另一种方式是，在给定的任一点，所有要素的产出弹性都相等。即 $\varepsilon_{1y}=\varepsilon_{2y}=\cdots=\varepsilon_{ny}$。从直线扩张路径的几何图形显然可知，参见图 9-1。任何一个增量，如产出从 y 增大到 y'，都会出现新切点 B 和原来的切点 A，它们位于通过原点的直线上。三角形 OAx_1^0 和 $OA(tx_1^0)$相似。因此，x_1 的增量是 $OB/OA\equiv t$。但显然，同理可知 x_2 的增量也是 $OB/OA\equiv t$。因此，对同势生产函数而言，所有要素的产出弹性都相等。

这一结论可以用几何图形来表示，注意，直线扩张路径表示比率 x_j/x_i，只要要素价格保持不变，在 x_ix_j 平面上且通过该点的射线的斜率在任一产出水平上都相等。即：

$$\frac{\partial(x_j^*/x_i^*)}{\partial y}\equiv 0$$

利用商数法则，并乘以 x_i^* 得到：

$$x_i^*\frac{\partial x_j^*}{\partial y}-x_j^*\frac{\partial x_i^*}{\partial y}\equiv 0$$

上式两边都乘以 y，并除以 $x_i^*x_j^*$，可得：

$$\frac{y}{x_j^*}\frac{\partial x_j^*}{\partial y}\equiv\frac{y}{x_i^*}\frac{\partial x_i^*}{\partial y}$$

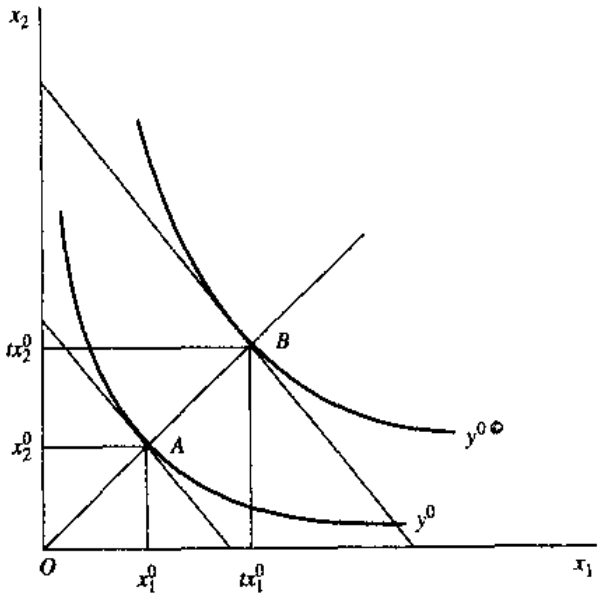

图 9-1　同势生产函数。同势生产函数的水平曲线是所有彼此的射线扩张，即在从原点出发的任一射线与水平曲线的交点处，斜率都相等。也就是说，如果产出自发地增加，即要素价格保持不变，则新的切点将位于从原点出发且经过原切点射线上。根据相似三角形显然可知，y 增加时，x_1 和 x_2 都增加相同的倍数 t。

即：

$$\epsilon_{jy} \equiv \epsilon_{iy} \quad i,j=1,\cdots,n \tag{9-1}$$

这一共同的弹性值可以应用(8-63)式求得。由于 $\epsilon_{jy} \equiv \epsilon_{iy} = \epsilon_y$，如这一常量可以从总和中消去，得到：

$$\epsilon_y \sum k_i' = 1$$

由于：

$$\sum k_i' = \frac{\sum w_i x_i}{(MC)y} = \frac{AC}{MC}$$

因此：

$$\epsilon_y = \frac{MC}{AC} \tag{9-2}$$

对于同势函数，产出弹性的共同值是边际成本对平均成本的比率。因此，对于平均成本增加的企业而言，所有要素都是产出有弹性的。即对所有的要素都存在 $\epsilon_y = \epsilon_{iy} > 1$。对于平均成本下降的企业而言，要素都是产出无弹性的。同样，如果生产函数同势，企业处在平均成本曲线的最低点，则所有要素的产出弹性都等于 1。

9.2　成本函数：其他的性质

我们已经指出，$C^*(w_1, w_2, y)$ 是 w_1, w_2 的一次齐次函数，或者更一般的说，对于使用 n

种要素的企业，$C^*(w_1,\cdots,w_n,y)$ 是 $w_1,\cdots,w_n$ 的一次齐次函数。同样，由于 $C^*=\sum w_i x_i^*(w_1,\cdots,w_n,y)$，且 $x_i^*(w_1,\cdots,w_n,y)$ 是 $w_1,\cdots,w_n$ 的 0 次齐次函数，则：

$$\begin{aligned}C^*(tw_1,\cdots,tw_n,y) &\equiv \sum tw_i x_i^*(tw_1,\cdots,tw_n,y)\\ &\equiv t\sum w_i x_i^*(w_1,\cdots,w_n,y)\\ &\equiv tC^*(w_1,\cdots,w_n,y)\end{aligned}$$

再假设生产函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的某次（$r>0$）齐次函数。在这种情形下，我们可以证明成本函数可以划分为：

$$C^*(w_1,\cdots,w_n,y)\equiv y^{1/r}A(w_1,\cdots,w_n,y) \tag{9-3}$$

注意，其中 $A(w_1,\cdots,w_n,y)$ 只是要素价格的函数。如果 $r=1$，即 $f(w_1,\cdots,w_n,y)$ 规模报酬不变，这种情况下：

$$C^*(w_1,\cdots,w_n,y)\equiv yAC(w_1,\cdots,w_n,y) \tag{9-4}$$

其中，$A(w_1,\cdots,w_n,y)$ 变成了平均成本函数。但是平均成本 $AC(w_1,\cdots,w_n,y)$ 只是要素价格（即产出的自变量）的函数。必然是这样。如果企业的规模报酬不变，则 $AC=MC=$ 常量，即在任一产出水平下，它们只是要素价格的函数。

对于可微函数的情形，我们将证明其中的某些结论。简化起见，我们讨论只有两个变量（即只有两个要素）的情形。同理可以推广到 n 个要素的情形，留做学生练习。记住，y 一般是成本最小化模型中的变量。

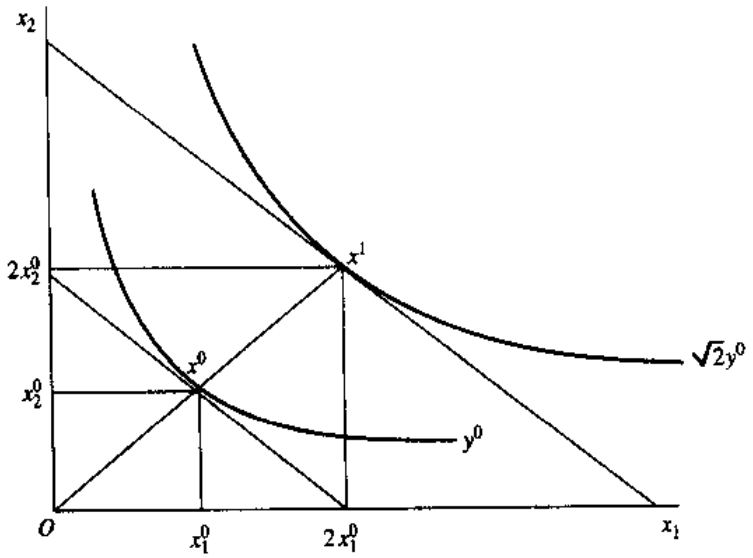

图 9-2 1/2 次齐次生产函数。如果要素使用量 x_1^0, x_2^0 加倍，产出的增加量等于 $2^{1/2}=\sqrt{2}$。但由于 $C=w_1x_1+w_2x_2$，因此成本加倍，即 $C(x^0)=\frac{1}{2}C(x^1)$。这意味着 y 增加 $\sqrt{2}$ 倍时，成本加倍，即成本和产出的关系是 $C=Ay^2$。系数只有在不含有产出 y 的情形下，才是常量。系数是要素价格的函数，即 $A=A(w_1,w_2)$。

直觉上，(9-3)式似乎正确。参见图 9-2。假设开始时企业位于点 x^0，要素使用量为 $x^0=(x_1^0, x_2^0)$，成本为 $C(x^0)$。假设目前两种要素使用量都加倍，变为 $(2x_1^0, 2x_2^0)=x^1$。那么，由于生产函数同势(确切地说，是齐次)，成本最小化的新切点 x^1 将位于从原点出发经过原切点 x^0 的射线上，在要素使用量加倍的坐标点。在 x^1 点，成本 $C(x^1)$ 显然是 $C(x^0)$ 的两倍，因为要素使用量加倍，而要素价格不变。所以，$C(x^1)=2C(x^0)$。但 x^0 点的产出 y^0 只增加到 $2^{1/2}y^0=\sqrt{2y^0}$，因为生产函数是 1/2 次齐次的。这意味着要素价格不变时，成本和产出的关系式是 $C=Ay^2$，因为 y 增加$\sqrt{2}$倍时，成本加倍。事实上，比例常量 A 一定依赖于要素价格，即 $A=A(w_1, w_2)$。如果等成本线的斜率不同，比例常量也不同；但成本和产出之间仍然存在一般的关系(9-3)式。

下面的推导过程不能应用在一般的非齐次函数。(但可以用于更复杂的情形，我们将推广到一般的同势函数。)如果生产函数是非齐次的，所有要素的使用量都增加一个简单的比例时，产出将不按照既定的量增加。相反，一种要素对另一种要素的比例将发生变化。这样，成本函数必然比(9-3)式复杂，要素价格和产出将混合在一起，而不是分开为两个部分，一部分与产出有关，另一部分与要素价格有关。

要证明(9-3)式，就要利用下面的关系式，该关系式在第一次解释 λ(有约束的成本最小化问题的拉格朗日乘子)是边际成本的时候已经讨论过。由于 $C^*=w_1x_1^*+w_2x_2^*$，则根据 $w_1=\lambda^* f_1$ 及 $w_2=\lambda^* f_2$ 可知：

$$C^* \equiv \lambda^* (f_1 x_1^* + f_2 x_2^*)$$

但对于齐次函数，存在 $f_1x_1+f_2x_2 \equiv ry$，其中 r 是齐次的次数。所以，对于齐次函数有：

$$C^* \equiv \lambda^* ry \tag{9-5a}$$

即：

$$\frac{C^*}{y} \equiv r\frac{\partial C^*}{\partial y} \tag{9-5b}$$

现在，问题在于，一般来说，什么样的函数形式 $C^*(w_1, w_2, y)$ 具有满足(9-5a)式(该式表明平均成本 C^*/y 与边际成本成比例，比例因子为常量 r)的性质？要解决这个问题，可以对(9-5b)式求偏导：

$$\frac{\partial C^*}{C^*} \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial y} \tag{9-6}$$

使用的求导符号是 ∂C^*，而不是 dC^*，这提醒我们在这个求导中，w_1，w_2 都保持不变。对(9-6)式两边积分，得到：

$$\int \frac{\partial C^*}{C^*} \equiv \frac{1}{r}\left(\int \frac{\partial y}{\partial y}\right) + K(w_1, w_2) \tag{9-7}$$

在所有的积分过程中，存在一个任意的常量。但由于这是对 y 的偏微分方程，常数项可以包括任一函数，其自变量(在这里是指要素价格)在初始微分中不变。实际上，偏微分方程的理论保证了在变量(在偏微分中保持不变)的积分常项中含有任一函数，这可以求解出偏微分方程的通解。

求解(9-7)式中的积分项,得到:

$$\log C^* = \frac{1}{r}\log y + \log A(w_1, w_2) \tag{9-8}$$

这里,我们将常数项 $K(w_1, w_2)$ 写成了 $\log A(w_1, w_2)$。这对通性并没有影响,因为任何一个实数都是某一正数的对数。但是这样写,我们就可以改写(9-8)式:

$$\log C^* \equiv \log(y^{1/r} A(w_1, w_2)) \tag{9-9}$$

这是因为乘积的对数是各自对数的和,且 $\log a^b \equiv b\log a$。由于(9-8)式和(9-9)式中的对数相等(事实上是恒等),它们的逆对数也相等,即:

$$C^* \equiv y^{1/r} A(w_1, w_2) \tag{9-10}$$

下面将证明上式。

(9-10)式是偏微分方程(9-5b)的解,这可以通过替代看出来:

$$\lambda^* = \frac{\partial C^*}{\partial y} = \frac{1}{r} y^{[(1/r)-1]} A(w_1, w_2)$$

将上式代入(9-5a)式的右边,可知:

$$\frac{1}{r} y^{[(1/r)-1]} A r y \quad 或 \quad y^{1/r} A$$

这等于左边 C^*。根据定义,将 $C^* = y^{1/r} A(w_1, w_2)$ 代入等式 $C^* = \lambda^* r y$,这样,等式就变成了恒等式,因此,$C^* = y^{1/r} A(w_1, w_2)$ 是(9-5)式的解,而且是最一般的解,因为任一函数 $A(w_1, w_2)$ 是积分的常数项。显然,积分常量必须是正的,否则正的产出将与虚数(包括 $\sqrt{-1}$)成本联系在一起。

总结:我们讨论了如果成本函数是 $r(r>0)$ 次齐次的,则成本、产出和要素价格的关系是三项的乘积 $C^* = y^{1/r} A(w_1, w_2)$。换句话说,对齐次生产函数而言,平均成本通常与边际成本成比例,比例因子是齐次的次数 r,即 $C^*/y \equiv r\partial C^*/\partial y$。

(9-5)式或(9-10)式都表明了齐次的次数和边际成本及平均成本函数的斜率之间的关系。根据(9-10)式可知:

$$MC = \frac{\partial C^*}{\partial y} = \frac{1}{r} y^{[(1/r)-1]} A(w_1, w_2)$$

因此:

$$\frac{\partial MC}{\partial y} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - 1\right) y^{[(1/r)-2]} A(w_1, w_2)$$

讨论:如果 $r<1$,则 $\partial MC/\partial y>0$,即如果齐次生产函数是规模报酬递减的,边际成本通常都是递增的(这并不奇怪)。类似,如果 $r>1$,则 $\partial MC/\partial y<0$,即如果齐次生产函数是规模报酬递增的,边际成本通常都是递减的。如果 $r=1$,即规模报酬不变,则边际成本是一个常量,在任一产出水平下都等于 $A(w_1, w_2)$。

此外,根据(9-5b)式可知,如果 $r>1$,则 $AC>MC$。由于边际成本通常低于平均成本,平均成本通常一定是递减的,同理,对于 $r<1$ 和 $r=1$ 的情况也成立。(9-5a)式对 y 求偏导,可得:

$$\frac{\partial C^*}{\partial y}\equiv\lambda^*\equiv r\left(\lambda^*+y\frac{\partial\lambda^*}{\partial y}\right)$$

从上式中求解$\partial\lambda^*/\partial y$，即$\partial MC/\partial y$，得到：

$$\frac{\partial MC}{\partial y}\equiv\frac{1}{ry}MC(1-r) \tag{9-11}$$

从中可以直接看出前面的结论。

同势函数

下面将讨论与同势生产函数 $y=F(f(x_1,x_2))$（其中，$f(x_1,x_2)$是一次齐次的，$F'(z)>0$，其中 $z=f(x_1,x_2)$）的通集相关的成本函数的函数形式。类似前面的讨论方法，我们可以得到：

$$\begin{aligned}C^*&\equiv w_1x_1^*+w_2x_2^*\\&\equiv\lambda^*(F'(z)f_1)x_1^*+\lambda^*(F'(z)f_2)x_2^*\\&\equiv\lambda^*F'(z)(f_1x_1^*+f_2x_2^*)\end{aligned}$$

或利用欧拉定理可得：

$$C^*\equiv\lambda^*F'(z)z \tag{9-12}$$

现在，y 是 z 的单调转置，即 $F'(z)>0$。这意味着如果在图中将 z 画成 y 的函数，曲线通常是向上倾斜的。在这些条件下，z 只有惟一的一个值与 y 的任意值相对应，即函数 $y=f(z)$ 是 $z=F^{-1}(y)$的逆函数。这种情形类似于将需求函数表示为 $p=p(x)$（将价格表示为产量的函数），而不是 $x=x(p)$（将产量表示为价格的函数）。这样，我们就可以写出：

$$C^*\equiv\lambda^*F'(F^{-1}(y))[F^{-1}(y)]$$

或者，将含有 y 的各个函数合并，可得：

$$C^*\equiv\lambda^*G(y) \tag{9-13}$$

即对同势函数而言，成本函数可以表示为边际成本乘以某一函数 $G(y)$（变量只有 y）的形式。如果同势函数实际上为 r 次齐次的，则从(9-5a)可知 $G(y)=ry$，形式非常简单。类似前面的讨论，现在的问题是，一般来说，什么样的函数形式 $C^*(w_1,w_2,y)$满足偏微分方程(9-13)？即(9-13)式对 $C^*(w_1,w_2,y)$的形式有怎样的要求？

类似前面的分析，要解决这个问题，可以对微分方程(9-13)进行积分。将含有 y 的项分离出来，注意 $\lambda^*=\partial C^*/\partial y$，我们可以得到：

$$\frac{\partial C^*}{C^*}\equiv\frac{\partial y}{G(y)} \tag{9-14}$$

要特别注意(9-14)式的右侧只是 y 的函数。我们可以假设 $1/G(y)$存在某个积分函数，其形式为 $\log J(y)$。同样，也一定存在任一个积分常量，而且在齐次的情形下，这一常量实际上并不是一个常数，而是其余变量 w_1,w_2 的任意函数，在成本函数对 y 求偏导时，这些其余的

变量可以视为常量。可以将该常量方程写成 $\log A(w_1, w_2)$。这样，对(9-14)式积分，可得：

$$\int \frac{\partial C^*}{C^*} \equiv \int \frac{\partial y}{G(y)} + \log A(w_1, w_2)$$

从中可以推出：

$$\log C^* \equiv \log J(y) + \log A(w_1, w_2)$$

利用对数法则，取逆对数，可得：

$$C^* \equiv J(y) \log A(w_1, w_2) \tag{9-15}$$

(9-15)式表明，对于同势函数而言，成本函数可以写成两个函数的乘积：一个是产出 y 的函数，另一个只是要素价格的函数。这样，$C^*(w_1, w_2, y)$ 可以分离为 y 和要素价格两部分。

C^* 可以写成这种形式完全是合理的。回忆一下，同势函数就是线性齐次函数的单调函数。这好像是将线性齐次成本函数的等产量线经过了技术上的转置，重新表述为 $F(z)$。但这只是对产出价值的转化，等产量线自身的形状并没有发生变化。由于线性齐次生产函数的成本函数可以写成 $C^* = yA(w_1, w_2)$，我们只处理 y，就可以得到同势函数，成本函数进行的惟一变化就是用 y 的某一个更复杂的函数替代 y，在(9-15)式中使用的是 $J(y)$。

(9-15)式是(9-13)式的解，可以如下启发式地进行证明。将 $C^* = J(y)A(w_1, w_2)$ 代入(9-13)式，右边一定恒等于 C^*。从中可得 $\lambda^* = J'(y)A(w_1, w_2)$，因此：

$$C^* = J'(y)A(w_1, w_2) \times y \text{ 的某一函数}$$

且(9-15)式是必需的形式。

9.3 成本函数和生产函数的对偶性

下面，我们扼要地重新分析生产函数和成本函数。分析的起点是假定生产函数拟凹，即其等产量线凸向原点。我们认为，对于任一既定的产量水平，企业通常都会使要素总成本最小化，因为这是与财富(或利润)最大化相吻合的惟一假设。对于要素需求关系 $x_i = x_i^*(w_1, w_2, y)$ 和拉格朗日乘子 $\lambda = \lambda^*(w_1, w_2, y)$(即边际成本)，基本上就可以求解出有约束的最小化问题的一阶条件。进一步推导出比较静态关系式，得出对前述需求关系的某些偏导的符号约束，即 $\partial x_i^* / \partial w_i < 0$。

将这些需求关系代回到总成本的表达式 $C = w_1 x_1 + w_2 x_2$ 中，得到总成本函数：

$$C^*(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^* + w_2 x_2^*$$

由包络线定理可知：$\partial C^* / \partial w_i = x_i^*$，$\partial C^* / \partial y = \lambda^*$。同样，从生产函数的假设中还可以推导出成本函数的齐次性和函数形式的某些性质。

现在，又有了一个新的问题。我们已经了解了从生产函数如何可能推导出成本函数。从成本函数可能推导出生产函数吗？如果可能，又怎样推导呢？即已知成本函数，它具有对生产函数进行常规分析所必需的性质。利用该成本函数可能推导出某个惟一的生产函数

(从它可以求出该成本函数)吗？通常，答案都是肯定的。事实上，生产函数和成本函数之间有对偶关系：其中的任一个函数存在，如果是性质比较好的函数，则另一个也惟一存在。接下来，我们将讨论这些问题。

构造成本函数的关键一步是，将一阶关系式 $w_i-\lambda f_i=0, y-f(x_1,x_2)=0$ 的解进行转化，从而求出需求关系式 $x_i=x_i^*(w_1,w_2,y)$。根据约束最小化的二阶充分条件，可以假设这些解是惟一的，反过来也可以假设一阶等式的雅可比矩阵(即拉格朗日函数 L 的混合偏导)的行列式非零。这些二阶充分条件也意味着 $\partial x_i^*/\partial w_i<0, i=1,2$。但 $x_i^*=\partial C^*/\partial w_i$。因此：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_i}=\frac{\partial^2 C^*}{\partial w_i^2}<0 \tag{9-16}$$

即成本函数有如下性质：对要素价格的二阶偏导为负。正如前面章节中所讨论的，对任一性质好的生产函数，其成本函数对要素价格是弱凹性的。因此，对于两要素的情形，$C^*(w_1, w_2, y)$ 是 w_1, w_2 的线性齐次函数。所以，正如前面用另一种方式所讨论的，由于 $x_i^*(w_1, w_2, y)$ 是 C^* 对一种要素价格的一阶偏导，所以 x_i^* 是 w_1, w_2 的 0 次齐次函数。因此，根据欧拉定理，可知：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}w_1+\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2}w_2\equiv 0$$

同理，可知：

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}w_1+\frac{\partial x_{21}^*}{\partial w_2}w_2\equiv 0$$

从两式中消去 w_1, w_2(注意 $\partial x_i^*/\partial w_2=\partial x_2/\partial w_1^*=C_{12}^*, C_{ii}^*=\partial x_i^*/\partial w_i$)，可知：

$$C_{11}^* C_{22}^*-C_{12}^{*2}=0 \tag{9-17}$$

C^* 对要素价格的混合偏导的行列式等于 0。实际上，C^* 对 w_1, w_2 不是严格凹的，因为 C^* 是 w_1, w_2 的线性齐次函数。即 w_1, w_2 的连线可以得到 C^* 的线性扩张线。利用第 7 章的方法，可以很容易地将该结论推广到 n 个要素的情形。

下面将讨论从成本函数推导生产函数的问题。推导之前，我们要首先检验已知的 $C^*(w_1, w_2, y)$ 对 w_1, w_2 实际上是否是“弱”凹的，且是 w_1, w_2 的线性齐次函数。假设这些条件都满足，则它所隐含的要素需求函数是：

$$x_1^*(w_1, w_2, y)=\frac{\partial C^*}{\partial w_1}$$

$$x_2^*(w_1, w_2, y)=\frac{\partial C^*}{\partial w_2}$$

由于 x_1^* 和 x_2^* 是 w_1, w_2 的 0 次齐次函数，因此要素需求函数可以写成：

$$\begin{aligned} x_1^*(w_1, w_2, y)&\equiv x_1^*\left(1, \frac{w_2}{w_1}, y\right)\equiv g_1(w, y) \\ x_2^*(w_1, w_2, y)&\equiv x_2^*\left(1, \frac{w_2}{w_1}, y\right)\equiv g_2(w, y) \end{aligned} \tag{9-18}$$

其中，$w=w_2/w_1$。但(9-18)式用四个变量 x_1, x_2, w, y 表示出两个方程。这些方程的雅可比行列式非零，即：

$$J=\begin{vmatrix} g_{1w} & g_{1y} \\ g_{2w} & g_{2y} \end{vmatrix} \neq 0$$

利用这一数学条件，从这些方程中可以消去变量 w。这样，就只剩下一个方程，含有三个变量 x_1, x_2, y，如方程：

$$h(x_1, x_2, y)=0$$

从这个方程中求解出 $y=f(x_1, x_2)$，得到生产函数。

上面的雅可比行列式非零的假设条件有多严格呢？从根本上来说，偏导 g_{1w}, g_{2w} 是要素需求函数(对 g_{1w}，是负的斜率)对相对价格变化的斜率。特别是，使用链式法则可以得到：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}=\frac{\partial x_1^*}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial w_1}=\frac{\partial g_1}{\partial w}\left(-\frac{w_2}{w_1^2}\right)<0$$

且 $g_{1w}=-(w_1^2/w_2)(\partial x_1^*/\partial w_1)>0$。同理，可知：

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_2}=\frac{\partial x_2^*}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial w_2}=g_{2w}\frac{1}{w_1}$$

且：

$$g_{2w}=w_1\frac{\partial x_2^*}{\partial w_2^*}<0$$

如果两个要素是正常品，就像同势生产函数的情况那样，则 $g_{1y}, g_{2y}>0$，且 J 的符号形如：

$$\begin{vmatrix} + & + \\ - & + \end{vmatrix}>0$$

这意味着 $J>0$，因此有 $J\neq 0$。在非同势的情形下，如果 $J=0$，是一种纯粹的巧合。因此，我们可以认为 $J\neq 0$。所以，一般情况下，对于任一性质很好的成本函数，我们都可以找到惟一的一个生产函数。但这并不是说从成本函数就可以很容易地求出生产函数，或者很容易地就可以从生产函数求出成本函数。一般来说，用于求解的方程(在推导成本函数时指一阶关系式，或者在推导生产方程时指(9-18)式)都是复杂的非线性方程。但我们可以确信函数原则上是存在且惟一的。

例 我们在前面已经求出了科布—道格拉斯生产函数所对应的成本函数，它同样是分开的几项的乘积。下面我们看一下如何应用相反的过程来处理(9-18)式。假设 C^* 已知，或者已经用计量经济学的方法估计出来了，如下所示：

$$C^*=y^k w_1^a w_2^{1-a} \tag{9-19}$$

其中，$0<a<1$(为了保证 $C_1^*=x_1^*>0, C_2^*=xC_2^*>0, C_{11}^*, C_{22}^*<0$)，且 w_1, w_2 的指数相加等于 1(为了保证 C^* 是 w_1, w_2 的 1 次齐次函数)。参数 k 可以是任意的正数。从什么样的生产函数可以求出这一成本函数？

由包络线定理(谢泼德引理)可知 $\partial C^*/\partial w_i=x_i^*$。因此：

$$x_1^*=y^k a w_1^{a-1} w_2^{1-a}=a y^k\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1-a}$$

同理，可知：

$$x_2^* = y^k(1-\alpha)w_1^{\alpha}w_2^{-\alpha} = (1-\alpha)y^k\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{-\alpha}$$

令 $w=w_2/w_1$，我们可以消去这一变量。这里，星号是多余的，会造成符号混乱。如果在等式两边取对数，式子就变得非常简单了，则：

$$\log x_1 = \log\alpha + k\log y + (1-\alpha)\log w$$

$$\log x_2 = \log(1-\alpha) + k\log y - \alpha\log w$$

在第一式的两边同乘以 α，第二式的两边同乘以 $(1-\alpha)$，然后两式相加：

$$\alpha\log x_1 + (1-\alpha)\log x_2 = \alpha\log\alpha + (1-\alpha)\log(1-\alpha) + k\log y$$

即：

$$\log x_1^{\alpha}x_2^{(1-\alpha)} = \log\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}y^k$$

做逆对数运算并稍微变动，可以得到：

$$y = Kx_1^{\alpha/k}x_2^{(1-\alpha)/k} \tag{9-20}$$

其中，$K=[1/\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}]^{1/k}$。(9-20)式就是与成本函数(9-19)式相对应的生产函数。正如我们所猜测的，该生产函数是科布—道格拉斯生产函数，或分开的几项的乘积，而且是 $1/k$ 次齐次的，因为 C^* 是 y 的 k 次齐次函数。

对偶的重要性

成本函数和生产函数的对偶性非常重要，远超过数学的精确和简明。经济学家可以据此估计出要素需求和成本函数，解决这一问题基本上有两种办法。一种方法是，用某种方法先估计出基本的生产函数，然后在利用一阶关系式计算出要素需求曲线(产出保持不变)，然后再计算出成本函数。但是这一过程非常困难。生产函数大多不可观测，数据表示随着要素或产品价格的变化，在不同时点的投入和产出水平的样本点。而且生产函数自身又有什么用呢？在很大程度上，生产函数是用来推导各个变量(如要素价格和产品价格)的变化对要素使用量和成本的影响。

这样，直接估计成本函数或要素需求曲线，即先假定成本函数具有某一种函数形式，如对数线性函数，然后直接估计成本函数，这样做或许更有意义。但这样做也常常遭到批评，因为这样估计出来的成本函数或要素需求函数毫无依据，即这些函数是从假想的或不存在的生产过程推导出来的。这个批评的确一针见血。

但前面讨论的对偶性保证了这一简单方法的可行性。我们可以确信如果一个成本函数满足某些基本性质，即对要素价格的线性齐次性和凹性，则确实存在某一个惟一的生产函数与之相对应。因此，成本函数更加可靠。

此外，从计量经济学的角度来看，成本函数比生产函数更容易估计。成本函数是要素价格和产出水平的函数，这些量都可观测，也更容易观测。而且，一旦成本函数估计出来了，就

可以直接利用关系式 $x_i^* = \partial C^* / \partial w_i$ 来推导恒定产出下的要素需求曲线。因此，估计成本函数的这一更简单的方法比估计生产函数的复杂方法更有用。对偶性保证了这一方法在理论上更加完整合理。

9.4 替代弹性：不变替代弹性生产函数

新古典主义生产理论提出了一种生产要素对另一种生产要素的替代率。这种论断相当于等产量线上并非只有一个点。但对于一种要素对另一种要素的实际替代程度，我们还没有讨论任何定量的测量方法。

考虑一种生产函数，其等产量线为 L 形，如图 9-3 所示。这种函数用代数式可以表述为 $y=\min[(x_1/a_1),(x_2/a_2)]$，其中，$a_1$，$a_2$ 是常量。这种方程描述了一种要素不可能进行有效替代的生产过程。在某一工资率水平下，追求成本最小化的企业通常会选择在拐角。各要素的边际产出都等于 0，除非这种要素同别的要素按照某一比例组合使用。（因为这个原因，这种生产函数称为固定系数的生产函数之一。）

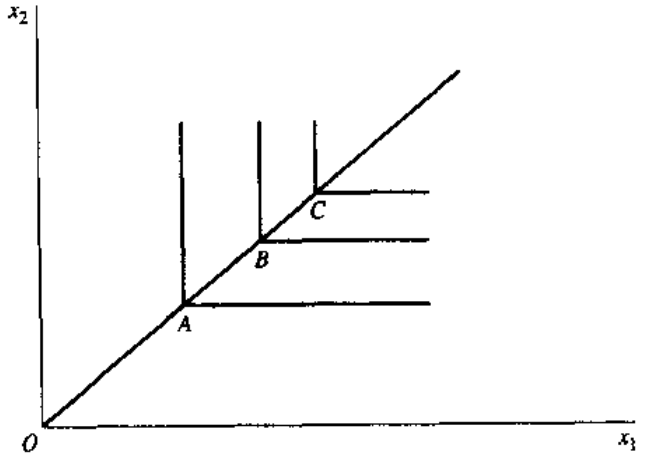

图 9-3 固定系数的生产函数。这类生产函数形如 $y=\min[(x_1/a_1),(x_2/a_2)]$，其中，$a_1$，$a_2$ 是参数。各要素之间不存在替代关系。除了生产函数的拐角，在任意一点，x_1 或 x_2 的边际产出都等于 0。尽管这类生产函数广泛应用于投入产出分析和短期预测模型中，但它是否是考察现实世界的一种有效方式，仍存在疑虑。

我们如何描述一种要素对另一种要素的替代程度呢？考虑科布－道格拉斯生产函数 $y=x_1^a x_2^{1-a}$，其中，x_1 表示劳动，x_2 表示资本。企业追求成本最小化，满足拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=w_1x_1+w_2x_2+\lambda(y-(x_1^a x_2^{1-a}))$$

的一阶条件：

$$w_1-\lambda a x_1^{a-1}x_2^{1-a}=0 \tag{9-21a}$$

$$w_2-\lambda(1-a)x_1^a x_2^{-a}=0 \tag{9-21b}$$

$$y-x_1^a x_2^{1-a}=0 \tag{9-21c}$$

(9-21a)式与(9-21b)式相除，可得：

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{(1-\alpha)w_1}{\alpha w_2} \tag{9-22}$$

上式可以从前面推导出来的恒定产出下的要素需求曲线中进行推导：

$$x_1^*=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\sigma}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1-\sigma}y \tag{9-23a}$$

$$x_2^*=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\sigma}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{-\sigma}y \tag{9-23b}$$

(9-22)式表明，对于科布—道格拉斯生产函数，资本劳动的比率：(1)与产出水平无关；(2)只是工资率的比率(资本的租金除以劳动的工资率)的函数。稍后，我们将推广到一般的情况。

因此，我们认为资本劳动比率是关于工资率比率的简单函数。为了符号表述的方便，可以令 $u=x_2/x_1$，$w=w_2/w_1$，(9-22)式就变成了：

$$u=\frac{k}{w} \tag{9-24}$$

其中，$k=(1-\alpha)/\alpha$。但当 w_2/w_1 发生变化时，x_2/x_1 如何变化呢？从(9-24)式可知：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}=-\frac{k}{w^2} \tag{9-25}$$

正如我们预料的，表达式为负。资本劳动比率的这一变化率可以衡量替代程度，但另一种更常使用的衡量是使用无维弹性的比例：

$$\sigma=-\frac{\mathrm{d}u/u}{\mathrm{d}w/w}=-\frac{w}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w} \tag{9-26}$$

要素价格每变化百分之一时投入比率的变化率。加上负号是为了保证度量值为正。这种度量 σ 称为替代弹性。将(9-26)式应用到科布—道格拉斯生产函数的例子中，可以得到：

$$\sigma=\frac{w}{u}\frac{k}{w^2}=\frac{w^2}{k}\frac{k}{w^2}=1$$

因此，在任一条等产量线的整个范围内，科布—道格拉斯生产函数的替代弹性是常量，且等于 1。

科布—道格拉斯生产函数 $y=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ 是一类特殊的生产函数，在任一条等产量线上，其替代弹性不变。下面，我们将讨论这类重要的不变替代弹性生产函数，推导其函数形式和其他一些性质。这类函数在生产过程的实际工作中有着广泛的应用。

替代弹性的概念与成本最小化没有关系，这个概念很容易描述成边际替代率每变化百分之一时投入比率的百分比变化，因为追求利润最大化的企业通常都处于 $w_1/w_2=f_1/f_2=MRS$ 的状态。我们可以将这一表述写成：

$$\sigma=-\frac{f_1/f_2}{x_1/x_2}\frac{\mathrm{d}(x_1/x_2)}{\mathrm{d}(f_1/f_2)} \tag{9-27}$$

(注意，我们这里用相反的比率 x_1/x_2 代替了 x_2/x_1 等，稍后我们将看到这样处理并无大碍。)下面我们将求解这一表达式。沿着任意一条等产量线 $x_2=x_2(x_1)$ 有：$x_2/x_1=-f_1/$

f_2，利用链式法则可以将(9-27)式写成：

$$\sigma=-\frac{f_1x_2}{f_2x_1}\frac{\mathrm{d}(x_1/x_2)/\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}(f_1/f_2)/\mathrm{d}x_1}$$

计算上式第二部分中的各项，可知：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(x_1/x_2)}{\mathrm{d}x_1}&=\left(x_2-x_1\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)\frac{1}{x_2^2}\\&=\left(x_2+x_1\frac{f_1}{f_2}\right)\frac{1}{x_2^2}\\&=\frac{1}{f_2x_2^2}(f_1x_1+f_2x_2)\end{aligned}$$

同理，$\mathrm{d}(f_1/f_2)/\mathrm{d}x_1$ 即等于 $-\mathrm{d}^2x_2/\mathrm{d}x_1^2$，因为 $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1=-f_1/f_2$。从第 3 章可知：

$$-\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}x_1^2}=\frac{1}{f_2^3}(f_2^2f_{11}-2f_1f_2f_{12}+f_1^2f_{22})$$

合并这些表达式，可得：

$$\sigma=-\frac{f_1x_2}{f_2x_1}\frac{f_2^3}{f_2x_2^2}\frac{f_1x_1+f_2x_2}{(f_2^2f_{11}-2f_1f_2f_{12}+f_1^2f_{22})}$$

即：

$$\sigma=-\frac{f_1f_2(f_1x_1+f_2x_2)}{x_1x_2(f_2^2f_{11}-2f_1f_2f_{12}+f_1^2f_{22})}\tag{9-28}$$

σ 的这一表达式非常烦琐，但在重要的线性齐次生产函数的特殊情形下，这一表达式就变得非常简单。首先，根据欧拉定理，分子立即变成了 f_1f_2y。对于分母，由于 $f(x_1,x_2)$ 是一次齐次的，所以 f_1,f_2 是 0 次齐次的。因此，将欧拉定理应用到 f_1,f_2 中，可以得到：

$$f_{11}x_1+f_{12}x_2\equiv0\quad\text{或}\quad f_{11}=-f_{12}\frac{x_2}{x_1}$$

同理可得：

$$f_{22}=-f_{12}\frac{x_1}{x_2}$$

将这些表达式代入可得：

$$\begin{aligned}x_1x_2(f_2^2f_{11}-2f_1f_2f_{12}+f_1^2f_{22})&=-x_1x_2f_{12}\left(f_2^2\frac{x_2}{x_1}+2f_1f_2+f_1^2\frac{x_1}{x_2}\right)\\&=-f_{12}(f_2^2x_2^2+2f_1f_2x_1x_2+f_1^2x_1^2)\\&=-f_{12}(f_1x_1+f_2x_2)^2=-f_{12}y^2\end{aligned}$$

因此，对于线性齐次生产函数有：

$$\sigma=-\frac{f_1f_2y}{-f_{12}y^2}=\frac{f_1f_2}{yf_{12}}\tag{9-29}$$

这对(9-28)式是极大的简化。

关于(9-28)式和(9-29)式比较重要的是，它们关于 x_1,x_2 是对称的。即如果互换下标，

就得到了恒等式。因此，我们可以来讨论 x_1, x_2 之间的替代弹性，而非 x_2 对 x_1 的替代弹性或者 x_1 对 x_2 的替代弹性。根据 σ 中的微分项，x_2/x_1 是否与 f_2/f_1 有关，或者 x_1/x_2 是否与 f_1/f_2 有关，这无关紧要。总之，公式都是一样的。

(9-29)式与一种要素对另一种要素的变化率的表达式有关。回顾关于成本最小化的比较静态表达式(8-28b)式，可知：

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} = -\frac{H_{12}}{H}$$

其中：

$$H = \begin{vmatrix} -\lambda^* f_{11} & -\lambda^* f_{12} & -f_1 \\ -\lambda^* f_{21} & -\lambda^* f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix}$$

因此：

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} = \frac{-f_1 f_2}{\lambda^* (f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2)}$$

对于线性齐次生产函数，上式变成了(同前，为了避免符号混乱，去掉了星号)：

$$\frac{\partial x_1}{\partial w_2} = \frac{f_1 f_2 x_1 x_2}{\lambda y^2 f_{12}}$$

即：

$$\frac{y\lambda}{x_1 x_2}\frac{\partial x_1}{\partial w_2} = \frac{f_1 f_2}{y f_{12}} = \sigma$$

注意，$\lambda = w_2/f_2$，上式可以写成：

$$\frac{y}{f_2 x_2}\frac{w_2}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial w_2} = \sigma$$

令 $k_i = f_i x_i / y$(根据欧拉定理可知：$k_1 + k_2 = 1$)，并用 ϵ_{12} 表示需求的交叉弹性，可知：

$$\epsilon_{12} = k_2 \sigma \tag{9-30}$$

因此，替代弹性和(不变产出的)要素需求的交叉弹性之间的关系可以用上式简单的表示。而且：

$$\sigma = \frac{1}{k_2}\epsilon_{12} = \frac{1}{k_1}\epsilon_{21}$$

毫无疑问，任一点处 σ 的性质对实际工作是非常有用的资料。除了比较静态分析的严格的定性结论，对变量变化的敏感度度量是任一门学科中非常基本的组成部分。因此，定量地估计像 σ 这样的变量，就非常有用。其中，一个非常有用的近似是，假设生产过程是线性齐次的，且各点具有不变的替代弹性。即对于所有的要素组合来说，σ 都相等。这样的生产函数形式如何呢？在前面，我们已经看到科布—道格拉斯函数具有性质：各点处，$\sigma = 1$。σ 的其他取值又如何呢？

回到(9-26)式，$\sigma = -(w/u)(du/dw)$，其中，$u = x_2/x_1$，$w = w_2/w_1$。严格地说，对于一

般的情形，我们应该写成：

$$\sigma=-\frac{w}{u}\frac{\partial u}{\partial w}$$

因为一般来说，$u=x_2/x_1$ 不只是工资比率 w_2/w_1 的函数，它还取决于产出水平 y。但我们首先讨论齐次生产函数的情形。所有生产函数的成本函数可以写成：

$$C^*=J(y)A(w_1,w_2) \tag{9-31}$$

其中，$A(w_1,w_2)$是线性齐次的。（任一成本函数都是要素价格的线性齐次函数。）利用包络线定理（谢泼德引理）可知：

$$x_1=J(y)A(w_1,w_2) \tag{9-32a}$$

$$x_2=J(y)A(w_1,w_2) \tag{9-32b}$$

其中，$A_1=\partial A/\partial w_1$ 等。由于 A_1 和 A_2 是线性齐次函数的一阶偏导，因此，它们是关于 w_1，w_2 的 0 次齐次函数。但可知：

$$A_1(w_1,w_2)=A_1\left(1,\frac{w_2}{w_1}\right)=B_1(w)$$

等等，据此，我们可以得到：

$$x_1=J(y)B_1(w) \tag{9-33a}$$

$$x_2=J(y)B_2(w) \tag{9-33b}$$

（事实上，只有齐次生产函数的要素需求才有这种函数形式。）(9-33b)式除以(9-33a)式可得：

$$u=\frac{x_2}{x_1}=\frac{B_2(w)}{B_1(w)}=B(w)$$

即对于所有的齐次生产函数，要素使用量的比率只是工资率比率的函数，根本不是产出 y 的函数。当然，这也可以从几何图形上很容易观察到，因为齐次生产函数的等产量线只是彼此辐射状的放大而已。因此，对于齐次生产函数，从公式(9-26)可以很容易推出 $\sigma=-(w/u)(\mathrm{d}u/\mathrm{d}w)$，因为 u 确实是性质很好的函数，它只是 w 的函数。

现在，同势的假设条件不变，假设各点的 σ 值相同，替代弹性不变的同势函数集所包括的函数满足下面的微分方程：

$$-\frac{w}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}=\sigma=\text{常数}$$

下面，我们将求解该微分方程。上式可以重新写成：

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\sigma\frac{\mathrm{d}w}{w}$$

上式两边积分，积分常量表示为 $\log c$，可以得到：

$$\log u=-\sigma\log w+\log c=\log cw^{-\sigma}$$

即：

$$u=cw^{-\sigma}=c\left(\frac{1}{w}\right)^{\sigma} \tag{9-34}$$

其中，必然有 $c>0$。因此，所有这样的生产函数必有性质：资本劳动比率与工资比率的某一次幂（它是替代弹性的相反数）成比例。什么样的生产函数满足(9-34)式？对于追求成本最小化的企业，$1/w=w_1/w_2=f_1/f_2=-\partial x_2/\partial x_1$，它是在某一产出水平 y 下的等产量线的斜率。将(9-34)式写成原来的变量的表达式，得到：

$$\frac{x_2}{x_1}=c\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{\sigma}$$

或者，开方可得（$k=c^{1/\sigma}$）：

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1/\sigma}=-k\frac{\partial x_2}{\partial x_1}$$

现在，k 是任一正数。为简单起见，我们可以写成 $k=(1-\alpha)/\alpha$，其中 $0<\alpha<1$。α 从 0 变到 1，k 从 0 变到∞，因此，这样处理不失一般性。分离变量，可得：

$$\alpha\frac{\partial x_1}{x_1^{1/\sigma}}=-\frac{(1-\alpha)\partial x_2}{x_2^{1/\sigma}} \tag{9-35}$$

对上式进行积分时，分为两种情况进行讨论。如果 $\sigma=1$，可以采用对数方法；反之，如果 $\sigma\neq1$，积分只是简单的多项式形式。

情形 1. 令 $\sigma=1$。(9-35)式两边积分，可得：

$$\alpha\int\frac{\partial x_1}{x_1}=-(1-\alpha)\left(\int\frac{\partial x_2}{x_2}\right)+\log g(y)$$

积分常量一般是 y 的函数，因为在计算斜率$\partial x_2/\partial x_1$ 时，y 保持不变。同样，由于(9-35)式实际上是一阶偏微分方程，因此，积分常量可以含有一个变量或若干变量（保持不变）的任一函数。为简便起见，我们将积分常量表示成 $\log g(y)$。进一步计算可得：

$$\alpha\log x_1=-(1-\alpha)\log x_2+\log g(y)$$

或者：

$$g(y)=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$$

到目前为止，我们关于生产函数形式的惟一假设是函数同势。实际上，如果假定 $g(y)$ 单调，我们可以写成：

$$g(y)=F(x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}) \tag{9-36}$$

其中，F 是 g 的逆函数；即如果 $z=g(y)$，则 $y=g^{-1}(z)=F(z)=F(x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha})$。(9-36)式具有所要求的同势形式，是线性齐次函数。如果我们认为 $y=f(x_1,x_2)=F(x_1^{\alpha}x_2^{1\ \alpha})$ 是 s 次齐次函数，则：

$$f(x_1,x_2)=kx_1^{a_1}x_2^{a_2} \tag{9-37}$$

其中，$a_1=\alpha s$，$a_2=(1-\alpha)s$，且 $a_1+a_2=s$。如果 $f(x_1,x_2)$ 是线性齐次函数，且 $\sigma=1$，那么：

$$f(x_1,x_2)=kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} \tag{9-38}$$

(9-36)式到(9-38)式表示不变替代弹性生产函数的一般函数形式，其各点的替代弹性都等于 1（$\sigma=1$），此外，还是同势函数，s 次齐次函数，线性齐次。下面接着讨论 $\sigma\neq1$ 的情形。

情形 2. 如果 $\sigma \neq 1$，对(9-35)式两边积分，可得：

$$\alpha\int \frac{\partial x_1}{x_1^{1/\sigma}} = -(1-\alpha)\int \frac{\partial x_2}{x_2^{1/\sigma}} + g(y)$$

其中，积分常量也是产出 y 的一个函数，设为 $g(y)$，因为在计算等产量线的斜率 $\partial x_2/\partial x_1$ 时，y 保持不变。进一步求解，并将因子 $(-1/\sigma)+1$ 代入 $g(y)$，可得：

$$g(y) = \alpha x_1^{(-1/\sigma)+1} + (1-\alpha)x_2^{(-1/\sigma)+1} \tag{9-39}$$

令 $\rho = 1-(1/\sigma)$，式子可以大大简化。即 $\sigma = 1/(1-\rho)$，则：

$$g(y) = \alpha x_1^{\rho} + (1-\alpha)x_2^{\rho} \tag{9-40}$$

再假设 $g(y)$ 单调，则(9-40)式可以写成：

$$y = F(\alpha x_1^{\rho} + (1-\alpha)x_2^{\rho}) \tag{9-41}$$

(9-41)式是不变替代弹性齐次生产函数的最一般的形式。如果 $y = f(x_1, x_2)$ 是 1 次齐次函数，则：

$$y = k(\alpha x_1^{\rho} + (1-\alpha)x_2^{\rho})^{1/\rho} \tag{9-42}$$

(9-42)式就是我们常见的不变替代弹性生产函数，假设它是线性齐次的。当然，替代弹性在 0 到∞之间变化。当 $\sigma \to 0$ 时，$\rho \to -\infty$；当 $\sigma = 1$ 时，$\rho = 0$；当 $\sigma \to +\infty$ 时，$\rho \to +1$。因此，ρ 的取值范围是 $-\infty < \rho < 1$。当 $\sigma \to 0$($\rho \to -\infty$)时，等产量线变成了 L 形，即生产函数变成了固定比例的生产函数。当 $\sigma \to +\infty$($\rho \to +1$)时，等产量线变成了一条直线，如图(9-42)所示。

我们已经证明了 $\sigma = 1$($\rho = 0$)时，不变替代弹性生产函数将变成科布—道格拉斯形式，但这一结论并不能从(9-42)式中轻易看出。要直接得到这一结论，我们需要一个数学定理，即 LHôpital's 法则。

LHôpital's 法则。 假设 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 也都趋向 0。那么，如果比率 $f'(x)/g'(x)$ 存在，则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{9-43}$$

方程比率(如果存在)的极限等于各自($f(x)$ 和 $g(x)$)微分的比率。

在任一本高等数学教科书中都可以找到该定理的正式证明，这里不再证明。

我们接着讨论不变替代弹性函数(9-42)式，此式两边取对数，可以得到：

$$\log y = \log k + \frac{\log(\alpha x_1^{\rho} + (1-\alpha)x_2^{\rho})}{\rho} \tag{9-44}$$

除了常量，(9-44)式的右边含有两个方程的比率，$\rho \to 0$ 时，这两个方程也趋向于 0。令 $f(\rho)$ = 分子，我们可以找到 $\rho \to 0$ 时的极限，注意如果 $y = a^t$，则 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = a^t \log a$：

$$f'(\rho) = \frac{1}{\alpha x_1^{\rho} + (1-\alpha)x_2^{\rho}}\left[x_1^{\rho}\alpha \log x_1 + x_2^{\rho}(1-\alpha)\log x_2\right]$$

$$\lim_{\rho\to 0} f'(\rho) = \frac{1}{1}\alpha x_1^{\rho} + (1-\alpha)x_2^{\rho}$$

$$= \log x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

(9-44)式的分母非常简单，等于 ρ，因此 $g'(\rho)=1$。因此，$\lim_{\rho\to 0} g'(\rho)=1$。因此，当 $\rho\to 0$ 时：

$$\log y=\log k+\log x_1^{a}x_2^{1-a}$$

即：

$$y=kx_1^{a}x_2^{1-a}$$

正如我们所料，是科布—道格拉斯生产函数。

利用成本最小化的假设，我们可以推导出不变替代弹性生产函数所对应的要素需求函数和成本函数。这一问题可以表述为：

最小化

$$w_1x_1+w_2x_2=C$$

使得：

$$a_1x_1^{\rho}+a_2x_2^{\rho}=y^{\rho}$$

其中：

$$a_1+a_2=1。$$

拉格朗日函数是 $L=w_1x_1+w_2x_2+\lambda(y^{\rho}-(a_1x_1^{\rho}+a_2x_2^{\rho}))$，该式对 x_1，x_2 求导，并从中消去 λ，可以得到(为避免符号混乱，可以省去星号)：

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{a_1x_1^{\rho-1}}{a_2x_2^{\rho-1}}$$

上式两边同乘以(x_1/x_2)，可得：

$$\frac{w_1x_1}{w_2x_2}=\frac{a_1x_1^{\rho}}{a_2x_2^{\rho}}$$

上式两边都加上 1(即将各自的分母加到分子上)：

$$\frac{C}{w_2x_2}=\frac{y^{\rho}}{a_2x_2^{\rho}}$$

从上式中求解 x_2：

$$x_2=C^{1/(1-\rho)}y^{-\rho/(1-\rho)}w_2^{-1/(1-\rho)}a_2^{1/(1-\rho)}$$

同理，可以求出：

$$x_1=C^{1/(1-\rho)}y^{-\rho/(1-\rho)}w_1^{-1/(1-\rho)}a_1^{1/(1-\rho)}$$

因此，可知：

$$w_2x_2=C^{1/(1-\rho)}y^{-\rho/(1-\rho)}w_2^{-\rho/(1-\rho)}a_2^{1/(1-\rho)}$$

和

$$w_1x_1=C^{1/(1-\rho)}y^{-\rho/(1-\rho)}w_1^{-\rho/(1-\rho)}a_1^{1/(1-\rho)}$$

上面两式相加，得到总成本，即：

$$C=C^{1/(1-\rho)}y^{-\rho/(1-\rho)}(a_1^{1/(1-\rho)}w_1^{-\rho/(1-\rho)}+a_2^{1/(1-\rho)}w_2^{-\rho/(1-\rho)})$$

因此，可知：

$$C=y(a_1^{1/(1-\rho)}w_1^{-\rho/(1-\rho)}+a_2^{1/(1-\rho)}w_2^{-\rho/(1-\rho)})^{(1-\rho)/\rho} \tag{9-45}$$

利用包络线定理的结论$\partial C^*/\partial w_i=x_i^*$，我们可以推出不变产出的要素需求函数：

$$\frac{\partial C^*}{\partial w_1}=y\left(\frac{1-\rho}{-\rho}\right)(a_1^{1/(1-\rho)}w_1^{-\rho/(1-\rho)}+a_2^{1/(1-\rho)}w_2^{\rho/(1-\rho)})^{1/-\rho}\times(a_1^{1/(1-\rho)}w_1^{-1/(1-\rho)})\left(\frac{-\rho}{1-\rho}\right)$$

或者：

$$\frac{\partial C^*}{\partial w_1}=x_1^*=y(a_1^{1/(1-\rho)}w_1^{-\rho/(1-\rho)}+a_2^{1/(1-\rho)}w_2^{-\rho/(1-\rho)})^{1/-\rho}a_1^{1/(1-\rho)}w_1^{-1/(1-\rho)} \tag{9-46}$$

x_2^* 的表达式类似。

推广到 n 种要素的情形

再考虑一下(9-27)式中对替代弹性的定义，但现在假设问题中的两种要素是生产函数中所包括的 n 种要素中的两种要素：

$$\sigma_{ij}=-\frac{f_i/f_j}{x_i/x_j}\frac{\mathrm{d}(x_i/x_j)}{\mathrm{d}(f_i/f_j)} \tag{9-47}$$

上式可以描述在两种要素之间的边际替代率发生变化时，这两种要素的使用量之比变化有多快。这一定义要想有意义，其他要素必须保持在某一水平不变，即 $x_k=x_k^0, k\neq i,j$。如果使用的要素不只有两种，一种要素对另一种要素的边际替代率只能在原空间的两维子空间中进行定义，即平行于 x_i, x_j 轴的平面(超平面)，在该平面内，其他变量不变。因此，类似于(9-27)式，在 n 种要素的情形下，对替代弹性的定义是"局部"替代弹性。其他要素保持不变，这些定义没有反应出生产函数中出现的替代可能性的所有维度。如果在这些保持不变的要素中，有一个或多个要素是发生变化的要素的替代品或互补品，则对替代弹性的局部度量就靠不住了。

相反，我们可以从(9-26)式来定义替代弹性：

$$\sigma_{ij}^*=-\frac{w_{ij}}{u_{ij}}\frac{\partial u_{ij}}{\partial w_{ij}} \tag{9-48}$$

其中，$w_{ij}=w_i/w_j$，$u_{ij}=u_i/u_j$。按照这个定义，在一些要素可以发生变化时，其他所有的要素都保持不变。这个定义克服了上面所讨论的固定产出定义(9-47)式的大部分缺陷。显然，σ_{ij}^* 与要素需求的交叉弹性有关。这样，它们不像是生产函数的技术资料，而更多的像是一个有用的概念，因为现实中其他的要素很少保持不变。

上面将不变替代弹性函数形式推广到多要素的情形：

$$y=A(a_1x_1^\rho+\cdots+a_nx_n^\rho)^{1/\rho} \tag{9-49}$$

从中求得了(9-48)式中给定类型的不变弹性；即其他要素的价格保持不变。[2] 这也称为艾伦弹性。[3] 但所有这些局部弹性彼此都相等，且都等于 $1/(1-\rho)$。正如两种要素的情形一样，

---

2 参见 H. Uzawa, "Production Functions with Constant Elasticties of Substitution", The Review of Economic Studies, 29:291-299, October 1962。

3 参见 R. G. D. Allen, Mathematical Analysis for Economists, MacMillan & Co., Ltd., London, 1938; reprinted by St. Martin's Press, New York, 1967。

$\rho=0(\sigma_{ij}=1)$时，形式可以简化为科布—道格拉斯或多个分离项组成的函数：

$$y=Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$$

其中，要保持线性齐次，有 $\sum a_i=1$。

一般的列昂惕夫成本函数

人们发现，由 Erwin Diewert[4] 构造的成本函数在实际分析中很有用。这种函数形如：

$$C^*=y\sum\sum\beta_{ij}w_i^{1/2}w_j^{1/2}\qquad i,j=1,\cdots,n \tag{9-50}$$

这种函数要满足成本函数的要求，必须是对称的，即 $\beta_{ij}=\beta_{ji}$。上式对各个工资求导，可以得到不变产出的要素需求：

$$x_i^*=\frac{\partial C^*}{\partial w_i}=y\sum_k\beta_{ik}\left(\frac{w_k}{w_i}\right)^{1/2}\qquad i=1,\cdots,n \tag{9-51}$$

再做一次微分，可以得到：

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_j}=\frac{1}{2}y\beta_{ij}\left(\frac{1}{w_iw_j}\right)^{1/2}$$

注意，要使$\partial x_i^*/\partial w_j=\partial x_j^*/\partial w_i$，要求 $\beta_{ij}=\beta_{ji}$。

这个方程之所以称为一般的列昂惕夫成本函数，是因为由 Wassily Leontief 发展起来的投入产出分析利用了“固定系数”的技术，即 L 形等产量线，指出生产要素之间可能缺乏弹性。在这种特殊的情形下，$\beta_{ij}=0$，$i\neq j$，$x_i=y\beta_{ii}$。因此，在那种情况下有：

$$\frac{x_i}{x_j}=\frac{\beta_{ii}}{\beta_{jj}}$$

即要素使用量之比与产出水平和要素价格无关。这就是列昂惕夫型技术。我们将在第 17 章中进一步阐述线性规划模型（一般均衡 I）。

尽管其他一些函数形式可能在生产理论和消费者理论中非常有用，但我们将在效用理论的内容中进行分析。

习题

1. 如果生产函数是 $r>$一次齐次（或 $r<1$），则该函数是规模报酬递增（或递减）。但反过来说就不对。请加以解释。

4　W. Erwin Diewert, “An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leotief Production Function”, Journal of Political Economy, 79:481-507, June 1971.

2. 假设在某一竞争行业中，所有的企业都有相同的生产函数 $y=f(x_1,x_2)$，其中，$f(x_1,x_2)$是 $r<$一次齐次。证明该行业中的所有企业都会收到"租金"，即会计利润为正。哪一种生产要素的租金会有所提高？从长期来看，如果该行业可以自由进出，行业价格、产出和企业数量分别是多少？
3. 推导下列成本函数所对应的生产函数：
   (a) $C=\sqrt{w_1 w_2}\,e^{y/2}$
   (b) $C=w_2[1+y+\log(w_1/w_2)]$
   (c) $C=y(w_1^2+w_2^2)^{1/2}$
4. 人们常常认为平均成本曲线之所以呈现U型，是因为某些生产要素的不可分割性。但生产要素的不可分割性不一定能够推导出这些性质。假设一家企业的生产函数是某次齐次的。假设在第 n 种生产要素保持在某一水平时，该生产函数对其他 $n-1$ 种生产要素仍是齐次的。证明具有这些性质的惟一函数可以分解为多项的形式 $y=kx_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$。
5. 在第 n 种生产要素保持在某一水平时，同势函数对其他 $n-1$ 种生产要素仍同势，这类同势函数集 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$是什么？
6. 证明对于同势生产函数，平均成本最小时的产出与要素价格无关。
7. 假设生产函数 $y=f(x_1,x_2)$同势，即 $f(x_1,x_2)=F(h(x_1,x_2))$，其中，$h(x_1,x_2)$是线性齐次函数。证明替代率是 $\sigma=(h_1h_2)/h_{12}h$。

部分参考文献

Allen, R. G. D.: Mathematical Analysis for Economists, Macmillan & Co., Ltd., London, 1938; reprinted by St. Martin's Press, New York, 1967.

Arrow, K. J., H. Chenery, B. Minhas, and R. M. Solow: "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency", The Review of Economics and Statistics, 43:225-250, 1961. The seminal paper on CES production functions.

Blackorby, Charles, and R. Robert Russell: "Will the Real Elasticity of Substicity of Substitution Please Stand Up? A Comparison of Allen/Uzawa and Morishima Elasticities", American Economic Review, 79:882-888, September 1989.

Carlson, Sune: A study on the Theory of Production, Kelley & Millman, New York, 1956.

Diewert, W. E.: "Applications of Duality Theory", Department of Manpower and Immigration, Canada, 1973.

Frisch, Ragnar: Theory of Production, Rand McNally & Company, Chicago, 1965.

Hicks, J. R.: Value and Capital, 2d ed., Clarendon Press, Oxford, 1946.

Jorgenson, D. W., L. R. Christensen, and L. J. Lau: "Transcendental Logarithmic Production Frontiers". Review of Economics and Statistics, 55:28-45, February, 1973.

McFadden, Daniel: "Constant Elasticity of Substitution Production Functions", Review of Economic Studies, 30:73-83, June 1963.

Samuelson, P. A.: Foundations of Economic Analysis, Harvard University Press, Princeton, NJ, 1953; also the revised version of this book, 1970, which has become a classic.

Uzawa, H.: "Production Functions with Constant Elasticities of Substitution", The Review of Economic Studies, 29: 291-299, October 1962.

第 10 章　消费者需求函数的推导

10.1　引论:有关消费者行为的各种假设

在本章中,我们将分析经济学中的一个基本问题,即如何从效用最大化的行为假设中推导出消费者需求函数。这个讨论的中心主题是,如果存在一些可以被驳倒的假设,那么如何通过研究多种消费者的行为模型的结构来揭示这些假设。因此,我们的分析主要侧重于方法。尤其,我们希望找出约束条件下效用最大化假定中隐含哪些内容,从中我们可以推导出或者不能成功推导出可以被驳倒的假设。

我们所要研究的行为假定如下:假定消费者在约束条件下需求最大化,最大化行为的目标是使(10-1)最大化。即:

$$U(x_1, \cdots, x_n) \tag{10-1}$$

其中 $x_1, \cdots, x_n$ 表示消费者实际消费的商品,$U(x_1, \cdots, x_n)$表示消费者自己对于消费这些商品以后所获得的满意程度,或者说是效用的主观评价。但是,我们生活在物质稀缺的世界里,因此,消费者面临着决策问题,决定自己将会采用什么样的消费水平。我们用消费者面临一个预算约束这一表述来总结物质稀缺对于消费决策的影响,并且假设消费者面临的预算约束是:

$$\sum p_i x_i = M \tag{10-2}$$

其中 p_i 表示 x_i 商品的单位价格,M 表示消费者每段时期的总预算。因此,消费者理论的经典问题,可以表述为:

最大化

$$U(x_1, \cdots, x_n) \tag{10-3}$$

使得:

$$\sum p_i x_i = M。$$

模型(10-3)所体现的假设又常被称为理性行为假设,或者被认为是一个理性消费者会采用的行为假设。但是,这一行为假设受到批评。首先,如果这个假设成立,那么很有必要发展另一个关于非理性消费者行为的理论。所谓非理性消费者,指的是消费者行为不遵守模型(10-3)所体现的行为假设。但是,大概是出于好的原因,有关非理性消费者究竟如何进行消费行为的问题并没有得到认真的研究。其次,一些学者从行为假设内在的各个角度对于效用最大化假设进行攻击,其中一个主要问题是消费者是否有能力进行最大化过程中复杂的计算,这种计算是消费者获取效用最大化所必需的。最后,一些学者会提出争议,既然

效用在大多数情况下是不可测量的，那么基于这种使这些不可测量的量最大化的分析是注定要失败的。

所有上述批评和我们这里所要讨论的问题在很大程度上是不相关的。使这些模型公式化的目的在于推导出可以被驳倒的假设。在本文中，假定模型(10-3)所表示的细看来为对于所有消费者而言都是准确的，也就是说，模型(10-3)是我们基本的行为假设。只有当实证的证据明显地表明以模型(10-3)所推导出来的定理是错误的情况下，我们才能驳倒模型(10-3)所代表的假设。这并不是一个反对理性消费者的假设，而是针对所有消费者。如果发现一些消费者，他们的行为明显地和模型(10-3)所表示的行为相违背，那么，我们不应该因为非理性而排斥他们，相反，我们应该认定我们的理论是错误的[1]。

对于这种理论推导所起的作用，学术界并没有一个被广泛接受的明确的观点。这是由于无知人假设和非均衡以及慢速调整假设不能产生可被驳倒的隐含假设，因此，这些假设不能产生可被驳倒的隐含假设。这些假设，可以解释这个世界上所有事情，事情的参与者要么是无知的，或者缺乏信息，或者反应迟缓，或者处于某种非均衡状态之中。但是，却没有理论去描述这些尚未被证实的现象。当人们缺乏一套有用的理论时，或者不能恰当地说明追加在消费者头上的约束条件时，学术界采用这些术语并通过暗喻的手法来说明问题。因此，我们坚持自己的观点，并且大胆的宣称所有消费者都是在约束条件下追求其效用函数最大化。在一般意义上，讲这些约束条件指的是如上述(10-2)所列的线性预算约束。但是，这并不是排他的，即可以在线性预算约束基础上加入非价格约束条件或者数量配置约束条件。只有当这个理论被事实证明是错误时，我们才能否定这个理论。

在前面的章节中，我们已经提到效用函数的概念。现在，让我们更深入地研究效用函数。对于既定的消费者而言，效用函数是指这一消费者对于各种可供消费的商品组合的偏好的集合。早期的边际主义者把效用函数理解为消费者进行商品和服务消费过程中获得的满意程度或者效用商品的一种序数测度。也就是说，对于某个消费者而言，消费一块牛排可以获得 10 个单位的效用，消费一块土豆可以获得 5 个单位的效用，那么，对于这个消费者而言，一块牛排提供的满足程度是一个土豆提供的满足程度的 2 倍。一个消费者所消费的所有商品的总效用是一个衡量个人总福利水平的指标。

到了十九世纪晚期，人们出于反思，认为效用函数是满足商品的序数测度的观点遭到抛弃。更重要的是，经济学家，尤其是帕累托，认为序数测度的效用函数中并不能推导出可以被驳倒的假设，同样，以基数效用函数，也不能推导出可以被驳倒的假设。正如我们现在所看到的，所有效用最大化假设的隐含意义都可以从消费者能够对于商品进行排序的假设中推导出来，而不必考虑消费者通过消费某种商品集合中所得到的满足密集度。这决不是一

1 这个社会公认长期精神病人在某种意义上其行为是非理性的。但是，一家纽约心理研究机构对于长期精神病人的一个研究表明，精神病人也遵守需求法则，即在价格上升后，他们购买的商品数量减少。相应文献可以参考巴特利亚(Battalio et al.)"用观察个体购买行为来检验消费者需求理论"。西方经济杂志，第 411-428 页，1973 年 10 月。

个细微的不重要的假定，而是非常重要的。我们认为消费者在面临消费两种或更多商品组合时，如 $x^1=(x_1^1,\cdots,x_n^1),\cdots,x^k=(x_1^k,\cdots,x_n^k)$，消费者能够把这些互相排斥的商品集合进行排序：

1. x^i 优于 x^j。

2. x^j 优于 x^i。

3. 消费者对 x^i 和 x^j 同样喜欢。

在任何情况下，一次只能出现上述三种中的一种类型。如果哪种类型改变，我们说消费者的喜好或是说偏好已经发生变化。如果出现上面第三种情况，我们说消费者对于 x^i 和 x^j 是无差异的。基数主义者想在这基础上更进一步，他们想给出一些心理上的测量标准，即消费者如果消费 x^i 而不消费 x^j，那么他的效用会提高多少？对于那些研究人类动机的心理学家来说，这样的测量可能是有用的。但是，对于经济学家而言，这样的知识不能进一步推导出可以被驳倒的隐含意义，因此，效用函数的基数特性被抛弃。

因此，效用函数成为简单的效用指数，当消费者消费更偏好的消费商品组合时，这种效用指数增大。根据上述三种类型，我们用 $U(x)=U(x_1,\cdots,x_n)$ 来描述效用指数，那么，$U(x)$具有如下三种性质：

1. $U(x^i)>U(x^j)$；

2. $U(x^j)>U(x^i)$；

3. $U(x^i)=U(x^j)$。

$U(x_1,\cdots,x_n)$的序数性质说明了什么问题呢？图 10-1 中的两条效用水平曲线或是无差异曲线是从 $U(x)=U(x_1,x_2)$的效用函数中推导出来的。靠近原点的一根无差异曲线定义为 $U(x_1,x_2)=1$，另一根无差异曲线定义为 $U(x_1,x_2)=2$。现在假如我们决定用 U 的平方或者 $V=U^2$ 来定义这两个效用集合，而不是用 U 效用指数，那么，根据 V 效用指数，这两条无差异曲线分别具有 1 和 4 的效用水平。或者，我们可以考虑另一种效用指数，即 $W=\log U$，在这种情况下，两条无差异曲线的效用水平分别为 0 和 log2。效用函数的序数性意味着，效用函数中的任何一点和效用函数中其他的点具有同样高的效用水平，也就是说，它们都保留了排序信息，因为不同的效用水平之间，它们可以排序，尽管这种排序不是根据基数差异。一般的研究方式是从某个给定的效用函数 $U(x)=U(x_1,\cdots,x_n)$开始，研究这一效用函数的单调转换形式，例如 $V=F(U(x_1,\cdots,x_n))$，其中 $dV/dU=F(U)>0$。V 和 U 总是同向变化，因此 V 效用指数只是对于 U 效用指数的重新定义，这种定义保留了原来无差异曲线上的排序方式。所以说效用函数的序数性就是指效用函数具有单调递增变换的性质。我们可以检验并且证实，从效用函数 $U(x_1,\cdots,x_n)$得出的所有隐含意义，同样都可以从 $V=F(U(x_1,\cdots,x_n))$，$dV/dU=F(U)>0$ 推导出来，反之亦然。所以，效用函数的序数性意味着 $F(U(x_1,\cdots,x_n))$和 $U(x_1,\cdots,x_n)$包涵着同样的关于消费者偏好的信息。

消费者拥有效用函数的断言就是认为消费者事实上的确存在偏好[2]。这些偏好是如何产生呢？为什么不同国家、不同种族的人会有不同的偏好？这是一个经济学以外的研究内容。毫无疑问，这些都是很有意思的问题，同时，这些问题也是很难解释清楚的。经济学对于这些问题有独到之处，因为经济学在研究这些问题时会忽略造成消费者偏好差异的原因，

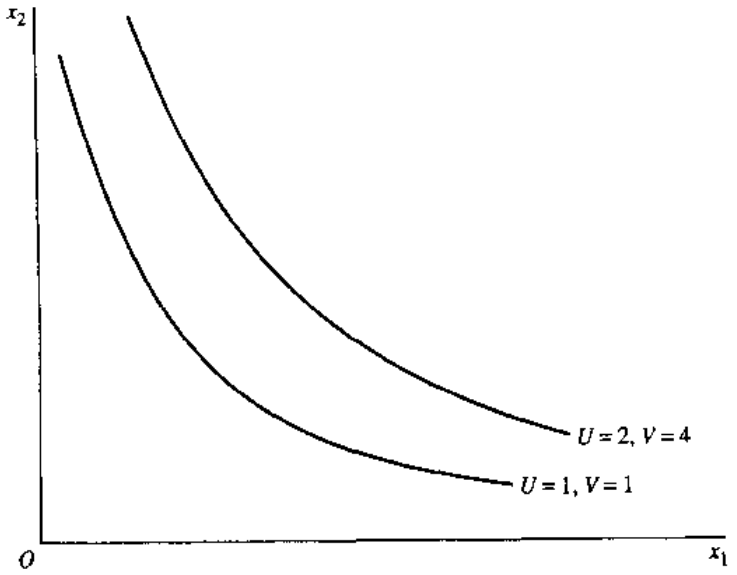

图 10-1 序数效用水平(无差异曲线)。效用函数的序数性是指,效用函数重新定义效用函数的无差异曲线轮廓对于消费者行为没有影响。

而且假定在一段时间内消费者偏好保持不变,从而基于消费机会的变化来解释现象。

但是,仅仅认为消费者具有偏好是不够的,为了从效用分析中推导出可以被驳倒的隐含意义,必须在效用函数上追加其他限制。首先,我们会假设效用函数在数学上是成立的,也就是说,效用函数非常平滑,可以进行必要的微分运算。一些人对于这种假设提出质疑,他们认为商品集——除了液体(如水、石油)-- -是以离散形式出现的,并且如医疗等的一些服务,其服务单位是很难定义的。我们注意到这些反对意见,那么,如果在我们的分析方法中,明确的承认许多商品中的这种离散属性,会对结论有什么影响呢?事实上,对于许多问题的研究结果其影响很小,并且要充分阐述这些离散性是非常复杂的。其次,我们再来考虑经济分析中的假设作用。我们之所以做假设,是因为在研究中存在准确性和可操作性的权衡问题,在这里,可操作性就是指理论的实用性。对于现实世界中的实体的属性进行全面的描述几乎是不可能的,因此在所有理论中,被简化的假设是必要的组成部分。所以,我们只是简单的假设效用函数具有可导性。

在什么问题中,可导性最不可能成为一个关键性的假设?当消费者以个人或者以集体形式,重复购买某种给定的商品时,这种情况会出现,即可导性不再成为一个关键的假设,但是我们能够把离散的商品分析转化为对于消费时间的频率分析,后者则是一种流量,是连续的。例如,一个消费者在星期一买一块面包,星期五又买一块面包,在下个星期二又买一块面包,也就是说,每隔四天买一块面包。对此我们也可以这样说,这个消费者对于面包的平

2 但是偏好的存在并不足以保证存在效用函数。参考第 11 章。

均消费率是每星期 7/4 块面包。没有理由认为每星期的平均消费，或者其他时间单位上的平均消费不能是一个实数，因此消费者效用函数就可以求导。即使当商品本身是按离散的单位来购买的，我们还是可以讲商品提供的是连续的服务。

假设消费者效用函数 $U(x_1,\cdots,x_n)$ 可导，那么效用函数具有以下三个属性。这些属性其用意并不是仅仅表明互不相容属性的最小集，面是作为效用函数的重要属性，正是这些重要的属性构成新古典消费者选择理论的基础。

Ⅰ．非饱和性。或者说"多的总比少的好"。消费者在正的价格水平下所消费的商品都具有非饱和性，即在其他条件不变的情况下，对消费者面言，消费多的商品数量总比消费少的商品数量要好。用数学语言来表达这一转换：如果 $x_1,\cdots,x_n$ 是消费者消费的商品，那么任何一种商品 x_i 的边际效用都是正的，即 $U_i=\partial U/\partial x_i>0$。在保持其他商品不变的情况下，消费者增加任意一种商品 x_i 的消费，使消费者的效用指数增加。

Ⅱ．替代性。在任何一点消费者为了增加其他商品的消费，愿意减少某种商品的消费。这一假设与假设Ⅰ相关。权衡的概念也许是经济学中最关键的概念。我们如何用数学来阐述权衡概念？其原理与成本那一章定义的等产量函数类似(参考图 10-2)。

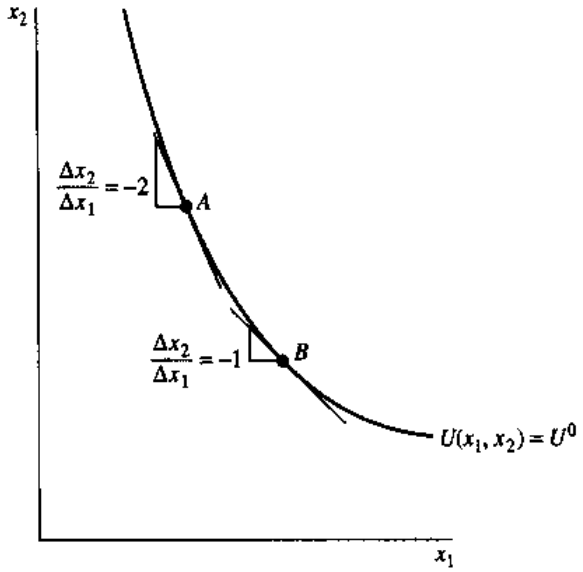

图 10-2　在经济学中价值意味着交换价值。任何商品的价值是个人为了获得一种商品 1 单位的最佳消费而放弃了另一种商品的最多消费量，在极限的情况下，也就是边际点，x_1 的价值就是通过那一点的无差异曲线的效率。在 A 点，x_1 的边际价值是该点无差异曲线的切线的斜率，x_1 的边际价值也称为是 x_1 对 x_2 的边际替换率。在 A 点上，x_1 的边际价值等于 2 单位的 x_2。在 B 点上，x_1 的边际价值等于 1 单位的 x_2。

一个消费者为了增加一个单位 x_1 的消费而必须减少另一种商品，例如 x_2 的消费量，x_2 消费的减少量有一上限，即使消费者在新和旧的情况下效用无差异。从 A 点开始，为了得到一单位 x_1，消费者愿意放弃 x_2 的最多是两个单位，因此，消费者这种权衡通过和最初点无差异的点的轨迹来定义。这些曲线就是消费者无差异曲线。因此曲线上的所有点对于消费者都是无差异的，即 $U(x_1,\cdots,x_n)=U^0=$ 固定值。

无差异曲线的斜率表示消费者愿意做出的权衡，在图 10-2 中，A 点的效率大致是 -2；B 点的斜率是 -1，这说明在 B 点，消费者愿意用 1 单位的 x_2 同 1 单位的 x_1 交换。

在两种商品情况下，无差异曲线就是效用函数 $U=U(x_1,x_2)$ 的程度曲线，即 $U(x_1,x_2)=U^0$。无差异曲线上任意一点的斜率定义成 $x_2=x_2(x_1,U^0)$。根据复合函数求导规则，通过把恒等式 $U(x_1,x_2(x_1,U^0))\equiv U^0$ 对于 x_1 求导，可以算出无差异曲线上的斜率：

$$U_1+U_2\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\equiv 0$$

从而得出：

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\equiv\frac{-U_1}{U_2}$$

根据假设Ⅰ，U_1 和 U_2 都是正的，因此 $x_2/x_1<0$，或者无差异曲线的斜率是负的。对于 n 种商品而言，有：

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\frac{-U_j}{U_i}<0$$

无差异曲线上的负斜率表明消费者是在做出权衡，替代性假设意味着无差异曲线是负斜率，“多总比少好”的假设也同样隐含着这种情况。如果无差异曲线是正的斜率，消费者不会放弃一种商品的消费而增加另一种商品的消费；相反，当厂商通过贿赂消费者以使消费者用一种商品去代替另一种商品，那么负斜率的情况就更有可能会出现。其中一种商品一定是“坏”商品，即边际效用为负。只要在这种情况下才可能出现 $-U_j/U_i$ 为正；只有在这种情况下，消费者才有可能对于下面两种商品集合的消费表现出无差异。在这两种商品集合中，其中一种商品的单位价值高于另一种商品的单位价值。

替代性假设是对于所谓的“优先需求”的谬误的公开否定。政治家和压力集团永远宣称我们“应该根据优先性来重新安排资源”，宣称应该把更多的社会资源配置到他们认为更具有价值的商品上。当然，对于压力集团来说，他们谈论“需求”和“优先性”，但是，经济学如果这样做将会是十分荒谬的。在消费上，一种商品优先于另一种商品的观念与权衡的概念不相容。

尽管这样，我们反对一种商品优先于其他商品这一提法的最终理由来自于实证资料，不是来自于逻辑推演。“非优先性”是一个实证的论断。那我们怎么检验“非优先性”呢？例如，根据各种合理的衡量标准，有个消费者被认为是很穷的。假如税收或者其他方法侵吞了他的部分收入，这使他更加贫穷。当收入下降时，如果这个消费者除了一种商品消费量减少到 0 改变以外，其他商品消费都保持不变。接下来，这一消费者对于其他商品的消费变化也重复上述过程。那么，我们可以得出结论，这一行为表明：一些商品在满足个人需求情况下，优先于另一些商品。更多可能的情况下，所有人，甚至那些非常贫穷的人，当面临收入减少的情况时，会倾向于同时减少几种商品的消费，而不仅仅减少一种商品的消费。现实世界中的消费者行为与商品的边际效用大于 0 的假设是一致的，即 $U_i>0,i=1,\cdots,n$。对于既定的个人来说，这总是成立的。

替代和权衡的概念为经济学的价值理论提供了关键的基础。只有对于那些为了得到其

他的商品而愿意放弃某种商品消费的人们来说，价值才有意义，并且能够测量。在图 10-2 中，在 A 点，消费者愿意放弃 2 单位的 x_2 去获取 1 单位的 x_1。从中我们可以得出结论，消费者认为 x_1 的价值相当于 2 单位的 x_2 的价值。或者说，消费者认为 x_2 相当于 1/2 单位的 x_1 的价值，这个价值通过该点的无差异曲线斜率来体现，被称为 x_1 对于 x_2 的边际替代率。这个价值也就是用 x_2 来衡量的 x_1 价值。

经济学家对于效用函数做的最后一个假设是附加在边际价值行为上的约束条件，具体的说，就是指：

Ⅲ. 沿着任意一条无差异平面，任何商品的边际价值随着该商品的消费量的增加而减少。这一条件的数学表达形式是：

$$\left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial x_i^2}\right)_{U^0}>0 \quad i,j=1,\cdots,n,i\neq j$$

我们现在发现，尽管在面临预算约束条件下求效用最大化的二阶条件中已经隐含边际替代率递减的规律，但是这一规律本身不足以保证存在一个有约束条件的最大值。有约束条件的最大值存在的前提是无差异平面（事实上，在 n 维空间中是超平面）凸向原点，类似于两维空间中无差异曲线的凸性，数学上，这就是效用函数的“拟凹性”。有关于“拟凹性”的问题，我们在第 6 章中讨论过，其数学形式是：

$$H=\begin{vmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1n} & U_1 \\ U_{21} & & U_{2n} & U_2 \\ \vdots & & & \\ U_{n1} & & U_{nn} & U_n \\ U_1 & & U_n & 0 \end{vmatrix} \tag{10-4}$$

海塞加边矩阵的 2 阶保留主子式的形式是：

$$H_2^{ij}=\begin{vmatrix} U_{ii} & U_{ij} & U_i \\ U_{ji} & U_{jj} & U_j \\ U_i & U_j & 0 \end{vmatrix}=-(U_{ii}U_j^2-2U_{ij}U_iU_j+U_{jj}U_i^2)$$

根据第 3 章和第 6 章，我们可知：

$$\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}x_1^2}=\frac{\mathrm{d}(-U_1/U_2)}{\mathrm{d}x_1}$$

$$=\frac{-1}{U_2^3}(U_{11}U_2^2-2U_{12}U_1U_2+U_{22}U_1^2)$$

海塞加边矩阵 H_2^{ij} 代表一种一般性的状况，是对于在当 n 种商品的情况下，除了 x_i 和 x_j 商品变化以外，其他商品都保持不变的情况的一般性描述。$H_2^{ij}>0$，说明当 $k\neq i,j$ 时，x_k 的值给定的情况下，在 x_i 和 x_j 超平面中，x_i 对 x_j 的边际替代率递减，也就是说所有海塞加边矩阵的 2 阶边保留主子式都是正的。如果递减的边际替代率对于任何一对商品 x_i 和 x_j 来说都成立，其中 $i,j=1,\cdots,n$，但是这只说明 $x_j/x_i>0$。这不足以从中推导出任何关于海

塞矩阵本身高阶主子式的性质。因此，在一个 n 种商品的世界中，无差异超平面凸向原点的假设比在其他商品保持不变，任何一对商品之间简单递减的边际替代率假设更加强。在两种商品的情况下，没有必要假设其他商品保持不变，只有在这种情况下，无差异曲线的拟凹性才等同于递减的边际替代率假设。

上述所有假定可以总结为如下：所有消费者拥有效用函数 $U=U(x_1,\cdots,x_n)$，效用函数在每一点上都可以求导，并且严格递增($U_i>0, i=1,\cdots,n$)，具有严格拟凹性。“严格”在这里表示无差异曲线上没有一部分是平坦的。这保证了解的惟一性，也就是说只存在一个可行解。

提出数学约束条件并不单单是为了确保有约束条件下求效用函数最大值问题有解，更重要的是，我们确信这些约束条件和现实生活中人们的行为相一致。否定这些假定也就意味着坚持认为消费者具有古怪的行为。例如上一章所讨论的要素需求的例子中，无差异曲线凹向原点的假设意味着消费者将把他的所有预算花在一种商品上。于是得到一个角解，这个解就是图 10-3 上的 B 点。在这种价格下，只消费 x_1。如果 p_1 增加并且超过一定水平，那么消费者会突然改变消费决策，转而全部消费 x_2。这种缺乏弹性并且有点离奇的行为在现实中很难碰到。正是基于这个原因，我们提出无差异曲线的拟凹性假设。

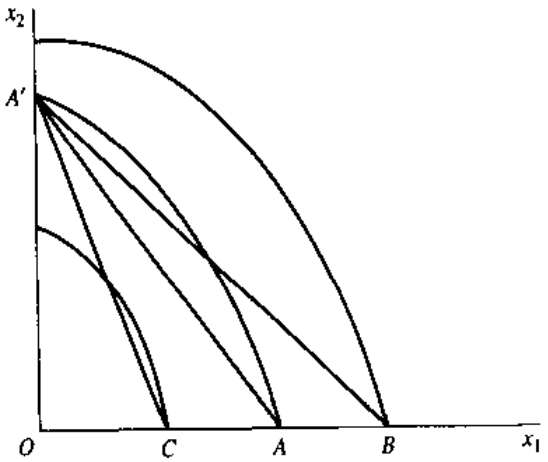

图 10-3 非拟凹性无差异效用函数。当 p_1 增加时，约束线从 $A'B$ 变化到 $A'A$ 最后到 $A'C$。效用最大化点会突然地从 x_1 轴上的点改变到 x_2 轴上的 A 点。由于现实生活中并没有发现这种行为，因此我们提出无差异曲线凸向原点的假设，也就是说效用函数具有拟凹性。

10.2 效用最大化

现在让我们分析手头的问题吧！在 10-3 中已经提过的：

最大化

$$U(x_1,\cdots,x_n)$$

并满足

$$\sum p_i x_i = M$$

为简化起见，我们将只考虑两个变量的情况，在正规的分析中，将简要扩展到对 n 个变量进行一般性讨论。

假设消费者(C)消费 x_1 和 x_2 两种商品的数量均大于零，并且是在竞争市场中分别以恒定的价格 p_1，p_2 购得，消费者购买之前的货币收入为 M。在非饱和的假设下，消费者会花光所有的 M 来购买 x_1，x_2，因此 M 本身是不会出现在效用方程中的，收入 M 的作用仅在于购买 x_1，x_2，正像效用方程 $U=U(x_1,x_2)$ 所表达的那样。

我们假定消费者(也可以说所有消费者)的行为是要：

最大化

$$U=U(x_1,x_2)$$

并满足

$$p_1x_1+p_2x_2=M \tag{10-5}$$

这一行为的必然结果就是下列拉格朗日函数的一阶导为 0：

$$\mathscr{L}=U(x_1,x_2)+\lambda(M-p_1x_1-p_2x_2) \tag{10-6}$$

其中，λ 是拉格朗日乘子。因此：

$$\mathscr{L}_1=U_1-\lambda_{p_1}=0 \tag{10-7a}$$

$$\mathscr{L}_2=U_2-\lambda_{p_2}=0 \tag{10-7b}$$

$$\mathscr{L}_\lambda=M-p_1x_1-p_2x_2=0 \tag{10-7c}$$

有约束条件最大化的二阶充分条件是 $\mathscr{L}$ 二阶偏导组成的海塞加边矩阵的行列式 D 为正：

$$D=\begin{vmatrix}\mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} & \mathscr{L}_{1\lambda}\\ \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22} & \mathscr{L}_{2\lambda}\\ \mathscr{L}_{\lambda 1} & \mathscr{L}_{\lambda 2} & \mathscr{L}_{\lambda\lambda}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}U_{11} & U_{12} & -p_1\\ U_{21} & U_{22} & -p_2\\ -p_1 & -p_2 & 0\end{vmatrix}>0 \tag{10-8}$$

尽管在最大化假设中只隐含 $D\geqslant 0$，但是我们假设 D 是严格大于 0。

到目前为止，我们仅仅完成很少的任务。在等式(10-7)和(10-8)中，许多变量是不可直接观测的，这些变量包涵了序数效用函数的衍生变量。正如我们反复强调的那样，我们只关注这样的命题，从这些命题出发，可以推导出可被驳倒的假设。为了达到这个目的，所有的变量都必须是可以观测的。这样，我们的研究目标就是隐含在方程组(10-7)中的需求函数。这三个等式含有六个独立的变量：x_1，x_2，p_1，p_2，M，λ。隐含数定理指出这些等式的一阶导($\mathscr{L}_1=0$，$\mathscr{L}_2=0$，和 $\mathscr{L}_\lambda=0$)组成的雅可比行列式不等于 0，该方程组可以求解。因此，在给定 p_1，p_2 和 M 的情况下可以求出 x_1、x_2 和 λ。事实上，雅可比行列式就是等式(10-8)的行列式，D 中的每一行都是由方程组(10-7)的一阶偏导组成。因此方程组(10-7)本质上就是 $\mathscr{L}$ 一阶偏导，而雅可比行列式是由 $\mathscr{L}$ 对于 x_1，x_2 和 λ 的二阶偏导组成。有约束条件下最大值的二阶充分条件确保了 $D\neq 0$(事实上，$D>0$)。因此我们又可以写成：

$$x_1=x_1^M(p_1,p_2,M) \tag{10-9a}$$

$$x_2=x_2^M(p_1,p_2,M) \tag{10-9b}$$

$$\lambda=\lambda^{M}(p_1,p_2,M) \tag{10-9c}$$

方程组(10-9)和方程组(10-7)具有同解，这里有关变量主要有两个：价格和货币收入。等式(10-9a)和(10-9b)显示了消费者对于任一给定的商品价格和货币收入所做出的消费决策。因此这些等式代表所谓给定货币收入情况下的需求曲线，也称作马歇尔需求函数。这样的命名是为了纪念伟大的经济学家马歇尔[3]。这些方程中的 M 既可以表示“货币”，也可以表示“马歇尔”。

“货币收入给定”这一术语有时在某种程度上是错误的术语，货币收入 M 只是消费者需求所依赖的三个变量中的一个。这一术语起源于常用的需求曲线的图形表示方式，正如(图10-4)所示，其中价格 p_1 是纵轴，x_1 是横轴。一般的图形都是二维的，只有 p_1 是变化的，而 p_2 和 M 都是固定值，即 p_2^0 和 M^0。

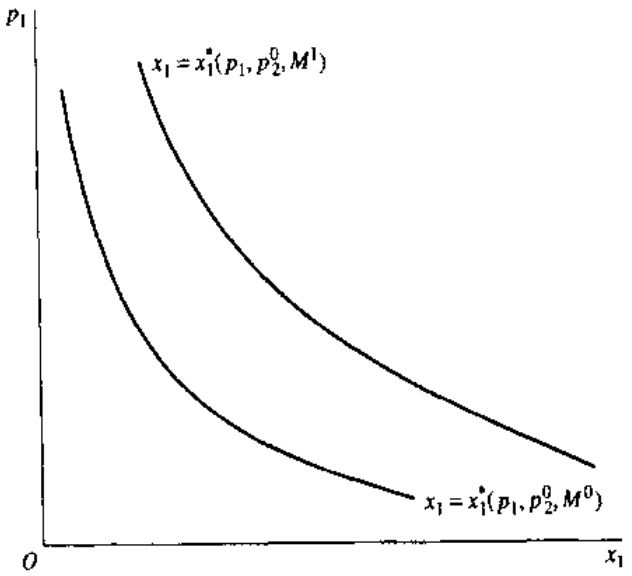

图 10-4 货币需求给定情况下的需求函数。所谓“货币需求给定”是一种简单的表示方式，说明 x_1 不仅仅是由 p_1 决定，而且还和 p_2 以及 M 有关。图中所示是 p_1 和 x_1 的关系，同一曲线上的点表明 p_2 和 M 给定的情况下，p_1 和 x_1 的关系，当 p_2 给定，M 变化时导致曲线的移动。

因此，这个图实质上反映的是一个投影，即当 p_2 和 M 给定的时候，把函数 $x_1=x_1^M(p_1,p_2,M)$ 投射到一个与 x_1，p_1 轴组成的坐标平面相平行的平面上。这些条件(其他变量给定的前提下)是另一种表述方式，这种表示方式明确的说明需求函数中出现的变量。沿着“需求函数 $x_1=x_1^M(p_1,p_2,M)$ 移动”指的是当价格 p_1 变化时，消费者消费的商品数量 x_1 的变化。但是“需求函数的移动”指的是当 p_2 或 M 发生变化时，需求的变化。不过，需求函数所依赖的所有变量都必须画出来。

尽管，我们从边际关系中可以求出最优解，不过，这些边际关系是不能被观测到的。但是(10-9a)式和(10-9b)式的需求关系和可观测到的变量相关，因此具有潜在的意义。

---

3 马歇尔的《经济学原理》这本书在1890年第一次出版，是新古典经济学的奠基之作。在该书中，马歇尔认为需求是由价格和商品数量共同决定的。

如果把需求方程(10-9a)和(10-9b)代入 $U(x_1,x_2)$，我们能够得到间接效用函数：

$$U^*(p_1,p_2,M)\equiv U(x_1^M(p_1,p_2,M),x_2^M(p_1,p_2,M)) \tag{10-10}$$

值得注意的是，U^* 是一个只有两个变量的方程，这两个变量是价格和货币收入。效用函数 $U^*(p_1,p_2,M)$ 给出了在任意给定价格和货币收入的情况下，消费者所能得到的最大效用，因为这些商品数量 x_1,x_2 正是预算约束条件下消费者得到最大效用的商品消费量，这些预算约束条件在计算的过程中已经代入到 $U(x_1,x_2)$。

我们现在来研究边际关系(10-7)的一阶条件。通过这种研究，我们能够发现效用最大化行为的一些性质和需求关系(10-9a)和(10-9b)的一些属性。我们在前面已经提过第一个命题，这个命题在推导需求曲线 $x_1=x_1^M(p_1,p_2,M)$ 的过程中不必假设效用的基数性。如果无差异水平 $U(x_1,x_2)$ 通过某种单调转换，需求曲线保持不变。

命题 1　有约束条件下效用最大化问题如下：

最大化

$$U(x_1,x_2)$$

并满足

$$p_1x_1+p_2x_2=M$$

假设有一函数是 $V(x_1,x_2)=F(U(x_1,x_2))$，其中 $F(U)>0$。当 $V(x_1,x_2)$ 函数代替 $U(x_1,x_2)$ 时，上述最大化问题可以推导出同样的需求曲线。这就是命题 1。

证明：现在我们来研究需求曲线是怎样推导出来的。两条需求曲线 $x_1^M(p_1,p_2,M)$ 和 $x_2^M(p_1,p_2,M)$ 是从切线条件和预算约束中推导出来的。通过将方程式(10-7a)和(10-7b)进行变换，消去拉格朗日乘子 λ，可以得到切线条件。另一种方法可以通过等式(10-11)来得到切线条件：

$$U_1/U_2=p_1/p_2 \tag{10-11}$$

通过这种方法来求切线条件，不需要使用拉格朗日方法。这个等式(10-11)和预算约束条件 $M_{p_1x_1\ p_2x_2}=0$ 构成一个方程组，对于这个方程组求解便可以得到上面所说的需求曲线。当 $V(x_1,x_2)=F(U(x_1,x_2))$ 代替 $U(x_1,x_2)$，也就是说当效用函数曲线进行重新定义，但是保留原来的排序方式，对子上述方程组会有什么影响？当把 $V(x_1,x_2)$ 代替 $U(x_1,x_2)$ 时，我们得到：

$$V_1/V_2=p_1/p_2 \tag{10-12}$$

但是 $V_1=F'(U)U_1$，$V_2=F'(U)U_2$，因此

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{F'U_1}{F'U_2}=\frac{U_1}{U_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

因为 V_1/V_2 总是等于 U_1/U_2，所以对于 U 进行上述单调转换之后，用来推导需求函数的方程组没有发生变化。也就是说等式(10-11)与预算约束条件所得到的解和等式(10-12)与预算约束条件所得到的解相同。

当然，我们还必须证明 $V_1/V_2=p_1/p_2$ 的确是有约束条件下效用最大化点，而不是效用

最小化点。也就是说，我们必须证明消费者事实上在做出效用最大化决策时让 $V_1/V_2=p_1/p_2$。如果 $F'>0$，那么 V_1/V_2 将仍等于 U_1/U_2，但是 $V_1/V_2=p_1/p_2$ 将不会是一个与效用最大化有关的切线条件，因为当 $F'<0$，同时增加 x_1 和 x_2 将会使 U 增加，但是会使 V 减少。因为 $V=F(U)$，并且 $F'(U)>0$，V 和 U 必然按照同一个方向移动，所以当且仅当 V 取得最大值的时候，U 才取得最大值。

需求曲线与效用曲线的任何单调转换相独立。也就是说，它们和无差异曲线任何重新定义的形式相独立，这个定理只是重申了这个观点，即在经济学研究中只有交换价值才有意义。沿着任意无差异曲线，每一点的斜率衡量了消费者为了得到一种商品而放弃另一种商品的权衡。这种对商品价值的边际测量是惟一可操作性的商品价值测量方法，这种衡量方法与无差异曲线是否被标签为 10 单位、10000 单位或者 10^{10} 单位效用无关。只有无差异曲线的斜率同商品价值与交易有关，而与任意给定的商品消费集相联系的消费者满意指数则同商品价值与交易无关。事实上，不可能区分消费者愿意或者不愿意消费某一种商品集。如果消费者只能消费一种商品，交换价值不能反映消费者是否喜欢或者不喜欢消费这种商品。

上述推导过程也揭示了为什么递减的边际效用概念在现代经济学中是不准确的。对于严格的序数效用而言，边际效用随着商品变化所发生的变化率依赖于所采用的特殊的排序指数，因为 $V_1=F'(U)U_1$，根据乘法和连续求导法则，可以得到 $V_{11}=F'U_{11}+U_1F''U_1$。更一般的形式是：

$$V_{ij}=F'U_{ij}+F''U_iU_j \tag{10-13}$$

这里假设 $F'>0$，并且根据非饱和性可以推导出 U_1，U_2 都为正，但是，F''可以为正，也可以为负。例如，当 $F(U)=\log U$ 时，$F'>0$ 但是 $F''<0$；如果 $F(U)=e^U$，则 $F'>0$ 并且 $F''>0$。假设 $U_{ij}<0$，并且如果选择 V 使得 $F''>0$，那么 V_{ij} 就有可能大于 0。类似的，如果 $U_{ij}>0$，就有可能通过单调转换使 F''为负，从而得到 V_{ij} 小于 0。因此，V_{ij} 和 U_{ij}（包括 V_{ii} 和 U_{ii}）不一定有相同的符号。但是，两个效用函数包含着相同的需求曲线，因此某一个给定的观测到的需求关系和表现出递减边际效用的效用函数相一致。通过对该效用函数进行某些单调，可以使其具有递增边际效用的性质，这种转换后的效用函数与某一个给定的观测到的需求关系也是一致的。因此递增或者递减边际效用并不具有可观测到的隐含意义。

通过类似的方式，经济学家曾经用边际效用术语来定义互补品和替代品：如果消费者消费某种商品的数量增加会导致另一种商品的边际效用增加，那么称这两种商品为互补品，反之称为替代品。例如一个消费者消费更多的饼干会导致啤酒的边际效用提高，因此啤酒和饼干是互补品。通过代数推导，我们可以发现为什么上述这种定义是错误的。两种商品关系的定义是$\partial U_i/\partial x_j=U_{ij}=U_{ji}$。如果 $U_{ij}>0$，U 的某些单调转换形式，例如 $F(U)$，其中 $F''<0$，能产生一个新的效用函数，并且$\partial V_i/\partial x_j=V_{ij}<0$，可见，$V_{ij}$ 和 U_{ij} 正好符号相反，但是两个效用函数隐含同样的可观测到的消费行为，这些可观测到的消费行为总结在需求关系中。这个定义由于不能对可观测到的消费行为加以区分，因此是毫无意义的。

我们现在来讨论关于需求曲线的第二个命题，这个命题可以从等式(10-7)这个一阶条件直接推导出来。

命题 2　需求曲线 $x_i=x_i^M(p_1,p_2,M)$对于变量 p_1，p_2 和 M 而言是零阶齐次方程。也就是说 $x_i^M(tp_1,tp_2,tM)\equiv x_i^M(p_1,p_2,M)$。

证明：假设所有商品价格和货币收入都乘上因子 t，那么效用最大化问题变成：

最大化

$$U(x_1,x_2)$$

并满足

$$tp_1x_1+tp_2x_2=tM$$

但是显然新的预算曲线是同原来的一样，即 $p_1x_1+p_2x_2=M$，因此这两个问题的一阶条件和二阶条件是完全一样的，所以从这些相同的一阶条件中推导出的需求曲线也是一样的。

这个命题的含义是说明对于消费者而言，有意义的只是相对价格，而不是绝对价格或者绝对的货币收入。这一命题也重申了切线条件 $U_1/U_2=p_1/p_2$，也就是说只有价格比率和收入对价格的比率才决定商品的边际价值和交易。这里有必要再次提到，在 20 世纪 30 年代，一些经济学家指出，如果真实(相对)价格水平保持不变，消费者和厂商会对名义价格的变化做出反应。但是这种所谓的货币幻觉的概念已经被大多数经济学家丢弃了，因为它否定了需求曲线的齐次性。

对拉格朗日乘子的解释

现在让我们来研究拉格朗日乘子(λ)的含义。从一阶条件中，我们可以得出如下关系：

$$\lambda^M=U_1/p_1=U_2/p_2$$

此外，在等式(10-7a)乘上 x_1^M，在(10-7b)乘上 x_2^M，并且把得到的两个等式相加，可以得到：

$$U_1x_1^M+U_2x_2^M=\lambda^M(p_1x_1^M+p_2x_2^M)=\lambda^M M$$

因此可以得到：

$$\lambda^M=U_1/p_1=U_2/p_2=(U_1x_1^M+U_2x_2^M)/M \tag{10-14}$$

这些等式对于理解 λ^M 提供了重要的线索。对于任何给定的消费点，消费者可以通过增加 x_1 的消费量进而增加效用 U_1。但是增加 x_1 的边际成本是 p_1，因此对于每消费 1 美元的 x_1 的边际效用是 U_1/p_1。相似的，每消费 1 美元的 x_2 的边际效用是 U_2/p_2。所以等式(10-14)说明当消费者达到预算约束条件下效用最大化时，消费者在两种商品上每消费 1 美元得到的边际效用是一样的。也就是说，对于 x_1 和 x_2 两种商品而言，如果 $U_1/p_1>U_2/p_2$，消费者在面临同样的预算约束条件下，通过把费用从 x_2 移到 x_1 这样一个简单的方法来增加消费者效用。

那么(10-14)中第三个等号意味着什么呢？这个等号说明，当增加的消费支出花在两种商品上所获得的单位美元边际效用和花在其中某种商品的单位美元边际效用是一样的。这是一个与包络相关的现象，说明了一种属性，这种属性是指无论决策变量会不会对于目标函数进行调整，而目标函数对于其中一个函数的变化率总是一致的。

尽管这样，但是我们还没有用数学来证明从这一直觉中能推导出什么结论。λ^M 指的是货币收入的边际效用，用数学形式表示是：

$$U^*(p_1,p_2,M)=U(x_1^M(p_1,p_2,M),x_2^M(p_1,p_2,M)) \tag{10-10}$$

对于等式(10-10)进行求导，得出：

$$\frac{\partial U^*}{\partial M}\equiv\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+\frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^M}{\partial M}$$

$$\equiv U_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+U_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M} \tag{10-15}$$

根据一阶导(10-7)，我们知道 $U_1=\lambda^M p_1$，$U_2=\lambda^M p_2$。并且把它代入(10-15)得到：

$$\frac{\partial U^*}{\partial M}\equiv\lambda^M\left(p_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+p_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M}\right) \tag{10-16}$$

现在我们来考虑预算约束 $p_1x_1+p_2x_2=M$。当我们把需求曲线代进上述预算约束等式中，可以得到 $p_1x_1^M+p_2x_2^M=M$。在对这一等式两边对 M 求偏导，得到：

$$p_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+p_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M}\equiv 1 \tag{10-17}$$

这里我们不难发现，等式(10-17)实质上是等式(10-16)括号中的内容。因此，我们把(10-17)代入(10-16)，得到：

$$\lambda^M\equiv\frac{\partial U^*}{\partial M} \tag{10-18}$$

我们刚才所作的事实上只是用包络定理重新推导效用最大化问题，当我们用包络定理的时候，根据拉格朗日函数 $\mathcal{L}=U(x_1,x_2)+\lambda(M-p_1x_1-p_2x_2)$ 得出：

$$\frac{\partial U^*}{\partial M}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial M}=\lambda^M$$

非饱和性意味着 $\lambda^M=\partial U^*/\partial M>0$。

罗伊恒等式

另一个类似的程序可以推导出一个重要的关系式，这个关系式涉及到最大化效用对于价格的变化率，即 $\partial U^*/\partial p_i$。根据包络定理，可以得到：

$$\frac{\partial U^*}{\partial p_i}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_i}=-\lambda^M x_i^M \tag{10-19}$$

这个结果就是罗伊恒等式，是由法国经济学家罗伊发现的，他于 1931 年第一次发表这

一结果。而且，根据(10-18)可以解出 x_i^M：

$$x_i^M = -\frac{\partial U^* / \partial p_i}{\partial U^* / \partial M} \tag{10-20}$$

这里值得注意的是，在从利润最大化问题中推导出需求函数和从有约束的成本最小化中推导出需求的例子中，选择函数都是间接目标函数对于价格的偏函数。在效用最大化模型中所隐含的选择函数，例如马歇尔函数，不具有这种简单的属性。相反，它们是间接目标函数对于价格的偏导数除以间接目标函数对于货币收入的偏导数，符号为负。

我们把 Young 定理应用到间接效用函数中，能够推导出效用最大化模型的逆函数关系。根据罗伊等式，可以得到：

$$U_{p_1}^* = -\lambda^M x_1^M$$
$$U_{p_2}^* = -\lambda^M x_2^M$$

因此，可以推导出：

$$-U_{p_1 p_2}^* = \frac{\partial(\lambda^M x_1^M)}{\partial p_2} = \frac{\partial(\lambda^M x_2^M)}{\partial p_1} = -U_{p_2 p_1}^*$$

根据乘法定理可以得到：

$$\lambda^M \frac{\partial x_1^M}{\partial p_2} + x_1^M \frac{\partial \lambda^M}{\partial p_2} = \lambda^M \frac{\partial x_2^M}{\partial p_1} + x_2^M \frac{\partial \lambda^M}{\partial p_1} \tag{10-21}$$

在利润最大化和有约束的成本最小化模型中，可以推导出的逆函数关系是 $\partial x_i^* / \partial p_j = \partial x_j^* / \partial p_i$。因为在效用最大化模型中，选择方程并不是间接目标函数的一阶偏导函数，因此逆函数表现出更加复杂的形式。但是我们在等式(10-21)中不难发现，如果 $\partial \lambda^* / \partial p_i = 0$，那么 $\partial x_i^M / \partial p_j = \partial x_j^M / \partial p_i$。该条件所隐含的效用函数也是类似的，也就是说，收入弹性都等于 1。我们会在这章的最后再来讨论这个问题。

另一个逆函数关系反映消费者对于收入变化做出的反应。因为 $U_M^* = \lambda^M$，所以，$U_{Mp_i}^* = \partial \lambda^M / \partial p_i$。尽管如此，还是有以下等式，即 $U_{Mp_i}^* = (-\lambda^M x_i^M)/M = -[x_i^M (\partial \lambda^M / \partial M) + \lambda^M (\partial x_i^M / \partial M)]$。根据 Young 定理，可以得到：

$$\frac{\partial \lambda^M}{\partial p_i} = -x_i^M \frac{\partial \lambda^M}{\partial M} - \lambda^M \frac{\partial x_i^M}{\partial M} \tag{10-22}$$

这个表达式在分析消费者剩余中，我们已经用过。

例　假如一个效用函数是 $U = x_1 x_2$，并且假设该效用函数的最初形状是直角双曲线 $x_1 x_2 = U^0 =$ 固定值。那么和这个效用函数相关的货币收入曲线是什么样的呢？这个问题的拉格朗日函数是：

$$\mathcal{L} = x_1 x_2 + \lambda(M - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

一阶条件是：

$$\mathcal{L}_1 = x_2 - \lambda p_1 = 0$$
$$\mathcal{L}_2 = x_1 - \lambda p_2 = 0$$
$$\mathcal{L}_\lambda = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

对这些一阶条件方程式组成的联立方程组求解，就可以得到需求曲线。在作这项工作以前，我们先来检验二阶行列式。因为 $U_{11}=U_{22}=0$，$U_{12}=U_{21}=1$，所以可以得到：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -p_1 \\ 1 & 0 & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}=2p_1p_2>0$$

可见，当假设两种商品的价格都为正的时候，最大化问题的二阶条件是满足的。

现在我们回到一阶条件上，对于一阶条件的前两个等式进行变换可以消去 λ：$x_1=\lambda p_2$，$x_2=\lambda p_1$。两个式子相除可以得到 $x_1/x_2=p_2/p_1$，或者 $x_2p_2=x_1p_1$。这个等式说明花在 x_1 上面的总支出 x_1p_1 总是等于花在 x_2 上面的总支出 x_2p_2。因此我们可以得出结论，该需求曲线具有单位弹性。（为什么呢？）

等式 $x_2p_2=x_1p_1$ 是直接从切线条件 $U_1/U_2=p_1/p_2$，而不是从预算约束条件中推导出来的，因此，这个等式对于所有可能的收入水平都成立。这个等式是所有无差异曲线斜率等于 $-p_1/p_2$ 的点 (x_1,x_2) 的集合。因此，$x_2p_2=x_1p_1$ 就代表了所谓的收入消费路径，（图 10-5）表示这条收入消费路径。收入消费路径是所谓的恩格尔曲线的一种，它说明了在价格保持不变的情况下，一个消费者是如果对收入做出反应的。上述这个等式又可以变换成 $x_2=(p_1/p_2)x_1$，从中我们不难发现收入消费路径是条直线，或者是一条从原点出发的射线。（很显然，原点(0,0)满足这个等式，而且 x_2 是 x_1 的线性函数。）这条线的斜率是 p_1/p_2，因为收入消费路径是条直线，根据相似三角形的性质，可以得出，对于一定的货币收入 M 的增加比率，会导致两种商品消费以相同的比率增加（参考图 10-6）。因此我们希望从这个效用函数 $U=x_1x_2$ 推导出来的需求曲线具有单位收入弹性和单位价格弹性。为了推导需求曲线，我们必须引入预算约束条件。切线条件 $U_1/U_2=p_1/p_2$ 和预算约束条件 p_1x_1+

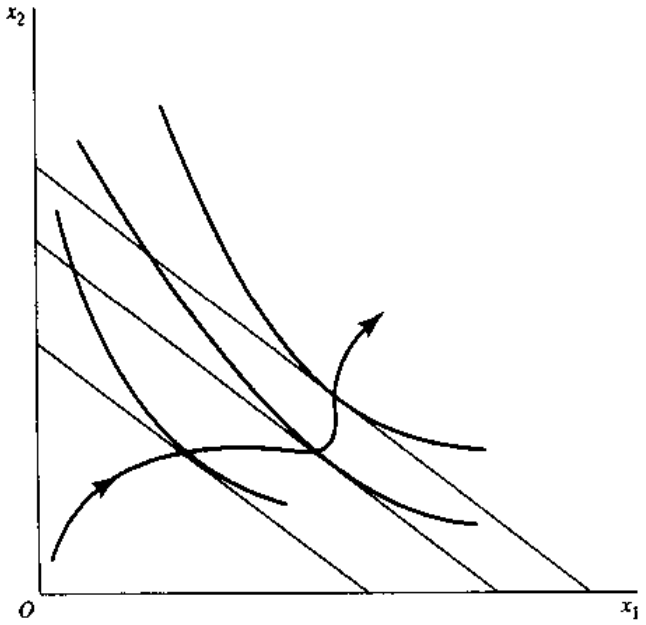

图 10-5 收入消费路径。收入消费路径是无差异曲线对对不同的预算约束的切点所组成的轨迹。也就是说，它是点 (x_1,x_2) 的集合，这些点满足 $U_1/U_2=p_1/p_2$ 的条件，并且无差异曲线的斜率等于预算线约束条件的斜率。该等式与货币收入 M 相独立。因此它代表了在所对应的 M 值下效用最大化问题的一阶等式，当 M 增加，隐含的消费集会沿着曲线箭头所指的方向移动，到达对应于新的 M 值下更高的无差异水平。

$p_2 x_2 = M$ 构成一个联立方程，对此求解，就可以得出需求曲线。因为上面已经给出了 $x_2 p_2 = x_1 p_1$，把这个等式代入预算等式中，得出 $p_1 x_1 + p_1 x_1 = M$，或者说两倍的 $p_1 x_1$ 等于 M。因此可以得到对于 x_1 的需求曲线，即 $x_1^M = M/2p_1$。用同样的方法可以得到 x_2 的需求曲线，即 $x_2^M = M/2p_2$。

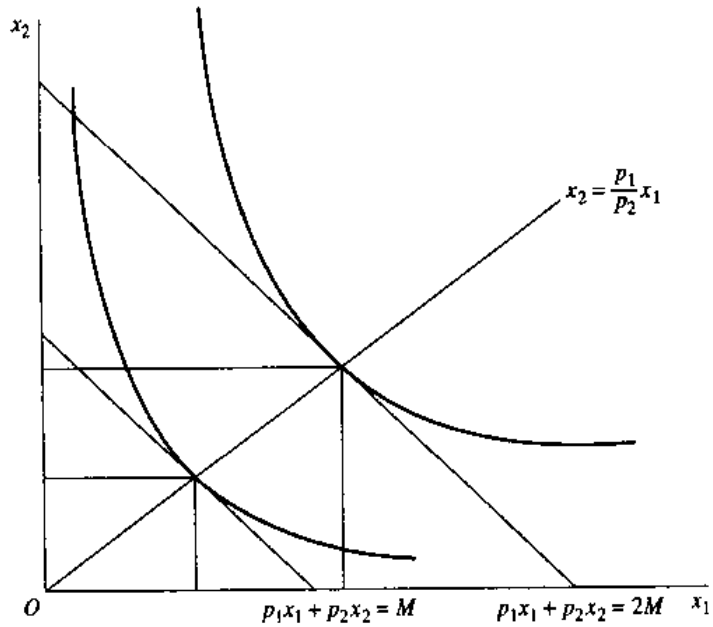

图 10-6　效用函数 $U = x_1 x_2$ 的收入消费路径。收入消费路径就是切线条件 $U_1/p_1 = U_2/p_2$ 的解。对于效用函数 $U = x_1 x_2$ 而言，$U_1 = x_2$，$U_2 = x_1$，那么收入消费路径是 $x_2/x_1 = p_1/p_2$，或者说 $x_2 = (p_1/p_2)x_1$。用几何图形表示，就是一条从原点出发的直线。两倍的 M，会使预算约束曲线移到与上面那条预算曲线到原点距离的两倍的位置。对于效用函数而言，这意味着，消费者对 x_2 和 x_1 的消费将增加 1 倍。因此，我们发现对于这一效用函数而言，需求曲线具有单位收入弹性。

现在让我们来检验 λ^M 的包络结果和罗伊恒等式。间接效用函数是 $U^*(p_1, p_2, M) = x_1^M x_2^M = (M/2p_1)(M/2p_2) = M^2/4p_1 p_2$。该等式对于 M 求偏导，我们发现预期的结果，即 $\lambda^M = \partial U^*/\partial M = M/2p_1 p_2$ 和：

$$\frac{\partial U^*/\partial p_1}{\partial U^*/\partial M} = \frac{-M^2/(4p_1^2 p_2)}{M/(2p_1 p_2)} = \frac{-M}{2p_1} = -x_1^M$$

现在让我们再来检验这些需求曲线的性质。首先我们发现 $\partial x_1^M/\partial p_1 = -M/2p_1^2 < 0$，$\partial x_2^M/\partial p_2 = -M/2p_2^2 < 0$。并且我们发现需求曲线是向下倾斜。其次我们发现交叉效应等于 0，这是因为 x_1^M 不是 p_2 的函数，而且 x_2^M 不是 p_1 的函数，即 $\partial x_1^M/\partial p_2 = \partial x_2^M/\partial p_1 = 0$。这对于货币需求曲线而言，是一个不同寻常的性质。一般 $\partial x_i^M/\partial p_j \neq \partial x_j^M/\partial p_i \neq 0$，$i \neq j$。

每一条需求曲线的价格弹性是：

$$e_i = \frac{p_i}{x_i^M}\frac{\partial x_i^M}{\partial p_i}$$

因此，可以得出以下结果，即 $x_1^M = M/2p_1$，$\partial x_1^M/\partial p_1 = -M/2p_1^2$，和：

$$\epsilon_{11} = \frac{p_1}{x_1^M}\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} = \frac{2p_1^2}{M}\frac{-M}{2p_1^2} = -1$$

对于 ϵ_{22} 而言，也有类似的结果。正如前面所显示的，需求的价格弹性确实对于 -1，这是因为对于所有价格水平而言，总支出 p_1x_1 和 p_2x_2 都是相同的。

我们来看收入弹性：

$$\epsilon_{1M} = \frac{M}{x_1^M}\frac{\partial x_1^M}{\partial M}$$

这里 $\partial x_1^M/\partial M = 1/2p_1$，$M/x_1^M = M/(M/2p_1) = 2p_1$。因此，正如根据收入—消费路径的线性，我们估计得到 $\epsilon_{1M} = 1$。用类似的代数方法，我们可以证明 $\epsilon_{2M} = 1$。

10.3 效用最大化模型与成本最小化之间的关系

在第 8 章，我们研究这样的问题：

最小化

$$C = w_1x_1 + w_2x_2$$

满足约束

$$f(x_1, x_2) = \bar{y}^0$$

其中，$y = f(x_1, x_2)$ 指的是成本函数，w_1 和 w_2 指的是要素价格。现在，我们来研究与上面这个问题，在数学上具有相同形式的问题，即给定的效用水平 U^0 的前提下，使成本或者支出最小。其数学表达形式是：

最小化

$$M = p_1x_1 + p_2x_2$$

满足约束

$$U(x_1, x_2) = U^0 \tag{10-23}$$

这里，p_1 和 p_2 分别是两种消费品 x_1 和 x_2 的价格，$U = U(x_1, x_2)$ 是效用函数。第 8 章的所有分析主要应用于成本最小化问题。上面两个问题数学结构是一样的，惟一的差别是变量的解释和定义不同。

我们可以通过让问题(10-23)的拉格朗日函数的偏导等于 0 来求出该问题的一阶条件。其过程如下：

$$\mathcal{L} = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(U^0 - U(x_1, x_2))$$

$$\mathcal{L}_1 = p_1 - \lambda U_1 = 0 \tag{10-24a}$$

$$\mathcal{L}_2 = p_2 - \lambda U_2 = 0 \tag{10-24b}$$

$$\mathcal{L}_\lambda = U^0 - U(x_1, x_2) = 0 \tag{10-24c}$$

有约束条件下最小化问题的充分的二阶条件是：

$$H=\begin{vmatrix} -\lambda U_{11} & -\lambda U_{12} & -U_1 \\ -\lambda U_{21} & -\lambda U_{22} & -U_2 \\ -U_1 & -U_2 & 0 \end{vmatrix}<0 \tag{10-25}$$

假设(10-24)式和(10-25)式都成立，通过对一阶条件方程组(10-24)求解，可以得到如下选择函数：

$$x_1=x_1^U(p_1,p_2,U^0) \tag{10-26a}$$

$$x_2=x_2^U(p_1,p_2,U^0) \tag{10-26b}$$

$$\lambda=\lambda^U(p_1,p_2,U^0) \tag{10-26c}$$

我们把需求曲线(10-9)，即 $x_i=x_i^M(p_1,p_2,M)$ 称作“货币收入固定”下的需求函数，但是把需求曲线(10-26) $x_i=x_i^U(p_1,p_2,U^0)$ 称作“真实收入保持不变”，或者“收入补偿”需求曲线。后面一种需求曲线假设效用或者“真实”收入保持不变。在数学形式上，它们与前一章所讲的“产出保持不变”前提下的要素需求函数是一样的。需求函数 $x_i^U(p_1,p_2,U^0)$ 又被称为希克斯需求函数，这是为了纪念英国诺贝尔经济学奖获得者，著名的经济学家希克斯。希克斯需求函数对于价格求偏导，可以得到纯替代效应，这是因为效用保持不变，也就是说，消费者还停留在原来的效用水平上。把希克斯需求函数代入目标函数中，可以得出支出函数：$M^*(p_1,p_2,U^0)=p_1x_1^U(p_1,p_2,U^0)+p_2x_2^U(p_1,p_2,U^0)$，支出函数表明在价格 p_2 和 p_1 的前提下，消费者为了获得 U^0 的效用水平，而必须支付的最少支出。

从成本最小化问题可以推导出来需求曲线(10-26)，即 $x_i=x_i^U(p_1,p_2,U^0)$，其中 $i=1,2$。从效用最大化问题中可以推导出需求曲线(10-9)，即 $x_i=x_i^U(p_1,p_2,M)$。那么这两个需求曲线之间有什么联系呢？现在，让我们来研究一阶条件(10-24a)和(10-24b)，消去 λ 得到 $p_1/p_2=U_1/U_2$。这个切线条件和从效用最大化问题中推导出的切线条件是一样的。在这两个问题中，预算线必须和无差异曲线相切。事实上，从(图 10-7)中可以发现，在效用最大化问题中，给定价格和货币收入 M，我们就可以求出最大效用水平 U^*。比如说某一消费者在 A 点效用最大，他将分别消费 x_1^* 和 x_2^* 单位的两种商品。

假设现在无差异水平 U^* 事先给定，也就是说 $U^*=U^0$，并且在同样的价格前提下，消费者的目标是通过最小的成本来得到 $U^*=U^0$ 的效用水平。那么很显然，消费者最终也会选择 A 点，即消费 (x_1^*,x_2^*) 的商品。但是两个问题的比较静态分析却不一样，这是因为在两个问题分析的过程中，假定不同的变量保持不变，因此消费者对价格变化的调整也是不同的。根据(图 10-8)，对于 $x_i=x_i^M(p_1,p_2,M)$ 而言，假如 p_1 下降，预算线 MM' 顺着 x_1 轴移动到 MM，新的预算线在 x_1 轴上具有更高的截距，如(图 10-8a)所示。这导致了消费者实际得到的效用水平的增加，从 U^* 上升到 U^{**}。但是正如(图 10-8b)所示，对于成本最小化问题而言，如果 p_1 下降，由于效用水平 U 是个参变量，因而保持 U^0 水平上，结果消费者最小预算 M^* 下降，从 M^* 下降到 M^{**}，同时切点从 A 移到 A''。

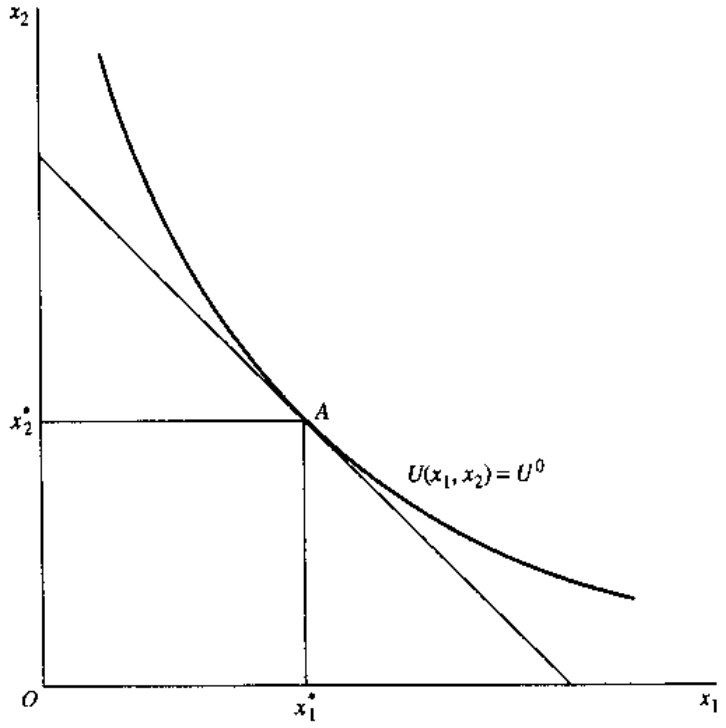

图 10-7 成本最小化和效用最大化的切点解。如果 $U(x_1, x_2)$ 在前提 $M = p_1 x_1 + p_2 x_2$ 下得到最大化，那么在 A 点可以某个水平的效用 U^*。如果现在 U^* 等于 U^0，并且消费者在取得 $U^* = U^0$ 时成本最小，那么又会在 A 点出现这种情况。但是，这两个问题的比较静态分析是不一样的，这是由于这两个问题的参变量是不同的。（见图 10-8a 和 10-8b）

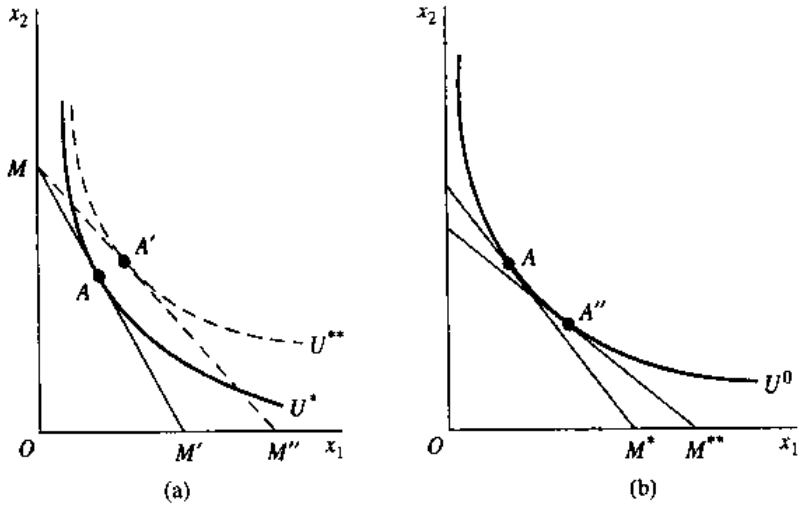

图 10-8 效用最大化与成本最小化。成本最小化问题和效用最大化问题的比较静态分析的差异在于，当价格发生变化时，两种问题中保持不变的变量是不同的。当 p_1 改变时，比如说 p_1 减小，在效用最大化问题中（图 10-8a），为了保证货币收入 M 不变，水平截距项 M/p_1 向右移动。于是，在一个更高的效用水平上出现一个新的切点 A。在成本最小化问题中（图 10-8b），当价格下降时，效用水平仍然保持在 U^0 水平，而不发生变化，因此切点沿着曲线 $U(x_1, x_2) = U^0$ 移动到 A，在该点上，消费者得到一个更低的支出水平 M^{**}。

最后，我们可以从等式(10-7a)和(10-7b)得出：

$$\lambda^M=\frac{U_1}{p_1}=\frac{U_2}{p_2}$$

但是，从等式(10-24a)和(10-24b)可以得出：

$$\lambda^U=\frac{p_1}{U_1}=\frac{p_2}{U_2}$$

因此，对于 U^* 和 M^* 而言，任何切点都满足：

$$\lambda^M=\frac{1}{\lambda^U} \tag{10-27}$$

在生产理论中，λ^U 是产出的边际成本，但是，在对效用进行分析的过程中，它指的是不可观测的效用边际成本。它是 λ^M 的倒数，λ^M 是指货币收入的边际效用。

尽管这样，学生也应注意不能简单地忽视 $\partial M^*/\partial U^0=1/(\partial U^*/\partial M)$。这个倒数关系中的相关的部分不能被随意颠倒，因为 $\partial M^*/\partial U^0$ 和 $\partial U^*/\partial M$ 指的是两个不同的问题。这个简单的等式(10-27)包含着某些让人好奇的内容。

对于消费者理论最基本的贡献是斯拉斯基等式(这个等式是斯拉斯基于 1915 年发现的)，它把货币收入保持不变和真实收入或效用保持不变这两个前提下，消费对于价格的变化率相互联系起来。也就是说，这个关系式给出了 $\partial x_i^M/\partial p_j$ 和 $\partial x_j^M/\partial p_i$ 之间的联系。我们将在下两个部分对这一关系式进行推导。

我们还必须对于效用最大化问题和成本最小化相同的二阶条件进行检验。事实上，从(图 10-7)我们可以看出这一点。很明显，在所有效用水平上，两个问题有解都要求无差异曲线凸向原点。因此我们能够证明，当且仅当等式(10-25)的 H 为负时，等式(10-8)给出的行列式 D 是正的。事实上，我们可以证明 $H=-\lambda^M D$，并且把这一证明留作习题。根据非饱和性假设，当且仅当 $D>0$ 时，$\lambda^M>0$ 而且 $H<0$。对于成本最小化问题和效用最大化问题而言，效用函数都必须是拟凹的。

让我们来回忆一下成本最小化问题的比较静态分析。正如第 8 章所讲的，把一阶条件(10-24)对于 p_1 求导可以得出比较静态等式：

$$\begin{bmatrix}-\lambda U_{11} & -\lambda U_{12} & -U_1\\ -\lambda U_{21} & -\lambda U_{22} & -U_2\\ -U_1 & -U_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x_1^U}{\partial p_1}\\ \dfrac{\partial x_2^U}{\partial p_1}\\ \dfrac{\partial \lambda^U}{\partial p_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

把一阶条件对于 p_2 求导，可以得出另一组比较静态等式，与上面等式的区别就在于将等号右边矩阵中的 -1 用 2 来代替。从中我们发现：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial p_j}=\frac{-H_{ij}}{H}$$

H 和 D 很明显地反映出 $H_{ij}=(\lambda^M)^2 D_{ij}$，因此可以得到：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial p_j}=\frac{-H_{ji}}{H}=\frac{\lambda^M D_{ji}}{D} \tag{10-28}$$

最后，$\partial x_i^U/\partial p_i<0 \quad i\neq j$，但是 $\partial x_i^U/\partial p_j\gtrless 0$。（除了在两个变量的例子里）

10.4 效用最大化模型的比较静态分析与斯拉斯基等式的传统推导方式

很明显，从效用最大化模型的结构来看，我们不能单从最大化假设中推导出可被驳倒的假设。所有的参变量都出现在约束条件中。正如第 6 章和第 7 章的一般分析所揭示的那样，对于任何模型来说，我们不能从中找出关于所有出现在约束条件中参变量的可以被检验的隐含意义。

我们对于这个模型的兴趣来自斯拉斯基在 1915 年的分析，该分析由希克斯在 1937 年又加以扩展。在这套分析中，价格变化对于消费者的影响在理论上分成两个独立的影响。一个是纯替代效应，在该效应中“真实”的收入（希克斯称之为效用）保持不变；另一个是纯收入效应，在这里价格保持不变，并且预算线平行的移动到最终的最大化效用水平上。正如我们将要证明的，尽管收入效应的符号是不确定的，但是，从支出最小化模型中推导出来的纯替代效应的符号却总是负的。

我们可以用图形来演示这一分析过程，假如一个消费者他的效用如（图 10-9）中无差异曲线所示，他最初面临的预算约束条件是 MM，并且在 A 点获得最大效用，即消费 x_1^0 单位的 x_1 商品。假设 p_1 下降，预算线将向右旋转，产生一个新的效用最大化点，即 B 点。消费者对 x_1 消费的总变化量是 $x_1^M-x_1^0$。但是，消费的总变化量分为两部分：$x_1^M-x_1^0=(x_1^U-x_1^0)+(x_1^M-x_1^U)$。第一项 $x_1^U-x_1^0$ 是指效用保持不变的情况下，x_1 消费的变化量。切点 C 出现在新的更低的价格水平 p_1 上，但是，在更低的预算水平 $M'M''$ 上。所以，点 C 是和的集合，这两点表示在新的价格水平（如 p_1 下），消费者达到原来的效用水平所付出的最小成本。$x_1^U-x_1^0$ 是纯替代效应，可以通过成本最小化模型中推导出来。

在预算线从 $M'M''$ 行移动到 MM' 的过程中，产生了总消费量变化的剩余部分，即 $x_1^M-x_1^U$。由于这一过程中价格保持不变，因此这就是纯收入效应。

上述用图示进行分析的方法，尽管对于理解本模型有帮助，但是并不是严格意义上的比较静态分析。比较静态关系式反应的是决策变量对于参变量变化的瞬间的变化率。它们是某一特定点上的偏导方程。尽管我们目前可以通过一种更有效的技巧，即使用现代对偶理论来推导出主要结果。但是这里我们仍将采用传统的效用最大化模型的分析方法来进行推导。不过，对于各类非标准模型，传统的分析方法依然占有很重要的地位。因此，我们在这里继续采用这种传统的分析方法。

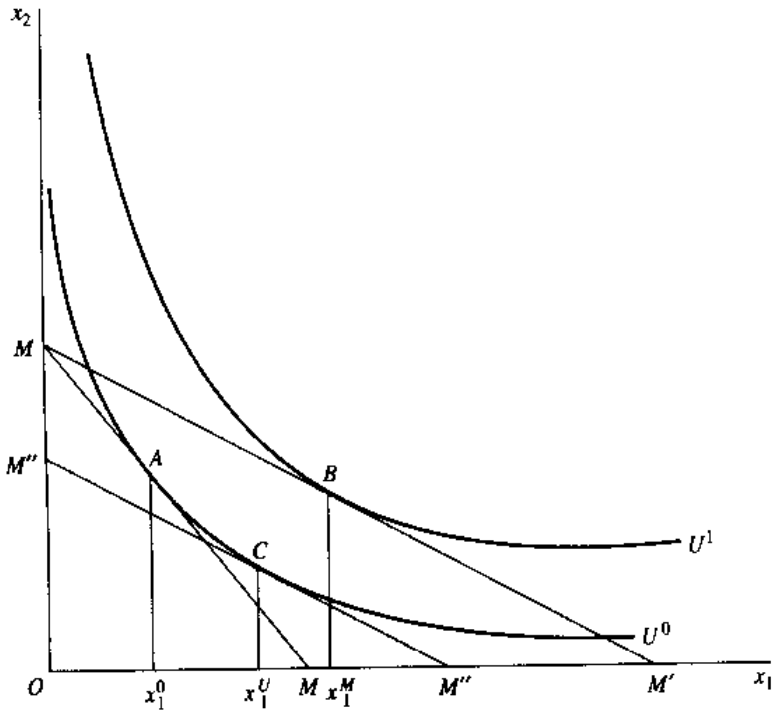

图 10-9　价格变化的替代效应和收入效应。本图是指对于价格 p_1 发生有限的变化时，消费量 x_1 的变化情况。因此，它与斯拉斯基等式不直接兼容，因为后者主要处理瞬时变化率。但是，从上图中，我们可以很容易看出价格变化所导致的收入效应和替代效应。初始点在预算线 MM 上的一点 A，当价格下降，水平上的截距增加，预算线移动到 MM'，得到一个新的切点 B。x_1 消费量的总变化是 $x_1^M - x_1^0$。这个数量可以部分归因于 $x_1^U - x_1^0$，通过让预算线沿着无差异曲线 U^0 移动，直到与预算线 MM' 平行，这反映了新的价格水平。因为效用是固定的，所以这是一个纯替代效应。x_1 总变化量中剩下的部分，$x_1^M - x_1^U$，可以归因于预算约束线从 $M'M''$ 到 MM' 的平行移动。因为价格彼此不便，所以是纯收入效应。

效用最大化问题的一阶条件等式是：

$$\begin{aligned} U_1(x_1^M, x_2^M) - \lambda^M p_1 &\equiv 0 \\ U_2(x_1^M, x_2^M) - \lambda^M p_2 &\equiv 0 \\ M - p_1 x_1^M - p_2 x_2^M &\equiv 0 \end{aligned} \tag{10-7}$$

首先，在价格保持不变的前提下，当货币收入 M 发生变化时，消费者会怎样反应呢？把上述等式对 M 求导，由于 M 只出现在第三个恒等式中，因此可以得到下列方程组：

$$U_{11}\frac{\partial x_1^M}{\partial M} + U_{12}\frac{\partial x_2^M}{\partial M} - p_1\frac{\partial \lambda^M}{\partial M} \equiv 0 \tag{10-29a}$$

$$U_{21}\frac{\partial x_1^M}{\partial M} + U_{22}\frac{\partial x_2^M}{\partial M} - p_2\frac{\partial \lambda^M}{\partial M} \equiv 0 \tag{10-29b}$$

$$1 - p_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M} - p_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M} \equiv 0 \tag{10-29c}$$

上述方程组用矩阵形式可以表示为：

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^M}{\partial M} \\ \frac{\partial x_2^M}{\partial M} \\ \frac{\partial \lambda^M}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{10-30}$$

可见，该方程组的系数矩阵是拉格朗日函数 $\mathcal{L}=U+\lambda(M-p_1x_1-p_2x_2)$ 的二阶偏导组成的矩阵，而该方程组的右边系数矩阵是由一阶条件对于参变量 M 求得的一阶偏导等式的第一部分的负数组成。根据克莱姆(Cramer)法则，解出：

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial M}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & U_{12} & -p_1 \\ 0 & U_{22} & -p_2 \\ -1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{D}=\frac{-D_{31}}{D} \tag{10-31a}$$

用类似的方程可以解出：

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial M}=\frac{-D_{32}}{D} \tag{10-31b}$$

$$\frac{\partial \lambda^M}{\partial M}=\frac{-D_{33}}{D} \tag{10-31c}$$

不过，我们都不能决定上面三个等式的符号。尽管，根据二阶充分条件。可以知道分母 D 是正的，但是：

$$D_{31}=-p_2U_{12}+p_1U_{22}\gtrless 0$$

类似的：

$$D_{32}=p_2U_{11}-p_1U_{21}\gtrless 0$$

以及

$$D_{33}=U_{11}U_{22}-U_{12}^2\gtrless 0$$

这是由于 D_{33} 并不是加边保留主子矩阵。

可见，等式(10-31a)和(10-31b)说明，无差异曲线的凸性并不足以排除出现劣等品的少能性，这并不是什么令人惊讶的事情。也就是说，正如图 10-10 所示，完全可能出现 $x_1^M/M<0$ 或者 $x_2^M/M<0$ 的情况。但是，绝对不可能出现 x_1 和 x_2 同时是劣等品的情况。如果出现这种情况就意味着消费者随着收入增加反而减少 x_1 和 x_2 商品的购买，这和"多总比少好"的假设相矛盾。比较静态分析系统中的第三个等式，即等式(10-29c)，说明 $p_1x_1^M/M+p_2x_2^M/M=1>0$。由于价格 p_1 和 p_2 都为正，因此不可能同时出现 $x_1^M/M<0$ 和 $x_2^M/M<0$ 这种情况。此外，劣等必然是一个局部概念。商品不可能在整个消费过程中都是劣等的，否则消费者就不会一开始就消费正的数量的这些商品。

现在，让我们用一阶条件等式(10-7)来对价格，尤其是对 p_1 求导。这样做可以求出当其他商品价格和货币收入保持不变的前提下，一种商品价格发生变化时消费者对于各种商

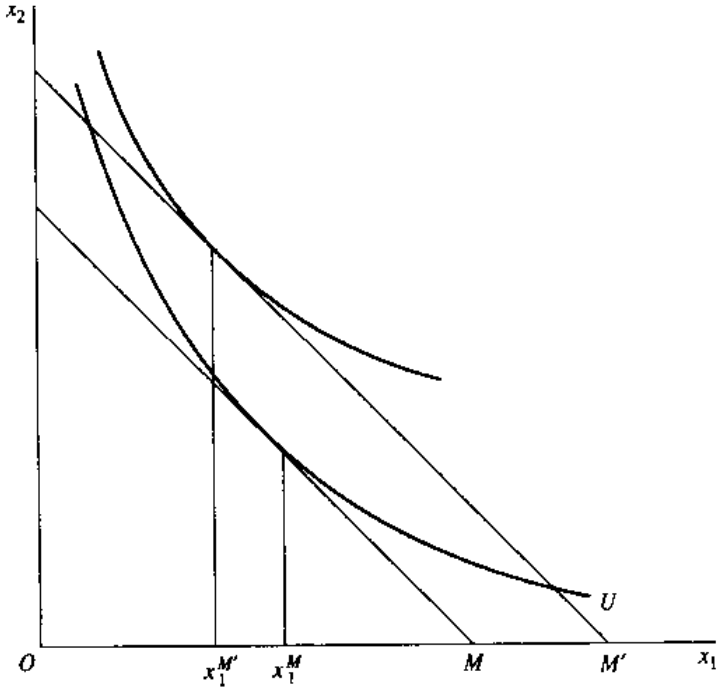

图 10-10　无差异曲线的凸性允许劣等品。所谓劣等品指的是，当货币收入从 M 上升到 M'，对于该商品如 x_1 的消费反而减少。劣等品常用的例子是汉堡牛肉饼。当收入增加，如学生大学毕业后就职，汉堡牛肉饼就会被牛排所代替。但是，劣等是个"局部"概念。商品不可能在整个消费过程中总是处于劣等品的位置，否则消费者就不会一开始消费正的数量的这种商品。

品的消费量的变化率。根据这种方法，得到：

$$U_{11}\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}+U_{12}\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1}-p_1\frac{\partial \lambda^M}{\partial p_1}-\lambda^M\equiv 0 \tag{10-32a}$$

$$U_{21}\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}+U_{22}\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1}-p_2\frac{\partial \lambda^M}{\partial p_1}\equiv 0 \tag{10-32b}$$

$$-p_1\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}-x_1^M-p_2\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1}\equiv 0 \tag{10-32c}$$

在这一过程中，在 $-\lambda^M p_1$ 和 $-p_1 x_1^M$ 对 p_1 求偏导时，我们用了乘法法则。上述方程组用矩阵表示，可以写成：

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^M}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial x_2^M}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial \lambda^M}{\partial p_1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda^M \\ 0 \\ x_1^M \end{pmatrix}$$

很明显，我们不能从这个模型中进一步推出任何比较静态性质的结果。也就是说，效用

最大化模型中并没有隐含 x_i^M/p_1 或 $\partial\lambda^M/p_1$ 的符号，这是因为在上列方程组的右侧列向量中含有两个非零项。这意味着我们必须知道 D 中一个给定列向量中的两个余因子的符号的知识，因为只有一个可能是边保留主子矩阵（它的符号是已知的），至少有一个不是对角线上的余因子，因此我们不能单独依靠效用最大化假设来推导出这些余因子的符号和大小。

根据克莱姆法则解得：

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}=\frac{\begin{vmatrix}\lambda^M & U_{12} & -p_1\\ 0 & U_{22} & -p_2\\ x_1^M & -p_2 & 0\end{vmatrix}}{D}=\frac{\lambda^M D_{11}}{D}+\frac{x_1^M D_{31}}{D} \tag{10-33a}$$

类似的，分别把 $(\lambda^M,0,x_1^M)$ 放到分子中的第二列和第三列，解得：

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1}=\frac{\lambda^M D_{12}}{D}+\frac{x_1^M D_{32}}{D} \tag{10-33b}$$

$$\frac{\partial \lambda^M}{\partial p_1}=\frac{\lambda^M D_{13}}{D}+\frac{x_1^M D_{33}}{D} \tag{10-33c}$$

行列式 D_{11} 是边保留主子矩阵，因此根据二阶条件，它是负数。事实上 $D_{11}=-p_2^2<0$。行列式 D_{33} 是个三角矩阵行列式，但是它不是边保留主子矩阵，因此其符号不能确定。

正如我们所预计的那样，效用最大化模型中并没有隐含 $\partial x_i^M/\partial p_j$ 或 $\partial x_i^U/\partial p_j\ (i\neq j)$ 的符号。如果一种商品价格上升会导致另一种商品的需求增加，我们把这两种商品定义为替代品；如果一种商品价格上升会导致另一种商品的需求减少，我们把这两种商品定义会互补品。例如，汽油的价格上升会导致消费者减少汽车的需求（一种互补品），但是会增加煤的需求（一种替代品）。在定义替代品和互补品的过程中，我们可以引入或不引入收入效应。也就是说，我们可以用马歇尔需求曲线或希克斯需求曲线来定义替代品和互补品。如果引入收入效应，我们把商品之间的关系定义为总体替代品或总体互补品；如果不引入收入效应，我们把商品之间的关系定义为净替代品或净互补品。这样，$\partial x_i^M/\partial p_j>0$ 意味着 x_i 和 x_j 是总体替代品；$\partial x_i^U/\partial p_j<0$ 意味着 x_i 和 x_j 是净互补品。在只有两种商品的情况下，这两种商品的关系一定是替代品。除此之外，无差异曲线的凸性（也就是说，效用函数是严格递增拟凹函数）既允许替代品也允许互补品，并且在上述两种定义上都成立。

我们对于等式(10-33a)和(10-33b)的兴趣来自于我们对于上述这些表达式中单个术语的解释。根据等式(10-28)，我们不难发现，事实上等式(10-33a)和(10-33b)右边第一项就是价格变化所引起的纯替代效应，这种纯替代效应是从成本最小化模型中推导出来的。现在，我们再来考查等式(10-31a)和(10-31b)，这些等式与收入效应相关。这两个等式分别是等式(10-33a)和(10-33b)右边第二项乘以 $-x_1^M$。因此，等式(10-33a)和等式(10-33b)可以写成：

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^U}{\partial p_1}-x_1^M\frac{\partial x_1^M}{\partial M} \tag{10-34a}$$

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1}=\frac{\partial x_2^U}{\partial p_1}-x_1^M\frac{\partial x_2^M}{\partial M} \tag{10-34b}$$

上述两等式就是所谓的斯拉斯基等式(Slutsky equation)，表示在货币收入固定不变的条件下需求曲线对于价格变化做出的反应。如果 p_2 发生变化，也可以得到类似的等式：

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial p_2}=\frac{\partial x_1^U}{\partial p_2}-x_2^M\frac{\partial x_1^M}{\partial M} \tag{10-34c}$$

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial p_2}=\frac{\partial x_2^U}{\partial p_2}-x_2^M\frac{\partial x_2^M}{\partial M} \tag{10-34d}$$

我们把以上两等式的推导留作习题，供学生练习。

更一般的情况，即在 n 种商品的情况下，我们可以得出一般性的结果：

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^U}{\partial p_j}-x_j^M\frac{\partial x_i^M}{\partial M}\quad i,j=1,\cdots,n \tag{10-34e}$$

斯拉斯基等式表明，一个追求效用最大化的消费者对于价格变化做出的反应，在理论上可以分成两部分：首先是纯替代效应，即消费者保持原有的效用水平条件下对于价格变化做出的反应；其次是纯收入效应，即在价格保持不变的前提下，消费者通过变化收入使得能使预算线在新的效用曲线上达到切点。

10.5　斯拉斯基等式的现代推导方法

在上一节中，我们用传统的比较静态分析方法来推导斯拉斯基等式。这种方法显然有些冗长乏味，但是这是我们正确推导斯拉斯基等式所必须的。不过，用现代对偶分析方法来推导显然是一条捷径，而且这种新方法比传统的方法更具有解释性。

我们首先从货币收入需求曲线 $x_1=x_1^M(p_1,p_2,M)$ 开始。根据罗伊恒等式，在 p_2 和 M 保持不变的前提下，当 p_1 发生变化，会导致效用发生变化，$\partial U^*/\partial p_1=-\lambda^M x_1^M<0$。(例如，当 p_1 下降，可供消费的机会集扩大，因此消费者得到的效用增加。)现在假设 p_1 发生变化，并且 M 变化到维持原有效用水平所需要的最低货币收入水平上。也就是说，我们可以定义一个函数 $M=M^*(p_1,p_2,U^0)$，其中 M^* 表示当 p_1(或任何其他商品价格)发生变化的条件下，为了使效用保持不变，即使 $U=U^0$ 而需要的最低的货币收入量。这样，通过定义可知，如果 $x_1^U(p_1,p_2,U^0)$ 是效用保持不变条件下的需求曲线，那么：

$$x_1^U(p_1,p_2,U^0)\equiv x_1^M(p_1,p_2,M^*(p_1,p_2,U^0)) \tag{10-35}$$

这是一个恒等式，根据这个恒等式可以定义 $x_1^U(p_1,p_2,U^0)$。把上述恒等式两边对于 p_1 求导，并且在恒等式右边用连续求导法则，可以得到：

$$\frac{\partial x_1^U}{\partial p_1}\equiv\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}+\frac{\partial x_1^M}{\partial M}\frac{\partial M^*}{\partial p_1}$$

那么，$\partial M^*/\partial p_1$ 意味着什么呢？函数 $M^*(p_1,p_2,U^0)$ 是指在给定的价格水平下为了获得 U^0 的效用水平得以必需的最小成本或最小支出。因此，M^* 是从成本最小化问题中推导出来的(间接)成本或支出函数。成本最小化问题就是：

最小化

$$M=p_1x_1+p_2x_2$$

使满足

$$U^0-U(x_1,x_2)=0$$

该问题的拉格朗日函数 $\mathcal{L}=p_1x_1+p_2x_2-\lambda(U^0-U(x_1,x_2))$，根据包络定理可知：

$$\frac{\partial M^*}{\partial p_1}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_1}=x_1^U=x_1^M$$

上述等式在任一给定的点上都成立。把该式代入本节中出现的第二个等式，得出：

$$\frac{\partial x_1^U}{\partial p_1}\equiv\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}+x_1^M\frac{\partial x_1^M}{\partial M}$$

这就是斯拉斯基等式，即等式(10-34a)。这里需要注意的是，$\partial x_1^U/\partial p_1$ 只单独出现在等式的左边。

对于这个问题的证明也是非常的一般化的。对于 n 种商品而言，有：

$$x_i^U(p_1,\cdots,p_n,U^0)\equiv x_i^M(p_1,\cdots,p_n,M^*(p_1,\cdots,p_n,U^0))$$

其中 $M^*(p_1,\cdots,p_n,U^0)$ 指的是在给定价格水平前提下，消费者要获得 U^0 效用水平所必需的最小成本。在成本最小化问题中，根据包络定理可以得到：$\partial M^*/\partial p_j=x_j^U=x_j^M$。该等式在任一给定的点上都成立。因此：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial p_j}\equiv\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i^M}{\partial M}\frac{\partial M^*}{\partial p_j}$$

$$\equiv\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}+x_j^M\frac{\partial x_i^M}{\partial M}$$

此外，我们可以从补偿需求曲线 $x_i^U(p_1,\cdots,p_n,U^0)$ 入手，用补偿需求曲线来推导出非补偿需求曲线 $x_i^M(p_1,\cdots,p_n,M)$。用这种方法，我们也可以推导出斯拉斯基等式。尤其是，当某一商品价格 p_j 发生变化，引起 U^0 发生变化，并使效用水平调整到货币收入保持不变前提下最大效用水平。也就是说，我们把函数 $U^0=U^*(p_1,\cdots,p_n,M)$ 定义为消费者在给定价格水平和预算约束 M 的前提下所能够获得的最高效用水平。因此，U^* 也就是从效用最大化问题中推导出来的间接效用函数。效用最大化问题是：最大化 $U(x_1,\cdots,x_n)$，使满足 $\sum p_ix_i=M$。其拉格朗日函数是 $\mathcal{L}=U(x_1,\cdots,x_n)+\lambda(M-\sum p_ix_i)$。根据包络定理，可知：$\partial U^*/\partial p_j=\partial\mathcal{L}/\partial p_j=-\lambda^Mx_j^M$。

根据定义，我们知道：

$$x_i^M(p_1,\cdots,p_n,M)\equiv x_i^U(p_1,\cdots,p_n,U^*(p_1,\cdots,p_n,M))$$

这个推导过程和本节前面推导过程类似，不过还得再追加一步，这样便可以推导出斯拉斯基等式。这个推导过程作为一个习题留给学生。

有时，斯拉斯基等式可以写成：

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_M=\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_U-x_j\left(\frac{\partial x_i}{\partial M}\right)_p$$

这里，括号外面的参变量表示前定条件，即说明什么是保持不变的。这一表述方式是令人满意的，不过它使偏导数的来源显得模糊。正如我们反复强调的那样，只有在具有良好性质的函数如 $y=f(x)$，$y=f(x_1,x_2,\cdots)$ 存在，并且它们可导的前提下，则 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，$\partial f/\partial x_i$ 等等这些提法才有意义。当不存在隐函数情况下，偏导或求导的表达式是毫无意义的。斯拉斯基等式可以被看成两个不同定义的需求函数之间的联系。这两种需求函数分别是：

$$x_i=x_i^M(p_1,p_2,M) \tag{10-9}$$

和

$$x_i=x_i^U(p_1,p_2,U) \tag{10-26}$$

上述每个都是具有明确定义的方程组的解，这些方程组根植于最优化假设。等式(10-9)来源于效用最大化问题，而等式(10-26)来自成本最小化问题。斯拉斯基等式表明，这两个等式具有很有意思的相关性。

让我们再来考查斯拉斯基等式，看一看它到底有什么意义。斯拉斯基等式是：

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^U}{\partial p_j}-x_j^M\frac{\partial x_i^M}{\partial M}$$

当价格发生变化时，消费者会把价格上升的商品替换出去。但是，价格变化同时也改变了消费者的机会集。如果价格 p_j 下降，消费者可以得到以前在其预算约束以外的消费水平。这相当于增加收入。但是，是什么决定了收入效应的规模和符号？如果 p_j 下降，对于消费者而言，可以产生类似于收入增加的效果。这两种情况都可以扩大消费者的机会集。同样，价格上升和收入下降也以类似的方式联系在一起。因此，我们说斯拉斯基等式中收入项的符号为正是合理的。如果是负号，那么这意味着收入变化与价格变化具有相反的效应。

那么，收入项中的乘子 x_j^M 又表示什么呢？它有什么样的含义呢？假设价格发生变化的商品是盐。盐对于大多数人而言在其预算中占很小的比重。因此即使盐的价格发生了很大的变化，其收入效应也是很小的。但是，如果是石油价格发生变化，情况就不一样了。在我们的预算中，尤其对于那些拥有小汽车或用油来给屋子加热的消费者而言，石油产品在预算中会占很大的比重，因此石油产品的价格发生变化会引起重大的收入效应。所以，我们用价格发生变化的商品 x_j 的数量来衡量收入效应$\partial x_i^M/\partial M$是合理的。如果盐的价格上涨，对于该商品以及其他商品的消费量的影响是微乎其微的。如果是那些我们平时消费量很大的商品的价格发生变化，那么，我们的真实收入或效用肯定会发生重大变化。

当 $i=j$ 时，斯拉斯基等式的形式是：

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_i}=\frac{\partial x_i^U}{\partial p_i}-x_i^M\frac{\partial x_i^M}{\partial M} \tag{10-36}$$

我们在这里再次提醒，这里重要的问题是，我们可以从这种分析中推导出什么样的可被驳倒的假设？我们能否确定$\partial x_i^M/\partial p_i$ 的符号呢？严格地说，不能。尽管如此，我们知道$\partial x_i^U/\partial p_i<0$。如果 x_i 不是劣等品，也就是说，如果$\partial x_i^M/\partial M\geqslant 0$ 那么$\partial x_i^M/\partial p_i<0$。当存在一种关于劣等的独立的测度，这也就是说这种测度并不是来源于斯拉斯基等式，只有在这种情况下上

述命题才有效。

如果$\partial x_i^M/\partial p_i>0$，我们称之为吉芬(Giflen)商品。尽管这种商品不太可能出现，但是这个概念是可以理解的。不过，不要认为数学上是可能的事物在现实世界中也能被发现。我们并不能单独从效用最大化问题中推导出可被驳倒的命题，即$\partial x_i^M/\partial p_i<0$，但是效用最大化模型还是很有用的。效用最大化问题包含了这样的假设，即假设消费者的偏好具有"多的总比少的好"的性质，并且效用最大化模型还为经济问题分析提供了一套最成功的框架[4]。

我们用类似的分析方法来分析拉格朗日乘子λ^M，即收入的边际效用。λ^H被称为"补偿"收入边际效用，或"希克斯"收入边际效用。它表示当沿着某条无差异曲线移动时λ^H的变化值。根据本节前面部分类似的方法，我们可以得出：

$$\lambda^H(p_1,p_2,U^0)\equiv\lambda^M(p_1,p_2,M^*(p_1,p_2,U^0)) \tag{10-37}$$

两边对p_1求导，得出：

$$\frac{\partial\lambda^H}{\partial p_1}\equiv\frac{\partial\lambda^M}{\partial p_1}+\left(\frac{\partial\lambda^M}{\partial M}\right)\left(\frac{\partial M^*}{\partial p_1}\right) \tag{10-38}$$

把$x_1^M=x_1^U=\partial M^*/\partial p_1$代入，我们可以得到收入边际效用的"斯拉斯基"等式：

$$\frac{\partial\lambda^H}{\partial p_1}=\frac{\partial\lambda^M}{\partial p_1}+x_1^M\frac{\partial\lambda^M}{\partial M} \tag{10-39}$$

显然，这一结果对于任何价格p_i都有效，对于n种商品的模型也有效。

把等式(10-22)代入到等式(10-39)的右边，可以得到：

$$\frac{\partial\lambda^H}{\partial p_i}\equiv-\lambda^M\frac{\partial x_i^M}{\partial M} \tag{10-40}$$

该等式说明沿着某条给定的无差异曲线，当部分商品价格发生变化时，收入的边际效用的变化与价格发生变化的商品的收入效应以一种简单直接的方式相关。一般，我们认为价格下降会增加追加收入的购买力，并且用消费者得到的效用来测量收入购买力。但是，如果是劣等品，收入的增加会减少该商品的消费量。这意味着这种价格下降的商品是劣等品，增加该商品的消费(沿着某一给定的无差异曲线)会导致其收入的边际效用下降。

条件需求[5]

在第8章，我们研究了在一种投入保持固定的前提下，价格变化对于固定产出要素的需求产生的影响(见第8章第8节)。正如我们所指出的那样，在代数上，成本最小化模型和效用固定约束下的支出最小化模型是相同的。在消费者理论中，我们再次提到这种分析方法。

---

4 我们可以用"一般均衡"原理来解释为什么我们不能相信$\partial x_i^M/\partial p_i>0$的结论。如果$p_i$下降，那么$x_i$的消费者在财富上获得了增值。但是，$x_i$的现在拥有者和出售者面临财富上的损失。所以，价格变化所导致的总收入效应是很小的。

5 Robert Pollak最先发展了希克斯和马歇尔需求的短期和长期结果。其论文请参考"Conditional Demand Functions and Consumption Theory", Quartly Journal of Economics, 83: 60-78, Feb. 1969。

当 x_n 固定在其支出最小化值时，把 x_i 商品的希克斯需求和“短期”希克斯需求联系起来的基本恒等式是：

$$x_i^U(p_1,\cdots,p_n,U^0)\equiv x_i^s(p_1,\cdots,p_{n-1},x_n^U,U^0) \tag{10-41}$$

首先，把该恒等式两边对 p_i 求导，然后再对 p_n 求导，可以得出：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial p_i}-\frac{\partial x_i^s}{\partial p_i}=\frac{(\partial x_i^U/\partial p_n)^2}{\partial x_n^U/\partial p_n}<0 \tag{10-42}$$

我们把 x_i 的希克斯需求对 p_j 求导，也可以得出类似的表达式，只不过右边分子项变成了 $(\partial x_i^U/\partial p_n)(\partial x_j^U/\partial p_n)$，并且其符号是不确定的。这个表达式的推导留作习题。

在某种意义上来说，对于条件马歇尔需求的分析是更复杂，因为在非补偿需求函数的推导过程中不可能有在推导表达式(10-42)过程中所用到的逆结果，并且消费量保持不变的商品的价格 p_n 明确地出现在短期需求函数中。如果 x_n 在效用最大化水平上保持不变，那么，于 $x_i(i\neq n)$ 商品的马歇尔需求有关的基本恒等式是：

$$x_i^M(p,M)\equiv x_i^n(p,x_n^M(p,M),M) \tag{10-43}$$

这里 $p=(p_1,\cdots,p_n)$，是所有 n 种商品价格的价格向量。在希克斯需求函数中，当 x_n 保持固定时，价格 p_n 不会出现在一阶条件中，因此 x_i^s 不是 p_n 的函数。但是，在马歇尔需求曲线的推导过程中，p_n 是预算约束，因此 p_n 仍会出现在一阶条件中。结果“短期”马歇尔需求函数 x_i^n 是所有商品价格 p_n 的函数。

把这个基本的恒等式(10-43)分别对 p_i 和 M 求导，得出：

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_i}\equiv\frac{\partial x_i^n}{\partial p_i}+\left(\frac{\partial x_i^n}{\partial x_n^0}\right)\left(\frac{\partial x_n^M}{\partial p_i}\right) \tag{10-44}$$

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial M}\equiv\frac{\partial x_i^n}{\partial M}+\left(\frac{\partial x_i^n}{\partial x_n^0}\right)\left(\frac{\partial x_n^M}{\partial M}\right) \tag{10-45}$$

现在，如果我们用 x_i 乘以恒等式(10-45)两边，并且把得到的恒等式与(10-44)相加，可以得出纯替代项，例如在等式左边是 $\partial x_i^M/\partial p_i+x_i(\partial x_i^M/\partial M)$，在等式右边是：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial p_i}\equiv\frac{\partial x_i^s}{\partial p_i}+\left(\frac{\partial x_i^n}{\partial x_n^0}\right)\left(\frac{\partial x_n^U}{\partial p_i}\right) \tag{10-46}$$

函数 x_i^s 是在 x_n 固定条件下对 x_i 的希克斯需求函数，我们已经在表达式(10-41)中对它做过定义。把等式(10-41)和等式(10-46)合并，得到：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial p_i}-\frac{\partial x_i^s}{\partial p_i}=\frac{(\partial x_i^U/\partial p_n)^2}{\partial x_n^U/\partial p_n}=\left(\frac{\partial x_i^n}{\partial x_n^0}\right)\left(\frac{\partial x_n^U}{\partial p_i}\right)$$

因此，有：

$$\frac{\partial x_i^n}{\partial x_n^0}=\left(\frac{\partial x_i^U}{\partial p_n}\right)\Big/\left(\frac{\partial x_n^U}{\partial p_n}\right)$$

用该式来消去等式(10-44)中的 $\partial x_i^n/\partial x_n^0$ 项，得到：

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_i}-\frac{\partial x_i^n}{\partial p_i}=\frac{(\partial x_n^U/\partial p_i)(\partial x_n^M/\partial p_i)}{\partial x_n^U/\partial p_n} \tag{10-47}$$

等式(10-47)的分母为负。如果 x_n 的收入效应相对子交叉效应而言是足够大的，那么

分子也可能为负。因此，除了在某些异常的例子中，马歇尔需求曲线比与其相关的“短期”需求曲线更具有弹性。

增加一种新的商品

这种分析方法的最后一个例子是消费者增加一种新的消费品。当消费者收入增加，他决定消费一种新的商品 x_{n+1}，其价格是 p_{n+1}。在大多数传统的消费理论中，消费者如何选择在正数的水平上待消费的商品集的问题没有得到分析。事实上，这是一个复杂的问题，被称为非线性规划。解这类问题需要很细致地了解效用函数。比较静态分析只分析在某点邻域上的偏导的符号。但是，我们可以把新商品 x_{n+1} 初值定义为零，即 $x_{n+1}^0=0$，并且用 x_{n+1} 来考查目前正在消费的正的数量的商品 x_i，$i=1,\cdots,n$ 的条件需求。通过研究这些条件需求，我们能够加深了解。上述这些消费品的希克斯需求函数是：

$$x_i^U(p_1,\cdots,p_n,p_{n+1},U^0)\equiv x_i^s(p_1,\cdots,p_n,U^0,x_{n+1}^U(p_1,\cdots,p_{n+1},U^0)) \tag{10-48}$$

这一基本恒等式在不存在 x_{n+1}（即假定其初值为零）情况下对 x_i 的需求和在存在 x_{n+1} 情况下对于 x_i 的需求之间建立了联系。现在，假设该消费者的收入增加。我们将通过增加作为参变量的无差异水平 U^0 来分析收入增加对于希克斯需求函数的影响。把基本恒等式(10-48)两边对 U^0 求导，得到：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial U^0}\equiv\frac{\partial x_i^s}{\partial U^0}+\left(\frac{\partial x_i^s}{\partial x_{n-1}^0}\right)\left(\frac{\partial x_{n+1}^U}{\partial U^0}\right) \tag{10-49}$$

把该基本恒等式两边对 p_{n+1} 求导，得出：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial p_{n+1}}\equiv\left(\frac{\partial x_i^s}{\partial x_{n+1}^0}\right)\left(\frac{\partial x_{n+1}^U}{\partial p_{n+1}}\right) \tag{10-50}$$

在(10-49)式中应用上述等式和倒数方法，得出：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial U^0}\equiv\frac{\partial x_i^s}{\partial U^0}+\frac{(\partial x_{n+1}^U/\partial p_i)(\partial x_{n+1}^U/\partial U^0)}{\partial x_{n+1}^U/\partial p_{n-1}} \tag{10-51}$$

恒等式(10-51)最后一项的分母为正。我们假设 x_{n+1} 的初值为零，然后由于收入增加，x_{n-1} 为正。因此，在那点上有 $\partial x_{n+1}^U/\partial U^0>0$。这样，(10-51)式最后一项与 $\partial x_{n+1}^U/\partial p_i$ 具有相反的符号。因此，我们可以发现，如果新商品是 x_i 是替代品，即 $\partial x_{n+1}^U/\partial p_i>0$，那么在 x_{n+1} 存在下收入增加对于 x_i 产生的收入效应比 x_{n+1} 不存在下的收入效应要小。如果是互补品，那么结论刚好相反。例如，一个人由于完成了更高的学历或从事了一起成功的商业活动而使收入增加。过去，一直是学生，因此他对那些适合低收入的商品了解比较多，而对于需要重大支出的商品了解不多。随着他获得的有关新商品的信息增加，那么将要被新产品所替代的商品的收入弹性会下降。如果是互补品，结论刚好相反。相反的例子，收入降低的人们比那些一直都处于低收入状态下的人们日子更难过，因为他们要学会怎样才能过穷日子，例如做出放弃一些商品的消费的决策，这个过程需要花时间。

例　在前文中我们指出，效用函数 $U=x_1x_2$ 所隐含的货币收入需求曲线是 $x_1^M=M/2p_1$，$x_2^M=M/2p_2$。现在让我们来推导出补偿需求曲线 $x_1^U(p_1,p_2,U^0)$ 和 $x_2^U(p_1,p_2,U^0)$，并且说明如何从斯拉斯基等式中推导出 x_1^M 和 x_1^U 的关系。

支出最小化问题是：

最小化

$$p_1x_1+p_2x_2=M$$

使满足

$$U(x_1,x_2)=x_1x_2=U^0$$

该问题的补偿需求曲线就是该问题的解。先来列出该问题的拉格朗日函数，即：

$$\mathscr{L}=p_1x_1+p_2x_2+\lambda(U^0-x_1x_2)$$

其一阶条件等式是：

$$\mathscr{L}_1=p_1-\lambda x_2=0$$

$$\mathscr{L}_2=p_2-\lambda x_1=0$$

$$\mathscr{L}_\lambda=U_0-x_1x_2=0$$

根据条件 $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_2=0$，得出切线条件 $U_1/U_2=\lambda x_2/\lambda x_1=p_1/p_2$，或：

$$p_1x_1=p_2x_2$$

成本最小化模型和效用最大化模型，其切线条件是一样的。但是，这里，约束条件已经不是预算等式而是固定效用等式，即 $x_1x_2=U^0$。结合切线条件和固定效用约束条件，可以得出：

$$x_1\frac{p_1x_1}{p_2}=U^0$$

或者：

$$x_1^U=\left(\frac{p_2U^0}{p_1}\right)^{1/2}$$

类似的，可以得到：

$$x_2^U=\left(\frac{p_1U^0}{p_2}\right)^{1/2}$$

根据二阶条件，我们可以得到：

$$\frac{\partial x_1^U}{\partial p_1}=-\frac{1}{2}(p_2U^0)^{1/2}(p_1)^{-3/2}<0$$

$$\frac{\partial x_2^U}{\partial p_2}=-\frac{1}{2}(p_1U^0)^{1/2}(p_2)^{-3/2}<0$$

另外，根据逆条件 $\partial x_1^U/\partial p_2=\partial x_2^U/\partial p_1$，得出：

$$\frac{\partial x_1^U}{\partial p_2}=\frac{1}{2}(U^0)^{1/2}(p_1p_2)^{-1/2}=\frac{\partial x_2^U}{\partial p_1}$$

由于成本函数或支出函数是 $M^*=p_1x_1^U+p_2x_2^U=2(p_1p_2U^0)^{1/2}$。在预算线和无差异曲线的任何一切点都满足斯拉斯基等式。因此，$\partial x_i^M/\partial p_j$ 和 $\partial x_i^U/\partial p_j$ 必须在同一点上来相互衡量。

由于 x_i^M 是 M 的函数，x_i^U 是 U 的函数，也就是说 x_i^M 和 x_i^U 是两个不同变量的函数，因此，我们在寻找该相同点时，必须使 $x_1^M(p_1, p_2, M)=x_1^U(p_1, p_2, U^0)$ 和 $x_2^M(p_1, p_2, M)=x_2^U(p_1, p_2, U^0)$。对于间接效用函数 $U^*=x_1^M x_2^M=M^2/4p_1p_2$ 而言，这很容易办到。这可以看成是在给定的价格水平下效用水平和货币收入水平的关联。如果在给定的预算 M 条件下效用取得最大值，那么在无差异水平 $U^0=M^2/4p_1p_2$ 下求成本最小化会得出针对该效用函数的同样的消费集。此外，我们还发现通过支出函数也可以导出的这种关系。

现在，让我们来考察斯拉斯基等式的偏导形式：

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^U}{\partial p_1}-x_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M}$$

这里，$\partial x_1^M/\partial p_1=-M/2p_1^2$，因此可以得出：

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial M}=\frac{1}{2p_1}$$

$$x_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M}=\frac{M}{2p_1}\frac{1}{2p_1}=\frac{M}{4p_1^2}$$

并且 $\partial x_1^U/\partial p_1=-(1/2)(p_2U^0)^{1/2}p_1^{-3/2}$。通过支出函数或间接效用函数 $U^0=M^2/4p_1p_2$，我们可以得出对应于 U^0 的货币收入水平 M。因此，在任何一点上，都有：

$$\frac{\partial x_1^U}{\partial p_1}=-\frac{1}{2}p_2^{1/2}p_1^{3/2}\frac{M}{2}p_1^{-1/2}p_2^{1/2}$$

$$=\frac{-M}{4p_1^2}$$

即

$$\frac{-M}{2p_1^2}\equiv\frac{-M}{4p_1^2}-\frac{M}{4p_1^2}$$

$$\equiv\frac{-M}{2p_1^2}$$

10.6　货币收入固定的需求曲线和真实收入固定的需求曲线的弹性形式

斯拉斯基等式的弹性形式

斯拉斯基等式可以被写成无量纲的弹性系数形式[6]。首先，我们用 p_i/x_i 去乘整个等式，得到：

6　为了减少符号的杂乱，如果对 x_i 而言上标没有必要，我们就省略这些上标。

$$\frac{p_j}{x_i}\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}=\frac{p_j}{x_i}\frac{\partial x_i^U}{\partial p_j}-\frac{p_j x_j}{x_i}\frac{\partial x_i^M}{\partial M}$$

前两个表达形式已经是弹性形成了；再把收入项乘上 M/M，即 1，得到：

$$\epsilon_{ij}^M=\epsilon_{ij}^U-\kappa_j\epsilon_{iM} \tag{10-52}$$

这里　ϵ_{ij}^M = 货币收入保持不变的前提下 x_i 需求量对于 p_i 变化的弹性；

ϵ_{ij}^U = 货币收入保持不变的前提下 x_i 需求量对于 p_j 变化的弹性；

$\kappa_j=p_jx_j/M$，指商品的 J 在该消费者预算中占的比重；

ϵ_{iM} = 商品 i 的收入弹性。

非补偿性需求曲线的弹性和补偿性需求曲线的弹性之间的差异，依赖于商品的收入弹性和价格变化的商品的重要性，这种重要性由该种商品占消费者预算的比重来衡量。

我们可以从效用最大化模型中推导出部分有用的关系式，这些关系式显示出各种需求弹性之间的关系。一般，这些关系来自两个方面：

1. 需求曲线具有对于价格和货币收入齐次性质

2. 预算约束

齐次性：我们知道 $x_1^M(p_1,p_2,M)$ 和 $x_2^M(p_1,p_2,M)$ 对于价格和货币收入是零阶齐次函数。因此，根据欧拉定理可以得出：

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}p_1+\frac{\partial x_1^M}{\partial p_2}p_2+\frac{\partial x_1^M}{\partial M}M\equiv 0$$

两边除以 x_1^M，得到：

$$\epsilon_{11}^M+\epsilon_{12}^M+\epsilon_{1M}\equiv 0$$

类似的，可以得到：

$$\epsilon_{21}^M+\epsilon_{22}^M+\epsilon_{2M}\equiv 0$$

更一般的，对于 n 种商品而言，$x_i=x_i^M(p_1,\cdots,p_n,M)$，可以得到：

$$\epsilon_{i1}^M+\epsilon_{i2}^M+\cdots+\epsilon_{in}^M+\epsilon_{iM}\equiv 0 \tag{10-53}$$

预算约束

(a) 收入弹性

把预算约束等式对 M 求导，得到：

$$p_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+p_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M}\equiv 1$$

该等式等同于：

$$\frac{p_1x_1}{M}\left(\frac{M}{x_1}\frac{\partial x_1^M}{\partial M}\right)+\frac{p_2x_2}{M}\left(\frac{M}{x_2}\frac{\partial x_2^M}{\partial M}\right)\equiv 1$$

或

$$\kappa_1\epsilon_{1M}+\kappa_2\epsilon_{2M}\equiv 1$$

更一般的形式，对于 n 种商品，是：

$$\kappa_1\epsilon_{1M}+\cdots+\kappa_n\epsilon_{nM}\equiv 1 \tag{10-54}$$

上式说明，所有商品的收入弹性的加权总和等于是 1。这些权重是消费者在每种商品上所花费的支出占收入的比重，这些比重之和也为 1。

如果收入增加一定比例，并且某种商品 x_i 的消费量以更大的比例增加，那么我们称该种商品是具有收入弹性的商品；反之，如果该种商品消费量以更小的比例增加，那么我们称该种商品是缺乏收入弹性的商品。如果某一商品具有收入弹性，那么显然该商品支出占收入的比重会随着收入的增加而上升。从代数上，为了简化繁杂的符号，这里定义 $\eta_i=\epsilon_{iM}$ 可以得到：

$$\frac{\partial\kappa_i}{\partial M}=\left(\frac{1}{M}\right)(\kappa_i\eta_i-\kappa_i)=\left(\frac{\kappa_i}{M}\right)(\eta_i-1) \tag{10-55}$$

并且把该式的推导留作习题。很明显，如果 $\eta_i\gtrless 1$，那么 $\partial\kappa_i/\partial M\gtrless 0$ 这里需要注意的是，我们可以用当收入发生变化时，每种商品的支出占总收入的比重保持不变来描述效用函数的齐次性，因为效用函数的齐次性意味着所有商品都具有单位收入弹性。

此外，我们还能得出这样的结论：当收入持续增长，具有收入弹性的商品最终会占据所有预算额，或者最终会超出预算。因此，显然具有收入弹性的商品的收入弹性最终将下降。这可能会以该商品被具有更高质量商品所代替的形式出现。

下面，我们用代数来推导上述结果。把恒等式 $\sum\kappa_i\eta_i\equiv 1$ 对收入求导，得出：

$$\sum\kappa_i\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial M}\right)+\sum\eta_i\left(\frac{\partial\kappa_i}{\partial M}\right)\equiv 0 \tag{10-56}$$

把(10-55)式代入上述表达式，可以得出：

$$\sum\kappa_i\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial M}\right)+\sum\eta_i\left(\frac{\kappa_i}{M}\right)(\eta_i-1)\equiv 0$$

或者：

$$\sum\kappa_i\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial M}\right)+\left(\frac{1}{M}\right)\left[\sum\kappa_i\eta_i^2-\sum\kappa_i\eta_i\right]\equiv 0$$

因为上述等式右边最后一项是 1，所以：

$$\sum\kappa_i\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial M}\right)=\left(\frac{1}{M}\right)\left[1-\sum\kappa_i\eta_i^2\right] \tag{10-57}$$

如果该效用函数是齐次，那么所有收入弹性都是等于 1，那么等式(10-57)的右边就为零，因为 $\sum\kappa_i=1$ 在这种情况下，所有收入弹性对于收入变化的变化率的加权之和是零，也就是说，加权之和并不随收入变化而变化。但是，对于非齐次效用函数而言，$\sum\kappa_i\eta_i^2>1$，该结果在实证研究中很重要。这个结果来自于这样一个事实，即 η_i^2 是严格凸函数。因此，这任意一组收入弹性平方的凸组合，即 $\sum\kappa_i\eta_i^2$ 一定大于 $\sum\kappa_i\eta_i=1$。因此，可以得出：

$$\sum \kappa_i \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial M}\right) < 0 \tag{10-58}$$

也就是说，对于一般的(即非齐次)效用函数而言，收入弹性变化率的加权之和随着收入增加而下降。那么，这能否成为一个一般性的结论，或者说我们能否断言所有收入弹性最终都会下降呢?

(b) 价格弹性

把预算恒等式 $p_1 x_1^M + p_2 x_2^M \equiv M$ 对于 p_1 求导，得出：

$$x_1^M + p_1 \frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_2^M}{\partial p_1} \equiv 0$$

这等同于：

$$\frac{p_1 x_1^M}{M}\left(\frac{p_1}{x_1^M}\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}\right) + \frac{p_2 x_2^M}{M}\left(\frac{p_1}{x_2^M}\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1}\right) \equiv -\frac{p_1 x_1^M}{M}$$

或者：

$$\kappa_1 \epsilon_{11}^M + \kappa_2 \epsilon_{21}^M = -\kappa_1$$

一般而言，对于 n 种商品，用同样的方法可以得出：

$$\kappa_1 \epsilon_{1j}^M + \cdots + \kappa_n \epsilon_{nj}^M \equiv -\kappa_j \tag{10-59}$$

这也就是说，所有商品对于某种商品价格变化的弹性的加权总和，等于价格发生变化的商品在收入中占的比重的负数。这里的权重还是各种商品支出占收入的比重。注意(10-53)式和(10-59)式之间的区别：等式(10-53)指一种商品和所有价格及收入之间的关系，而等式(10-59)是指所有商品与其中一种商品价格发生变化之间关系。

补偿需求曲线

补偿需求曲线 $x_i^U(p_1, p_2, U^0)$ 具有稍微不同的弹性的性质。这些性质还是来自于两个方面：齐次性和约束条件，这里指 $U(x_1, x_2) = U^0$。

齐次性：需求曲线 $x_1^U(p_1, p_2, U^0)$ 和 $x_2^U(p_1, p_2, U^0)$ 只对价格是零阶齐次。如果两个价格都加倍，由于要对价格保持不变，因此切点保持不变。根据欧拉定理，对于 x_1^U 可以得出：

$$\frac{\partial x_1^U}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial x_1^U}{\partial p_2} p_2 \equiv 0$$

除以 x_1^U，得到：

$$\epsilon_{11}^U + \epsilon_{12}^U \equiv 0$$

其中，

$$\epsilon_{ij}^U = \frac{p_j}{x_i^U}\frac{\partial x_i^U}{\partial p_j}$$

是指商品 i 的补偿需求对于商品 j 的价格 p_j 的交叉弹性。对于 n 种商品而言，有：

$$\epsilon_{i1}^U + \epsilon_{i2}^U + \cdots + \epsilon_{in}^U \equiv 0 \tag{10-60}$$

约束条件 $U(x_1^U, x_2^U) \equiv U^0$：把上述恒等式对于 p_1 求导，得出：

$$U_1 \frac{\partial x_1^U}{\partial p_1} + U_2 \frac{\partial x_2^U}{\partial p_1} \equiv 0$$

根据成本最小化问题的一阶条件，可知 $U_1 = p_1/\lambda, U_2 = p_2/\lambda$，因此可知：

$$p_1 \frac{\partial x_1^U}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_2^U}{\partial p_1} \equiv 0$$

这简直与上述从等式(10-60)中推导出来的关系式一样。对于补偿需求曲线而言 $\partial x_i^U/\partial p_j = \partial x_j^U/\partial p_i$。因此，可以得出：

$$\frac{p_1 x_1^U}{M}\left(\frac{p_1}{x_1^U}\frac{\partial x_1^U}{\partial p_1}\right) + \frac{p_2 x_2^U}{M}\left(\frac{p_1}{x_2^U}\frac{\partial x_2^U}{\partial p_1}\right) \equiv 0$$

或

$$\kappa_1 \epsilon_{11}^U + \kappa_2 \epsilon_{21}^U \equiv 0$$

一般对于 n 种商品 $x_i^U(p_1, p_2, \cdots, p_n, U^0)$ 而言，有：

$$\kappa_1 \epsilon_{1j}^U + \kappa_2 \epsilon_{2j}^U + \cdots + \kappa_n \epsilon_{nj}^U \equiv 0 \tag{10-61}$$

这里需要注意(10-60)式和(10-61)式之间的差别：等式(10-60)只考虑一种商品的 i 的需求函数 $x_i^U(p_1, p_2, \cdots, p_n, U^0)$，该商品的交叉弹性与所有其他商品有关。而等式(10-61)，所有商品需求对于某一给定商品的价格变化的反应却是相关的。这些恒等式都是以弹性的形式表述，是消费理论中经常遇到的。

现在，再回到等式(10-60)或(10-61)的推导中去。由于补偿需求曲线 $x_i = x_i^U(p_1, p_2, \cdots, p_n, U^0)$ 对于价格具有 0 阶齐次性，根据欧拉定理，得出：

$$p_1 \frac{\partial x_i^U}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial x_i^U}{\partial p_n} \equiv 0$$

令 $s_{ij} = \partial x_i^U/\partial p_j$，是指 x_i 对于 p_j 变化的纯替代效应，我们可以得出：

$$p_1 s_{i1} + p_2 s_{i2} + \cdots + p_n s_{in} \equiv 0$$

但是，对于补偿性变化而言，$s_{ij} = s_{ji}$，因此，

$$p_1 s_{1i} + p_2 s_{2i} + \cdots + p_n s_{ni} \equiv 0$$

这就是希克斯第三法则。(前两个分别是：$s_{ij} = s_{ji}$ 和 $s_{ii} < 0$)，希克斯第三法则也可以表述为：

$$\sum_{i=1}^{n} p_i s_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_j s_{ij} = 0 \tag{10-62}$$

我们现在已经证明了效用最大化的行为的假定是如何导出可被驳倒的定理，至少在原则上是这样的。尤其，当一种商品是非劣质品，效用最大化隐含着这样的结论，即这种商品的价格降低，消费量越高。此外，收入补偿性需求函数 $x_i^U(p_1, \cdots, p_n, U^0)$ 对于它们具有如下性质，即对它们自身价格而言具有负的斜率，并且还拥有逆属性：$\partial x_i^U/\partial p_j = \partial x_j^M/\partial p_i$。另外，效用最大化还隐含着前面所提到的弹性性质。

在上面提到的一个例子中，即效用函数 $U = x_1 x_2$ 而言，我们已经得到了一些结果，即

$\partial x_i^U/\partial p_j=\partial x_j^M/\partial p_i=0$，同时我们还能解出单位收入和价格弹性。那么，一般而言，哪种效用函数的类型能推导出属性呢？

现在，让我们来考虑一个很不常见的例子$\partial x_i^M/\partial p_j=\partial x_j^M/\partial p_i$ 对于希克斯需求而言，这些条件总是满足，但是对于马歇尔需求函数 x_i^M 而言，上述条件就不一定总是成立。如果这些条件都成立，那么我们可以应用斯拉斯基等式，

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^U}{\partial p_j}-x_j^M\frac{\partial x_i^M}{\partial M}=\frac{\partial x_j^U}{\partial p_i}-x_i^M\frac{\partial x_j^M}{\partial M}=\frac{\partial x_j^M}{\partial p_i}$$

但是，由于$\partial x_i^U/\partial p_j=\partial x_j^U/\partial p_i$ 总是成立。因此，我们可以得到：

$$x_j^M\frac{\partial x_i^M}{\partial M}=x_i^M\frac{\partial x_j^M}{\partial M} \tag{10-63}$$

我们把 $M/(x_i^Mx_j^M)$乘到上述等式两边，可以得到：

$$\epsilon_{iM}=\frac{M}{x_i^M}\frac{\partial x_i^M}{\partial M}=\frac{M}{x_j^M}\frac{\partial x_j^M}{\partial M}=\epsilon_{jM}$$

这样，任何一对商品如果满足$\partial x_i^M/\partial p_j=\partial x_j^M/\partial p_i$ 的条件，都具有相同的收入弹性。假设这对于所有消费者都是正确的，那么，我们可以用等式(10-54)来说明，所有商品的收入弹性的加权总和等子 1。我们用 ϵ_M 来表示收入弹性的普通价值，那么可以得到：

$$\kappa_1\epsilon_M+\cdots+\kappa_n\epsilon_M=\epsilon_M(\kappa_1+\cdots+\kappa_n)=1$$

因为权重 $k_i=p_ix_i/M$ 加起来等于 1，所以 $\epsilon_{1M}=\cdots=\epsilon_{nM}=\epsilon_M=1$。

那么，对于所有商品而言，哪类效用函数拥有单位收入弹性？想一想图 10-6 所画的 $U=x_1x_2$ 例子。在该例子中，收入弹性等于 1，这是因为收入——消费路径是一条源于原点的直线。所谓收入——消费路径，这里指的是所有切点的集合。这就是所谓的齐次性，在这里齐次效用函数 $U=x_1x_2$ 只是一个特例。

我们用数学来研究等式(10-63)。该等式等同子：

$$\frac{\partial(x_j^M/x_i^M)}{\partial M}=0 \tag{10-64}$$

使用除法法则可以得到：

$$\left(x_i^M\frac{\partial x_j^M}{\partial M}-x_j^M\frac{\partial x_i^M}{\partial M}\right)\left(\frac{1}{x_i^M}\right)^2=0$$

因为假设 x_i^M 的符号为正，于是我们就可以得到等式(10-63)这一结果。等式(10-64)说明 x_j 对 x_i 的消费比率在所有收入水平上都是相同的。这一比率，即 x_j/x_i，就是从原点开始，通过(x_j,x_i)的射线的斜率。对于所有一对商品而言，我们说射线在 x_jx_i 平而上有固定的斜率，这也就是说，该效用函数具有齐次性，上述推理过程可以反过来，我们可以根据等式(10-64)来定义齐次性，进而可以证明，齐次效用函数隐含着具有单位收入弹性性质的需求曲线，并且该需求曲线具有$\partial x_i^M/\partial p_j=\partial x_j^M/\partial p_i$的性质。上述三个论述的任意一个都隐含着其他两个，它们都是等价的。

10.7 专题讨论

可分的效用函数

在效用理论发展的早期阶段，效用被认为是消费者因消费单独的商品而获得的效用相加的结果，也就是说：

$$U(x_1,\cdots,x_n)=U_1(x_1)+U_2(x_2)+\cdots+U_n(x_n)$$

上述的方程称为相加可分或强可分的[7][如果一个效用方程是乘法地可分，即 $V=U_1(x_1)\cdot U_2(x_2)\cdots U_n(x_n)$，也意味着同样的需求系统，因为如果在上述等式两边取对数（一个单调变换），就可以得到相加可分的形式，因此需求方程是不变的]。在相加的效用方程中，消费 x_i 的边际效用只是 x_i 的函数，$U_i'(x_i)$，而该边际效用不会因消费其他商品 x_j 而改变，因为 $\partial U_i'(x_i)/\partial x_j\equiv 0$。这会得到一个很有趣的结论，即效用方程的可分性意味着对 x_i 的需求独立于其他商品的价格，即 $\partial x_i^M/\partial p_j=0, i\neq j$。这样的结论当然是错误的！我们在练习中留给大家证明，在消费两种商品的情况下，既不会得到 $\partial x_i^M/\partial p_j=0$，也不会得到 $\partial x_i^U/\partial p_j=0$，然而，也可以说明，如果 $\partial x_i^M/\partial p_j=0, i\neq j$，则该效用方程为柯布—道格拉斯方程（或柯布道格拉斯方程的一个单调转换）。这是一个更为先进的尝试，涉及到求解偏微分方程，更进一步地，根据希克斯第三定理，$\sum p_i s_{ij}=0$ [等式(10-62)]，由于 $s_{ij}<0$，则绝不会出现 $s_{ij}=\partial x_i^U/\partial p_j=0, i\neq j$。

强可分性确实限制了可观测的行为，这是很自然的结果。例如，一种情况是所有的商品为非劣质品，并且彼此是纯替代品（$\partial x_i^U/\partial p_j>0, i\neq j$）；另一种情况是除了一种商品以外的所有商品都是劣质品，这样，这种非劣质品就是其他商品的纯替代品，而其他的劣质品彼此间都是纯互补品，对于需求方程的其他限制。（主要归因于萨缪尔森和 Houthakker）留作 11 章末的练习。

弱可分性指商品种类的效用方程，例如食品，服装等等，它们都是商品的总称，本身又包含单个或者多个的商品，举例来说，在四种变量的情况下，我们可以写成 $V(x_1,x_2,x_3,x_4)=U(f(x_1,x_2),g(x_1,x_2))=U(z_1,z_2)$。强可分性是弱可分性的一个特例，当然，对于强可分性而言，并不一定意味着 $\partial x_i^M/\partial p_j=0$，在这里 i 和 j 代表了不同类别的商品。但是，考虑在同一种类商品中的两个商品 (x_1,x_2) 边际替代率：

$$-\frac{\partial V/\partial x_1}{\partial V/\partial x_2}=-\frac{U_1 f_1}{U_1 f_2}=-\frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)}$$

---

7 略微更一般的陈述是将效用明确地认为是多组商品功效的总和。

很明显，同一种类的两个商品之间的边际替代率只是该类中商品的函数。如果在 x_1，x_2 上的花费已知，那么，切线条件再加上 x_1 和 x_2 隐含的预算约束，则可以求解出马歇尔需求函数，该函数是 x_1 和 x_2 价格的函数（x_1 和 x_2 为同类商品），同时也是对 x_1，x_2 总支出的函数。在这种情况下，我们可以设想一个两阶段的预算过程，首先消费者决定不同种类商品的消费支出，食品、服装、房屋等等；然后只根据每类商品中不同商品的价格来分配预算。然而，这样一个两阶段的预算过程并不是由弱可分性来暗示的。在某类商品，如食品上的总支出事实上不可避免地取决于所有商品的价格，而不是只依赖于食品这一类商品的价格。这种两阶段的预算过程只有加上更加严格的条件才有可能[8]。但这也不一定，如果“子效用”函数 f 和 g 是相似或齐次的，则两阶段预算也是可能的。例如：

$$U=f(x_1,x_2)+g(x_3,x_4)=\left(\frac{x_1^2}{2}+x_1x_2\right)+\left(\frac{x_3^2}{2}+x_3x_4\right)$$

显然，f 和 g 都是二次函数，形式相似。我们留给读者去证明，对于 $p_1>p_2$，该函数可以得到一个服从于线性预算约束条件的正的最大值。并且还可以证明如：$\partial x_i^M/\partial p_j \neq 0, i=1,2, j=3,4$。不仅如此，设 f^* 为 f 的效用最大化值，则 $\partial f^*/\partial p_j \neq 0, j=3,4$。因此，即便在效用函数上加了这些约束条件，消费者对于“食品”的消费量仍依赖于“服装”类各商品的价格。

劳动——空闲的选择

一天当中将多少小时用于工作，这对于每个人来讲都是一个重要的决定，通过假设消费者既希望商品消费，也喜欢空闲 L，我们可以将上述选择模型化。我们通过假定效用是收入 Y 和空闲的函数来将模型简化：$U=U(Y,L)$，而不是单独的将商品一一列出。收入是由工作时间 $(24-L)$ 乘以每小时的工资 (w) 得到的，此外，无工资条件下的收入 Y^0 与消费者的任何选择均无关，如果是存在契约性的债务，则 Y^0 也可以是负的，这样效用最大化问题就是

最大化

$$U=U(Y,L)$$

并满足

$$Y=w(24-L)+Y^0$$

该最大化问题可由图 10-11 表示，消费者最初拥有 24 小时的空闲和非工资收入 Y^0，在这里假设 Y^0 为正，预算线通过点 $(24,Y^0)$，斜率为 $-w$。消费者在 A 点达到效用最大，在 A 点，预算线与无差异曲线相切。增加 W 使得预算线绕禀赋点 $(24,Y^0)$ 顺时针旋转，从而与更高的无异曲线相切，产生新的最大化点 B。

8　脚注：对于可分性的隐含意义更加正规的研究，请参考 Robert pollak 的“有约束条件的需求方程和可分性的隐含意义”，The Southern Economio Journal，37：423-433，1971，4。关于可分性最全面的分析则是 C，Blackorby，Uprimont 和 R. Rrrssell 的《二元性，可分性和方程的结构，理论与应用》，由 Elsevier 出版，New York，1978

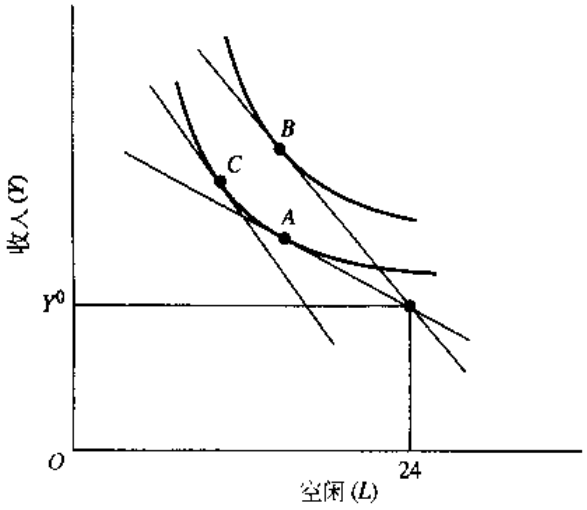

图 10-11 劳动—空闲选择。一个消费者的最初禀赋是 24 小时的空闲和非工资收入 Y^0。当工资率为 w 时，效用最大值点为 A。w 的增加导致从 A 到 C 的纯替代效应，从 C 到 B 的纯收入效应。假设空闲是正常品，由于消费"出售"空闲，因此收入效应与替代效应的作用方向相反。

该模型的拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L}=U(Y,L)+\lambda(Y^0-Y+w(24-L))$$

一阶条件是：

$$U_Y-\lambda=0 \tag{10-65a}$$

$$U_L-\lambda w=0 \tag{10-65b}$$

约束条件是：

$$Y^0-Y+w(24-L)=0 \tag{10-65c}$$

根据上述三个等式，得到 $U_L/U_Y=w$。这就是说，工资率就是用放弃的收入来表示的空闲的边际价值。如果一个人选择用多少小时来工作，那么不工作一个小时就要放弃一个小时的收入，即 w[9]。

假设充分的二阶条件成立，则马歇尔需求函数为：

$$L=L^M(w,Y^0) \tag{10-66a}$$

$$Y=Y^M(w,Y^0) \tag{10-66b}$$

拉格朗日乘子的表达式为：

$$\lambda=\lambda^M(w,Y^0) \tag{10-66c}$$

我们可以用非工资收入的边际效用来解释 λ^M。

那么增加工资率 W 对 L 和 Y 有什么影响呢？我们已经知道，不存在数学意义上的可被驳倒的了隐含条件。工资率的增加导致空闲的机会成本升高；因而我们预计个人应用更多的工作来替代空闲，然而，这仅仅是纯替代效应，当工资率增加时，收入相应也增加，如果空闲是正常品，那么我们同样也会预计个人会消费更多的空闲，即工作时间减少。下面我们

9 尽管短期内，每周的工作时间是固定的，但在长期来看，当个人选择工作或职业时，工作时间以及其他工作特征则是可变的。

将推导与之相关的斯拉斯基等式!

该模型的希克斯或效用保持不变的需求函数是从支出最小化推导出来的,

最小化

$$Y^0=Y+w(24-L)$$

满足

$$U(Y,L)=U^0$$

在该模型中,Y^0 不再是参数,而是目标函数的值。效用水平在这里则作为参变量。该模型的拉格朗日函数是:

$$\mathscr{L}=Y-w(24-L)+\lambda(U^0-U(Y,L))$$

假设一阶条件和二阶条件均成立,则希克斯需求函数是:

$$Y=Y^U(w,U^0) \tag{10-67a}$$

$$L=L^U(w,U^0) \tag{10-67b}$$

与之相关的支出函数则通过将需求函数代入目标函数,推导而来:

$$Y^*(w,U^0)=Y^U(w,U^0)-w[24-L^U(w,U^0)] \tag{10-68}$$

希克斯需求函数与马歇尔需求函数通过下述恒等式联系起来:

$$L^U(w,U^0)\equiv L^M(w,\ Y^*(w,U^0)) \tag{10-69}$$

两边对 w 求微分:

$$\frac{\partial L^U}{\partial w}\equiv\frac{\partial L^M}{\partial w}+\left(\frac{\partial L^M}{\partial Y^0}\right)\left(\frac{\partial Y^*}{\partial w}\right) \tag{10-70}$$

对(10-68)等式应用包络定理,$\partial Y^*/\partial w=-(24-L^U)$,对(10-70)式稍加整理:

$$\frac{\partial L^M}{\partial w}\equiv\frac{\partial L^U}{\partial w}+(24-L^U)\left(\frac{\partial L^M}{\partial Y^0}\right) \tag{10-71}$$

等式(10-71)与传统的斯拉斯基等式(10-34e)类似。

在该例中,请注意增加收入效应的变量是"被出售"空闲的数量,$24-L^U$,而不是某些被购买的商品数量。当消费者带着钱步入市场的时候,这些货币收入是不直接进入效用函数的,而是用来购买那些进入效用函数的商品,对于正常品而言,收入效用加强了替代效用。在该例中,消费者是出售而不是购买空闲,收入效应对于正常品所起的作用则同替代效用相反。有充分的理由可以认为空闲是正常品(胜利者花在工作上的时间是如何受其赢得彩票这样事情的影响呢?)。因为$(24-L^U)$是正的,因此收入效应是正的,而纯替代效应$\partial L^U/\partial w$则有必要是负的。正因为这样,空闲的马歇尔(非补偿的)需求函数的斜率,$\partial L^U/\partial w$ 与一般商品与服务的马歇尔需求函数的斜率相比,就缺乏可预见性。

一个重新出现的公共政策问题就是关于税率对工作努力程度的影响。1986 年美国税收的变化导致联邦收入边际税率从 50%下降到 28%—33%,一些国家的税率是超过 90%的。从上而的分析可以看出,降低税率有效地升高了税后工资率,但对于工作时间却没有明显的影响。因为现在空闲的机会成本更高,替代效应的作用就导致更少的空闲,但是,随着

人们越来越富裕，收入效应会产生更多的空闲。那么净效应就是一个经验问题了。（当然，如果税率是100%，就没有动力去努力工作；在此情况下降低税率的收入效应将是决定性的，会引致更多的工作努力）

前面所讲的劳动—空闲选择模型是在关于一般均衡的文献中出现的特殊例子。基于这个模型，以下考虑消费者最初禀赋是 $n+1$ 种商品 $x_0^0, x_1^0, \cdots, x_n^0$，而不是一定的货币收入 M。市场为这些商品设定各自的价格 $p_0, p_1, \cdots, p_n$，消费者效用最大化要满足的约束条件就是使购买商品的价值同最初禀赋的价值相等：

最大化

$$U(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

满足

$$p_0 x_0^0 + p_1 x_1^0 + \cdots + p_n x_n^0 = p_0 x_0 + p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$$

即

$$\sum_{i=0}^{n} p_i x_i^0 = \sum_{i=0}^{n} p_i x_i$$

一阶条件可以通过如下方法得到：

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L} = U(x_0, \cdots, x_n) + \lambda\left(\sum p_i x_i^0 - \sum p_i x_i\right)\\
&\mathscr{L}_0 = U_0 - \lambda p_0 = 0\\
&\mathscr{L}_1 = U_1 - \lambda p_1 = 0\\
&\qquad \vdots\\
&\mathscr{L}_n = U_n - \lambda p_n = 0\\
&\mathscr{L}_\lambda = \sum p_i x_i^0 - \sum p_i x_i = 0
\end{aligned}$$

由一阶条件导出需求函数：

$$x_i = x_i^M(p_0, \cdots, p_n, x_0^0, \cdots, x_n^0) \quad i = 0, \cdots, n \tag{10-72}$$

显然，应用类似于前面的推导方法，这些需求函数在 $n+1$ 个价格 $p_0, \cdots, p_n$ 上面是0度齐次的。通常的做法是选择其中一种商品，并将其价格设定为1，该商品，如 x_0 则被称为一般等价物。其他商品的标价均要以 x_0 的价格为基准。上面描述的这种情形就是一种物物交换。假如一种商品，比如说是黄金，成为上而所说的 x_0，则除了它本身让人愉悦的价值以外（如用于珠宝、牙医等，这种价值是进入效用函数的），它还是具有交换媒介的功能，这种商品的交易成本最小。这个模型是不能够预测哪一种商品可被选择出来成为上面所说的这种商品，但我们也可以指定 x_0 为一般等价物，且 $p_0 = 1$。那么其他的价格 $p_1 \cdots p_n$ 就均为相对价格。

在该模型中会得到与标准效用最大化问题中相似的结果。一般等价物 x_0^0 的初始值所起的作用同 M 类似，M 即消费者的货币收入。补偿的需求曲线 $x_i = x_i^U(p_1, \cdots p_n, U^0)$ 可以通过以下方式推导：

最小化

$$x_0^0 = \sum_{i=0}^{n} p_i x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^0$$

满足

$$U(x_0, x_1, \cdots, x_n) = U^0$$

请注意，在这里所隐含的补偿的需求曲线不是初值的函数，该初值做为常数进入目标函数，并且在求导的过程中就消去了。一旦效用水平 U^0 确定，则最初的值就是无关的了——需求是由效用水平 U^0 和切线条件共同决定。

间接的"初值函数(相当于以前的成本或者支出函数)由下式给出：

$$x_0 = x_0^*(p_1, \cdots, p_n, x_1^0, \cdots, x_n^0, U^0) = \sum_{i=0}^{n} p_i x_i^U - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^0 \tag{10-73}$$

由此，根据包络定理：

$$\frac{\partial x_0^*}{\partial p_i} \equiv x_i^U - x_i^0 \tag{10-74}$$

我们可以利用这个结果推导该一般均衡系统中隐含的斯拉斯基等式。推导过程与前面相同，由一般需求曲线开始：

$$x_i^M(p_1, \cdots, p_n, x_0^0, x_1^0, \cdots, x_n^0) \quad i = 0, \cdots, n$$

定义 x_0^* 为满足 $U(x_0, x_1, \cdots, x_n) = U^0$ 的最小 x_0^0，那么 x_0^* 恰好是间接函数(10-73)，再通过定义：

$$x_i^U(p_1, \cdots, p_n, U^0) \equiv x_i^M(p_1, \cdots, p_n, x_0^*, x_1^0, \cdots, x_n^0)$$

两边对某价格 p_j 求导，

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial p_j} \equiv \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^M}{\partial x_0^0}\frac{\partial x_0^*}{\partial p_j}$$

应用等式(10-74)，并进行整理

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^U}{\partial p_j} + (x_j^0 - x_j^M)\frac{\partial x_i^M}{\partial x_0^0} \tag{10-75}$$

由此可见，该斯拉斯基等式与前面的具有相同的形式，但也有重要的不同之处，那就是收入效应 $\partial x_i^M / \partial x_0^0$ 的重要性由 x_j 消费量变化的程度 $x_j^0 - x_j^M$ 来衡量。如果在进入市场后 x_j 的消费量没有发生变化，即 $x_j^0 = x_j^M$，则根本不会有收入效应。如果 p_j 上升，则导致真实收入下降，当消费者是 x_j 的卖者，则所产生的收入效应为正，即增加他的真实收入。

斯拉斯基补偿与希克斯补偿

尽管我们将等式(10-34e)称为斯拉斯基等式，但该等式却是由希克斯在《价值与资本》一书中首次介绍的，该书是以对环境的帕累托讨论为基础的，斯拉斯基对消费者的补偿方式

有所不同：当价格发生变化后，斯拉斯基补偿不是调整 M 以使消费者回到最初的无差异曲线，而是给予以消费者足够的收入来购买最初的商品，这不仅仅是 $M^*(p_1,\cdots,p_n,U^0)$，M^* 表示使消费者回到最初效用水平的 M 的最小值。那么这样的补偿对于斯拉斯基等式有什么影响呢？令人意外的是丝毫没有影响。在边际上，斯拉斯基补偿和希克斯补偿是相同的。

请看图 10-12，最初的切点在 (x_1^0,x_2^0)，假设 p_1 下降，希克斯补偿使 x_1 达到 x_1^U 的水平，x_1^U 是同一条效用曲线 U^0 上的另一个切点，同时产生新的预算约束线。然而，斯拉斯基补偿则是使在新价格水平的预算约束线通过 (x_1^0,x_2^0)。无论价格上升还是下降（图中的 p_1 相对 p_2 下降），消费者都可以获得一个更高的效用水平，即 U^S（表示斯拉斯基效用）。如果 x_1 是正常品，则会增加对 x_1 的消费。因此，斯拉斯基需求曲线 x_1^S 一方面与希克斯曲线同样都能过 (x_1^0,x_2^0)，另一方面在 p_1 不等于最初价格的地方，位于 x_1^U 的右侧，假设 $x_1^U(p_1,p_2,U^0)$ 和 $x_1^S(p_1,p_2,x_1^0,x_2^0)$ 均是可导的，图 10-12 明显地表明两条需求曲线均有 (x_1^0,x_2^0) 这个切点。但这是指在 (x_1^0,x_2^0) 两条曲线的斜率相同，即：

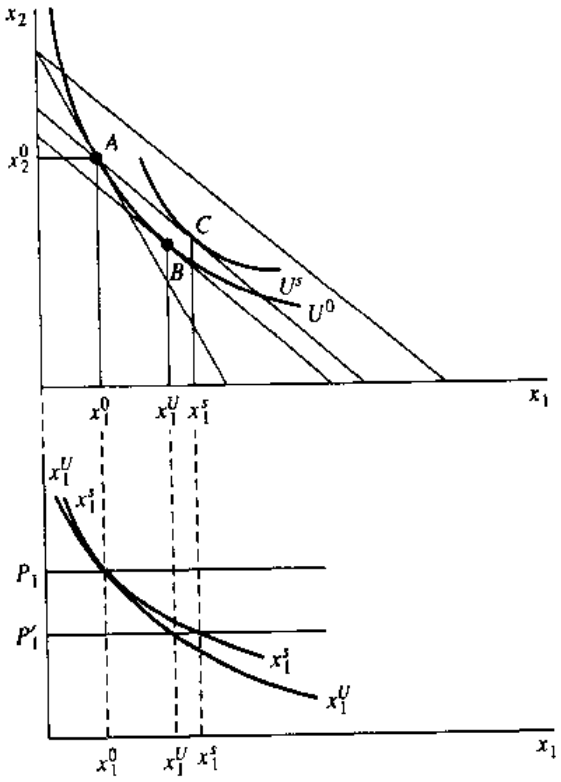

图 10-12 希克斯补偿与斯拉斯基补偿。消费者起始点为 $A(x_1^0,x_2^0)$。当 p_1 下降时，按希克斯补偿，即 x_1 x_1^U，导致新的切点 B。如果斯拉斯基补偿通过起始点 A，则会在更高水平的无差异曲线上得到新的切点 C。如果 x_1 为正常品，则斯拉斯基需求 x_1^S 大于希克斯需求 x_1^U，此外当价格上升时，也会有同样的结果，消费者总是可以通过移动消费点来获得更高的效用水平，即适应价格的变化。因此，在 x_1^0 处，$x_1^U=x_1^S$，但在其他地方，则 $x_1^U<x_1^S$。换句话说，在 x_1^0 处，x_1^S 与 x_1^U 具有相同的斜率，即 $\partial x_1^S/\partial p_1=\partial x_1^U/\partial p_1$。

$$\frac{\partial x_1^U}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^S}{\partial p_1}$$

该结果是可以一般化的。应用同样的推导方式：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^S}{\partial p_j}$$

如果 x_1 是劣质品，而不是正常品，切线条件依然成立，只不过在这种情况下，斯拉斯基需求曲线在希克斯需求曲线的左边。

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^U}{\partial p_j}+(x_j^0-x_j^M)\frac{\partial x_i^M}{\partial x_j^0}$$

斯拉斯基补偿与消费者的起始点 $x_i=x_i^0$，$i=1,\cdots,n$ 上是等同的，在这种情况下，没有收入效应，因此根据定义 $\partial x_i^M/\partial p_j\equiv\partial x_i^S/\partial p_j$，因此 $\partial x_i^S/\partial p_j\equiv\partial x_i^U/\partial p_j$。然而注意到在图中，斯拉斯基曲线比希克斯曲线更加凸向原点。因此两者在该点的二阶导数就不再相等了，事实上，对于正常品而言，$\partial^2 x_i^S/\partial p_i^2\geqslant\partial^2 x_i^U/\partial p_i^2$ 该结论最初是由 A. Wald 和 J. Mosak 首次提出的，他们解决了斯拉斯基与希克斯两种补偿变化的冲突[10]。Mosak 证明了如果 p_j 变化了 Δp_j，斯拉斯基与希克斯需求曲线的二阶微分，其差别是细小的，也就是说，该差别取决于二阶，甚至高阶微分中 Δp 的大小。

该结论的重要性在于，一般情况下，如果价格变化的幅度不大，则用哪一种补偿方式是无关紧要的。尽管从数学理论的观点来看，希克斯补偿也许更为完美，但该补偿不容易被观测到。相反，斯拉斯基补偿可以由简单的代数运算出来。应用 Wald-Mosak 结论，我们可以确信两种补偿的差别不是很大，而且容易观测的斯拉斯基补偿对于“理想化”的希克斯补偿而言，也是不错的近似。

上述结论在指数的定义中发挥了作用。美国以及其他国家定义消费价格指数(CPI)的 Laspeyres 指数实质上就是一个斯拉斯基补偿。价格指数表明购买基年消费品所需的当年的货币量。在这里没有考虑对于基年一篮子商品的替代效应(该特点使 CPI 偏高，也就是说，拉氏指数由于不允许消费者改变消费行为以适应价格变化，从而夸大了价格变化的影响)。但是对于较小的相对价格的变化，这种偏差还不算太差，因为，正如前面指出过的，斯拉斯基补偿可以很好地替代希克斯补偿，而后者则是试图计算“真正”的价格指数。

市场规模限制劳动分工

到目前为止，我们所讨论的效用最大化问题中的约束条件均为线性的预算约束，线性的约束条件表明消费者没有能力通过自己的消费选择来影响价格。然而，假设一个人从事消费品的生产活动，那么生产阶段以后的交换机会是以什么样的方式来影响消费者的商品消费选择呢？

在比较优势理论中，有类似的行为，以现代教科书形式首次出现在 David Ricardo 所著

10　见 J. Mosak, “On the Interpretation of the Fundamental Equation of Value Theory”, in O. Lange et al. (eds.), Studies in Mathematical Economics and Econometrics, Uni9versity of Chicago press, Chicago, 1942.

《原理》一书中。[11] 比如说，如果克鲁索在一天中要么采 3 个可可果，要么抓 3 条鱼(也可以是两者的任何凸性组合)，而星期五一天中则可以采 8 个可可果或者抓 4 条鱼，那么如果他们根据各自的比较优势实行分工，则有可能获得共同的好处。在上述条件下，克鲁索抓鱼的边际成本是一个可可果，而星期五则是 2 个可可果；类似的，星期五采可可果的边际成本是半条鱼，而克鲁索的边际成本则是一条鱼。成本最小化就会导致克鲁索专门去抓鱼，而星期五则只采摘可可果，以这种方式从事生产，他们最终就可以在一天之内获得 8 个可可果和 3 条鱼，这样的消费机会是高于不分工情况下的消费水平的。因为"多总比少好"，效用最大化也会导致这样的行为。

在更早的，著名的 1776 年，亚当·斯密就用生产别针的例子生动的描述了分工的好处[12]：

一个劳动者，如果对于这种职业，没有受过相当训练，又不知怎样使用这种职业上的机械，(使用这种机械，有发明机会的，恐怕也是分工的结果)，那么，即便是努力工作，也许一天也不能做出 1 枚针，更不要说是 20 枚了。但按照现在的方法，不但这种作业全体已经称为一特殊职业，并且在这职业当中，还分成了若干部门，而大多数的部门也同样成为了特殊的职业。计抽铁线一人，拉直者一人，截断者一人，挫锋者一人，打针鼻一人……这样，这十个人可以在一天中做出 48000 枚针。……这种工作量的激增……是因为以下三个方面的原因。第一，特种劳动者技巧的进步；第二，由一种工作转移到另一种工作所损失的时间的节省；第三，用子辅助劳动以及使一人能从事多个人工作的各种机械发明……自然可以料想……在每一个特定的劳动分支中，从事工作的人会很快找到更为容易、便捷的方法来完成他们的工作。

由于交换刺激分工，所以交换的范围与程度也限制了分工的程度：

我们相互得到的必需品的大部分，是通过相互协约、实物交换以及买卖实现的。这种交换的需求和意向也是引起分工的根本原因……所以，分工的范围不能不常被交换力的大小，或者换句话说，被市场的规模所限制。当市场很小的时候，自己消费所余的劳动生产物，不能完全和自己所必要的他人的剩余劳动生产物相交换，所以就没有人愿意完全委身于一个职业。

尽管我们确定很难评判斯密以及 Ricardo 的权威分析，但我们可以用数学的方式来描述该讨论。预先规定一个生产边界 $g(x_1, x_2)=k$，表明一个人只依靠自己的能力所能生产的两种商品的数量和其他可能的投入。如果这个人不能从事贸易活动，那么他的生产活动的目标就是在生产约束条件下，达到效用最大化，即：

最大化

$$U(x_1, x_2)=U$$

11 David Ricardo, The principles of political Economy and Taxation, Chapter Ⅶ, 1817, The accessible publication is "The Works and Correspondence of David Ricardo", p. Straffa(ed.), Cambridge University press, Cambridge, 1996.

12 Adam Smith, An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations. Reprinted by Modern Library, New York, 1776.

满足

$$g(x_1, x_2)=k \tag{10-76}$$

该问题的拉格朗日函数为：

$$\mathscr{L}=U(x_1,x_2)+\lambda(k-g(x_1, x_2))$$

一阶条件为：

$$\mathscr{L}_1=U_1(x_1,x_2)-\lambda g_1(x_1,x_2)=0$$
$$\mathscr{L}_2=U_2(x_1,x_2)-\lambda g_2(x_1,x_2)=0$$
$$\mathscr{L}_\lambda=k-g(x_1,x_2)=0$$

根据前两个一阶条件可以导出 $U_1/U_2=g_1/g_2$，该等式同第三个一阶条件(即约束条件)共同表明无差异曲线必然与生产边界相切，即图 10-13 中的 A 点。

在没有贸易的条件下，消费者生产多少商品，就要消费同样数量的商品。这种情形也许近似于 19 世纪时北美的边界地区或今天那些偏远的山村。(在这些地区存在的巡回的贸易商也是分工优势的证明。)但是，假设存在一个可以交换这些商品的市场，生产者一旦生产出来产品，就可以在市场上通过交换，用自己的产品换取更多的他想要的商品。在这样的情形下，消费者将生产具有最高市场价值的产品，一般这种产品不是消费所需的商品组合，然后再将这样的产品在市场上交换以获得最大的效用。随着市场扩展，消费者可以达到图 10-13 中的 C 点，C 点的效用水平高于没有市场交换条件下的效用水平。(个人更为偏好 C 点，当然，个人也可以选择不进行贸易而仍在生产边界上生产。)通过分离消费与生产，消费者就可以利用他们的比较优势，而不用担心他们是否只可以消费自己所生产的产品[13]。

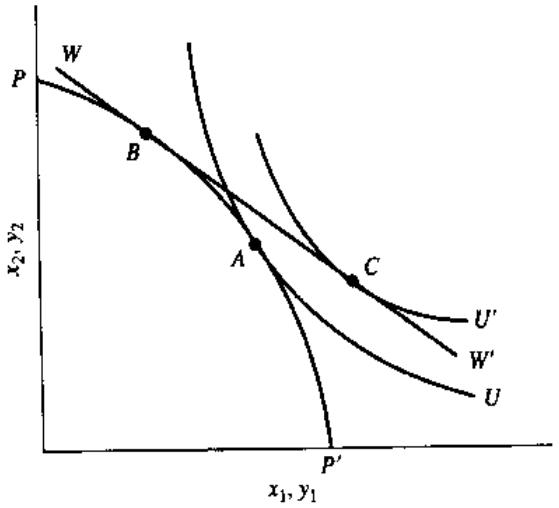

图 10-13　市场规模限制劳动分工。如果贸易是被严格限制的，一个拥有生产边界为 pp 的消费者几乎只能消费他自己所生产的产品，在这种情况下，效用最大化点为 A。在有效市场中，消费者可专门生产具有最高市场价值的产品，即 B 点，并且以市场价值进行交换，从而达到更高的效用水平 C 点。

13　Irving Fisher 也利用同样的观点，解释个人可借贷的资本市场的存在使个人首先最大化财富(即有未来收入的现值)，然后使个人重新调整消费，在一段时间后效用最大化。该结论就是著名的 Fisher 分离定理。见 Irving Fisher, "The Theory of Interest", The Macmillan Company, New York, 1930. Reprinted by Augustus Kelly, New York, 1970。

该模型的数学公式化过程如下。在该模型中实际上有 4 个(即 $2n$)决策变量:生产的产品(y_1, y_2),和消费的商品(x_1, x_2)。对个人而言,问题就是:

最大化

$$U(x_1, x_2)=U$$

满足

$$g(y_1, y_2)=k$$

$$p_1x_1+p_2x_2=p_1y_1+p_1y_2$$

上式中 p_1, p_2 分别是两种商品的市场价值。通过引进第五个变量 W,即个人产出的总价值,我们可以很轻松地分析这个问题,即可以用以下方式陈述该问题:

最大化

$$U(x_1, x_2)=U$$

满足

$$\begin{aligned} p_1x_1+p_2x_2&=W \\ p_1y_1+p_1y_2&=W \\ g(y_1, y_2)&=k \end{aligned} \tag{10-77}$$

从后两个约束条件可以很清楚地看出,对于任意满足生产约束条件的 y_1, y_2,都可以确定 W。那么问题就简化为,在满足一般预算约束条件 $p_1x_1+p_2x_2=W$ 的条件下,效用最大化的问题,在这里 W 取决于 y_1, y_2。然而,假设非饱性成立,W 的增加也会使效用必然增加。因此,为了使效用最大,消费者首先还是要决定产出组合(y_1, y_2)以使财富 W 最大化。图 10-13 中的 B 点则是财富 W 的最大值点。然后,消费者在满足预算约束线 WW 的条件下达到效用最大化,WW'是过 B 点,且与生产边界线相切的直线,由此消费者达到在 C 点的消费水平。我们将该问题的正式建模以及推导一阶、二阶条件的任务留作练习。在这里,我们简要的提醒一下,在所有类似的效用最大化模型中,出现在约束条件中的价格使得可被驳倒的相对静态隐含条件要依赖于模型中进一步的假设。

高度分工成为现代社会的主要特征,没有人会担心他只能消费自己所生产的东西;个体的生产活动以其产出价值的最大化为直接目标。对此,亚当·斯密继续描述道:

> 当每个人都致力于生产具有最大市场价值得产品,每个人就有必要尽最大能力为社会贡献年度收入。事实上,他既不需要引起公众的注意,也不会关心这种注意有多大程度,……,并且,就如其他的许多事情一样,他被一只看不见的手指引着到一个并非他本意的目的。

社会产出总值的最大化依赖于更进一步的,对产权以及个人对其他影响程度的假设[14]。我们将在第 19 章的福利经济学中再来研究这些问题。

---

14 在上文已经引用过的斯密的那篇著名文献,事实上出现在一本名为"Economic Liberalis, The Ideal"的书中,斯密继续探讨了 The Reality,思考如垄断、关税等其他问题。

习题

1. 在一个多商品的模型中，任何一对商品间递减的边际替代率与效用函数的拟凹性之间有什么差别？哪一个是更具约束力的概念？
2. 为什么命题"多总比少好"意味着向下倾斜的无差异曲线？
3. 货币收入保持不变的需求函数的 0 度齐次性对消费者效用函数的齐次性具有什么样的依赖关系？
4. 证明货币收入的边际效用 λ^M 是 -1 度齐次的。
5. 如果效用函数为 $U=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$，证明需求函数为：

$$x_1^M=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{M}{p_1}$$

$$x_2^M=\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{M}{p_2}$$

并写入 λ^M 和 $U^*(x_1^M,x_2^M)$ 的表达式，并证明 $\lambda^M=\partial U^*/\partial M$。

6. 在 n 种商品的条件下，证明弹性公式(10-53)，(10-54)、(10-59)、(10-60)和(10-61)。
7. 在消费者理论中，是否可以通过认为 x_j 的消费量增加时，x_i 的边际效用也增加，来定义补偿？[提示：需要定义什么样的数学变量？该变量在单调变换中保持不变吗？]
8. 替代性既可以通过价格对消费量的总交叉效应(包括收入效应)来定义，也可以通过纯效应(即不包括收入效应)来定义。也就是说如果(i)$\partial x_i^M/\partial p_j>0$ 或者(ii) $\partial x_i^U/\partial p_j>0$，则可以说"$x_i$ 是 x_j 的替代品。"(对于互补品而言，则上述不等号方向相反。)

   (a) 根据经验，哪一个变量更容易观测到？

   (b) 在效用函数的单调变换中，这些变量都保持不变吗？

   (c) 根据上述定义，x_i 是 x_j 的替代品是否就意味着 x_j 也是 x_i 的替代品呢？
9. 思考希克斯"第三定理"以及第 8 题中用第 ii 种方法定义替代性和互补性，证明在下式的意义上，具有商品替代的趋势：

$$\sum_{i\neq j}p_is_{ij}=\sum_{j\neq i}p_js_{ij}>0$$

10. 说出效用函数的单调变换对下述各项的影响：

    (a) 某种商品相对于另一种商品的边际效用的变化率

    (b) 边际效用递减法则

    (c) 需求曲线的斜率

    (d) 收入弹性的值

    (e) 需求函数齐次性

    (f) 收入的边际效用的大小与符号。
11. 对于效用最大化模型，证明：

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial M}=\frac{-1}{\lambda^M}\left(\frac{\partial\lambda^M}{\partial p_1}+x_1^M\frac{\partial\lambda^M}{\partial M}\right)$$

λ^M 为货币收入的边际效用。

12. 假设消费者今年的收入为 x_1^0，明年为 x_2^0，今年消费 x_1，明年消费 x_2，并且可以以利率 r 借贷。假设消费者要使两年的消费的效用最大化：

(a) 对该问题进行比较静态分析。今年收入的增加是否一定会导致今年消费的增加？

(b) 证明如果消费者在今年只是储蓄(或只是消费)，那么当利率升高时，消费者的总效用会更高(或更低)。

13. 思考下述效用最大化问题：最大化 $U(x_1, x_2)$，满足于 $p_1x_1+p_2x_2=1$，设 $U^*(p_1, p_2)$ 为间接效用函数，λ 为拉格朗日乘子：

(a) 证明：$\lambda^M=(\partial U/\partial x_1)x_1^*+(\partial U/\partial x_2)x_2^*$.

(b) 证明：$\partial U^*/\partial p_1=-\lambda^M x_1^*$，$\partial U^*/\partial p_2=-\lambda^M x_2^*$.

(c) 证明：$\lambda^M=-[(\partial U^*/\partial p_1)p_1+(\partial U^*/\partial p_2)p_2]$.

(d) 证明：如果 $U(x_1, x_2)$ 对 (x_1, x_2) 是 r 度齐次，那么 $U^*(p_1, p_2)$ 对 (p_1, p_2) 是 $-r$ 度齐次。

14. 效用函数是“加法可分的”，即：

$$U(x_1, x_2)\equiv U^1(x_1)+U^2(x_2)$$

(a) 找出这种效用函数的一阶条件与二阶条件，并证明至少一种商品的边际效用递减。

(b) 如果每一商品的边际效用均递减，则这种商品是正常品，而非劣质品。

(c) 该种效用函数并不隐含着 $\partial x_i^M/\partial p_j=0$，$i\neq j$。

(d) 证明：如果 $\partial x_i^M/\partial p_j\equiv\partial x_j^M/\partial p_i\equiv 0$，那么 $U(x_1, x_2)\equiv\alpha_1\log x_1+\alpha_2\log x_2$。

(e) 假设 x_1 是吉芬品，即 $\partial x_1^M/\partial p_1>0$，证明 $\partial\lambda^M/\partial M>0$。

15. 在两种商品的效用最大化模型中，假设 x_1 是吉芬品，即 $\partial x_1^M/\partial p_1>0$，证明 $\partial x_2^M/\partial p_1>0$ 和 $\partial x_2^U/\partial p_1>0$ 均为正。

16. 针对 $\partial x_i^U/\partial p_j$ 与 $\partial x_i^S/\partial p_j$，$i\neq j$ 的差别，推导类似于等式(10-42)的表述式。证明如果 x_i 与 x_j 均是 x_n 的纯替代品或纯互补品，则希克斯交叉需求弹性在长期情况下的数值比短期小。

17. $U=f(x_1, x_2)+g(x_3, x_4)=(x_1^2/2+x_1x_2)+(x_3^2/2+x_3x_4)$，证明如果 $p_1>p_2$，则该效用函数在线性预算约束条件下，达到内部最大值，并且 $\partial x_i^M/\partial p_j\neq 0$，$i=1,2$，$j=3,4$。证明如果 f^* 是 f 的效用最大化的值，则 $\partial f^*/\partial p_j\neq 0$，$j=3,4$，即强可分的效用函数并不意味着“两阶段”预算的可能性。

18. 希克斯“真实收入”或效用保持不变的需求曲线：$x_1=x_1^U(p_1, p_2, U^0)$，现在假设当 p_1 发生变化时，U^0 也调整到可达到的最大值，这样以保持 M 不变，即：

$$U^0=U^*(p_1, p_2, M)$$

通过调节效用水平以适应 p_1 或 p_2 的变化，而使货币收入 M 保持不变的函数关系。因此，货币收入保持不变条件下的需求曲线就可以写为：$x_1^M(p_1, p_2, M)\equiv x_1^U(p_1, p_2, U^*(p_1, p_2, M))$

(a) 证明 x_1 的收入效应与效用对 x_1 影响成比例，后者即指 U 的变化所导致的 x_1^U 的变化，该比例因子为货币收入的边际效用。

(b) 证明：

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial p_2}\equiv\frac{\partial x_1^U}{\partial p_2}-x_2\frac{\partial x_1^M}{\partial M}$$

(该等式是在上述条件下的斯拉斯基等式的一种替换形式)

19. 在一篇重要的经济学文献中，给出了如下对“边际替代率递减法则”的陈述：给定其他商品的数量，消费者拥有的某种商品数量越多，则该商品以其他商品衡量的边际价值越小，也就是说无差异曲线变得更平缓(请画图表示)。

(a) 这是关于无差异曲线斜率，即 $-U_1/U_2$ 的基本原理，那么根据的基本原理 $\partial(-U_1/U_2)/\partial x_1$ 和 $\partial(-U_1/U_2)/\partial x_2$ 的符号如何？

(b) 证明，根据该基本原理，无差异曲线凸向原点。

(c) 假设该基本原理对于商品 2 不成立，证明 x_1 是劣质品；再证明如果该基本原理对于商品 1 也不成立，则无差异曲线是凹向原点的。

(d) 证明在两种商品的情况下，题中的基本原理对劣质品不成立。

(e) 在(c)中，无差异曲线仍被假定是凸向原点，请直观的解释 x_2 边际价值的增加大于 x_2 相对于 x_1 的消费量。

(f) 证明在三种商品的条件下，题中的基本原理不足以表明无差异曲线是凸向原点的。

20. 在一个历史上重要的效用函数的流派中，还包括了那些在图形上是垂直平行的无差异曲线的效用函数；也就是说以 x_1 为横轴，x_2 为纵轴，所有无差异曲线的斜率在任意给定的 x_1 值上均相等。对于这样的效用函数：

(a) 用图形和几何两种方法证明 x_1 的收入效用为 0。

(b) 通过演示在任意点，x_1^M 和 x_1^U 的斜率均相等，并且因第二种商品 x_2 的价格 p_2 的变化而导致的 x_1^M 和 x_1^U 的移动也一样，来证明 x_1 的"一般"需求曲线 $x_1^M(p_1,p_2,M)$和其补偿需求曲线，$x_1^U(p_1,p_2,U)$是相同的。

(c) 若效用函数为 $U=x_2+\log x_1$，证明该效用函数具有垂直平行的无差异曲线。

(d) 对于 $U=x_2+\log x_1$，再证明对于 p_1 变化的价格消费路径是水平的，即 x_2 的消费与 p_1 无关。

部分参考文献

Alchian, A. A.: "The Meaning of Utility Measurement," *American Economic Review*, **43**: 26-50, March 1953.

Becker, G. S.: "Irrational Behavior and Economic Theory," *Journal of political Economy*, **70**: 1-13, 1962.

Debreu, G.: *Theory of Value*, Cowles Foundation Monograph 17, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959. The Seminal work in the formal, abstract approach to economic theory. Get out your old topology notes first.

Friedman, M.: "The Marshallian Demand Curve," in *Essays in positive Economics*, University of Chicago press, Chicago, 1953. Debatable, to say the least, but important in terms of the issues analyzed.

Georgescu-Rogegen, N.: "The pure Theory of Consumer Behavior," *Quarterly Journal of Economics*, **50**: 545-593, 1938.

Hicks, J. R.: *Value and Capital*, 2d ed., Oxford University press, London, 1946.

——: *A Revision of Demand Theory*, Oxford University press, London, 1956.

Marshall, A.: *principles of Economics*, 8th ed., Macmillan & Co., Lid., London, 1920.

Mosak, J. L.: "On the Interpretation of the Fundamental Equation in Value Theory," in O. Lange, F. McIntyre, and T. O. Yntema (eds.), *Studies in Mathematical Economics and Econometrics in Memo-*

ry of Henry Schultz, University of Chicago press, Chicago, 1942.

Pollak, R.: "Conditional Demand Functions and Consumption Theory," *Quarterly Journal of Economics*, **83**:60-78, February 1969.

Samuelson, p. A.: *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University press, Cambridge, MA, 1947.

Slutsky, E.: "Sulla Teoria del Bilancio del Consumatore, "*Giornale degli Economisti*, **51**:19-23, 1915. Translated as "On the Theory of the budget of the Consumer,"in G. Stigler and K. Boulding (eds.), *Readings in price Theory*, Richard D. Irwin, Inc., Homewood, IL, 1952.

Wold, H., and L. Jureen: *Demand Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.

第 11 章　消费理论中的若干专题

11.1　显示性偏好和交易

任何经济系统都是在用某种方式解决生产问题和商品及资源的分配问题。在这些经济系统里，一般是从各种初始的要素出发，资源以某种方式得到组织和整合，从而制造出一些产成品。在这一过程中，我们必须对以下两个基本问题做出决策：

1. 我们所要生产的最终产品集是什么？

2. 生产要素以怎样的方式整合才能生产出这些产品？

这两个问题并不是互相独立的。要素的选择和它们最低成本的组合方式依赖于社会对于产品的需求。一个人在其后院中制造一辆小汽车所用的要素投入与通用汽车公司制造汽车所用的要素投放是不同的。另外，我们还想了解，商品生产者为什么知道哪些商品是需要生产的？究竟是什么在指导商品生产者从巨大的、可以了解的其他商品和服务集合中选出非常小的商品集来进行生产的决策？

这些问题绝对不是浅薄的。假如一个社会由某个执政党所控制，在这个社会中所有商品都不能自由交易，现在，把你想象成是这个社会的首席经济计划者。为了减轻你的负担，政府已经给你提供了生产现在和将来可能要生产的产品的所有成本集合。如果你非常关心消费者福利，那么，你需要决定每一种产品你到底决定生产多少才能使消费者福利最大？为了达到你的目的，你必须知道其他的商品对于消费者的价值有多高。没有这些信息，计划者会决定为素食主义者生产肉类食品，或在程度上稍微轻微一些，对于喜欢吃水果或玉米的居民而言生产了过量的小麦，或对于喜欢自己驾驶小汽车的居民而言提供了过量的火车和公共汽车。那么，究竟应该生产什么样的商品和服务组合呢？

任何经济系统解决这个资源分配问题的途径取决于两个方面：提供有关各种商品对于消费者价值的信息和个人利用这些信息的能力。后一个问题涉及到我们所讨论的国家的产权制度，对于这类问题我们不准备在这里展开论述了。不过，我们认为，在一个国家中，如果允许私人产权和私人之间自由订立合同，那么，这样的国家比那些把这些权利受到弱化的国家更有可能生产不同的产出商品集。

前一个问题，即有关各种商品对于消费者价值的信息是如何制造出来的问题，是我们这里的主题。现在，来回忆一下我们对于价值的定义。在某一点上的商品价值是指，消费者为了增加一单位所讨论的商品的消费而愿意放弃的其他商品的消费量。在许多私人交易的例子中，关于边际价值的信息可以通过交易参与者愿意或不愿意交易而自动显现。当交易发

生时，被交易的商品的价值展现在交易者和其他观察者面前。因为，在第 10 章所讨论的行为假设下，个人只有等到商品的边际价值降低到次优的商品的边际价值时才会购买。因此，在一个自由交易的经济中，价格在一定程度上提供了有关所有被交易商品的消费者边际效用的信息。对于任何一个制造商而言，如果他制造某种商品其边际成本低于其价格，那么，越多生产该商品，他获利就越多。通过这种方式，社会资源就会从低价值的使用上转移到更高价值的使用上。用这个方法，我们将更加深入论述交易中的获利情况。

当采用其他的资源配置方法时，尽管这样做并不是很准确，但是商品的价值也可以被揭示出来。有时，政府会对商品实行价格管制，例如，政府在 1973 年—1974 年的那个冬季对石油价格的管制。在这种情况下，会出现排队现象和其他非价格歧视情况。这些现象表明，该商品对于消费者的边际价值要高于官方制定的价格。但是，究竟高多少我们并不知道。在那里，经济系统并不能准确地提供有关石油的边际效用的信息。此外，再举一个比较极端的例子。当商品被免费处理的时候，经济系统只能提供有关消费者对于这些商品的效用评价的非常少的信息。

在一般的情况下，即所谓的私人产品的情况下，拥挤变得那么极端以至于只有一个人能消费这种产品，这时，消费者偏好可以通过交易行为自动显现。偏好的强度可以通过消费者对于商品和服务的购买量来显现。在另一个重要的例子中不会出现这种情形，即对于公共品而言，不会出现拥挤现象，对于该服务新增加一个消费者的消费，一点儿也不会削弱该产品对于其他消费者的服务水平。国家防御体系、灯塔和不拥挤的高速公路是公共品的典型例子。在这些例子中，要把那些没有支付费用的人从服务的好处中排除出去是很困难的，几乎不可能。（排斥权是产权的基本组成部分，并不是专指公共品而言。此外，并不是所有的公共品都不能便宜地实施排斥权。）在这种不具有排外的公共品的例子中，很难获得关于消费者对于商品的价值评价的信息，消费者会经常有掩饰他们偏好强度的激励，并且希望“免费搭乘”。现在，让我们来想象一下这类公共品是怎样被生产出来的。如果公共品的生产成本是根据该服务对于消费者的价值来衡量，那么每个消费者都会表现出这样的态度，即认为这些服务对他们而言，只意味着很低的价值。每个人都希望别人会表示出相反的态度，即认为服务对他们具有很高的价值，因面他们愿意为这个项目支付比较高的费用。结果会导致出现这样的情况，即社会根本不会提供该项服务，或者只提供很少的服务。在这些情况下，为了减少那些企图耗尽这类交易所获得的收益的消费者之间的谈判成本，社会通常会采用一些强制性的措施，例如政策。这些政策通常有强制性的征税来提供公共品，或类似于私人俱乐部交纳会费的方法。但是，由于该集团中的不同个人非常有可能对于所提供的最终的公共品具有的边际价值不同，因此，个人对于这些服务的偏好并没有彻底地得到显示。

上面我们讨论了交易性质，那么能否在这基础上，用一个完全依赖于实际可观察到的数量的假设来代替效用最大化假设，从面建立起一套分析框架？也就是说，能不能用交易来推导出一种行为假定，并且这种行为假定可以导出可被驳倒的假设？这些问题最初是由萨缪尔逊（Samuelson），豪斯豪科（Houthakker）和其他一些经济学家于 20 世纪 30 年代和 40 年

代提出，并且最终形成了现在所说的显示性偏好理论。这一理论最初是和消费者理论中另一个经典问题结合在一起，即第 10 章的斯拉斯基(Slutsky)等式是否构成了效用最大化假设中的所有内涵。也就是说，有没有可能从一组需求关系式出发，这些需求关系满足纯替代项的对称性和半负定性，来推导出其中的效用函数及其所有单调转换形式？从这些效用函数中，我们能推导出它们的需求函数。这就是所谓的积分问题。由于积分问题的讨论非常依赖于微妙的数学细节，因此，彻底讨论这个问题超出了本书的范围。但是，我们会说明这一问题的一般性特征。

假设某一消费者拥有一组定义很好的需求关系如：

$$x_i = x_i^M(p_1, \cdots, p_n, M) \quad i = 1, \cdots, n \tag{11-1}$$

现在我们没有必要假设这些关系式是单值的，也就是说，现在，当消费者面临一组价格 $p_1, \cdots, p_n$ 和给定的货币收入 M，他可以选择大于一个的消费集。严格地说，关系式(11-1)并不是函数，因为，应变量的单值性是函数定义的一个必需的部分。相反，关系式(11-1)代表的是所谓的依存关系或简单的关系式。这里需要强调的一点是，当面临一个价格—收入向量 $(\boldsymbol{p}^0, M^0) = (p_1^0, \cdots, p_n^0, M^0)$，消费者会选择消费集 $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$。现在，我们还要假定消费者在做出这样的选择假定时，用尽了他所有的预算，也就是说，消费者选择 $\boldsymbol{x}^0$ 满足预算等式，即 $\sum p_i^0 x_i^0 = M^0$。

如果我们在以下的讨论中引入基本的矩阵和向量的表示符号，论述将会变得更简单。现在，让我们来回忆一下在第 5 章中有关向量和矩阵乘法的定义。我们把两个向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ 的内积定义为 $\boldsymbol{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$。用这种符号，我们可以把预算式 $\sum p_i x_i = M$ 简单地写成 $\boldsymbol{px} = M$。把导数集 $\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 简化写成 $\mathbf{d}\boldsymbol{x}$。同理，$\boldsymbol{p}\mathbf{d}\boldsymbol{x}$ 表示 $\sum_{i=1}^n p_i \mathrm{d}x_i$。需求关系(11-1)整个都可以简化成 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^M(\boldsymbol{p}, M)$。

如图 11-1 所示，消费者在面临一个价格—收入向量 $(\boldsymbol{p}^0, M^0)$ 情况下，选择了消费集 $\boldsymbol{x}^0$，其中 $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0 = M^0$，即满足预算等式。基于这种观察，我们认为该消费者对于 $\boldsymbol{x}^0$ 显示偏好 $\boldsymbol{x}^1$。但是，我们并不能说，消费者对于 $\boldsymbol{x}^0$ 和 $\boldsymbol{x}^1$ 无差异，因为无差异是一个与效用相关的概念，而这里我们并没有定义效用。短语“$\boldsymbol{x}^0$ 显示偏好于 $\boldsymbol{x}^1$”只意味着当面临两种都买得起的消费集 $\boldsymbol{x}^0$ 和 $\boldsymbol{x}^1$，尽管 $\boldsymbol{x}^1$ 并没有比 $\boldsymbol{x}^0$ 更贵，但是消费者选择了 $\boldsymbol{x}^0$ 而没有选择 $\boldsymbol{x}^1$。如果被选择的消费集比没有被选择的消费集便宜，那么我们就不可能形成一套关于选择的假设了。人们选择 Chevrolets 而不选择 Cadillacs 并不一定因为人们更喜欢 Chevrolets 而不太喜欢 Cadillacs，而是因为后者更贵。$\boldsymbol{x}^1$ 并不比 $\boldsymbol{x}^0$ 贵的说法可以表示成 $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0 \geqslant \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1$。

在上述关于显示性偏好的定义基础上，我们来提出行为假设。

显示性偏好的弱公理　假设 $\boldsymbol{x}^0$ 显示性偏好于 $\boldsymbol{x}^1$。也就是说，在价格 $\boldsymbol{p}^0$ 的条件下，消费者选择了 $\boldsymbol{x}^0$，并且满足 $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0 \geqslant \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1$，即消费者可以选择 $\boldsymbol{x}^1$，但事实上他没有选择。那么，$\boldsymbol{x}^0$ 不显示偏好于 $\boldsymbol{x}^1$。

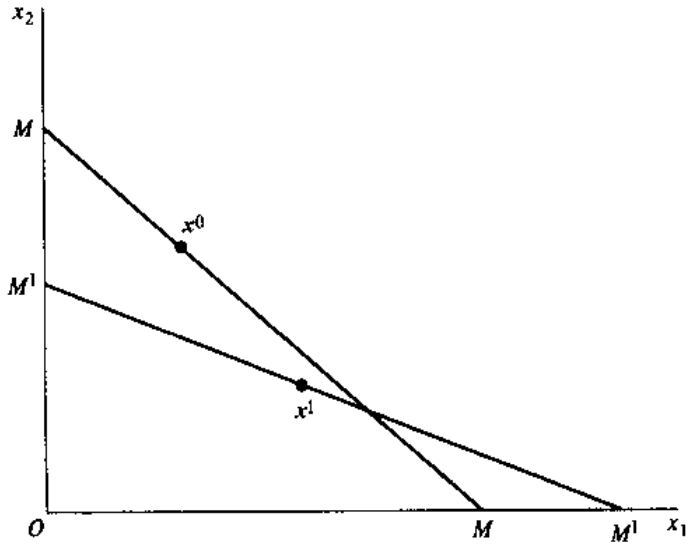

图 11-1 显示性偏好弱公理。在价格 p^0 下，消费者选择的消费集是 x^0，隐含着预算线是 MM。由于消费集 x^1 位于 MM 线内侧，因此消费者可以选择该消费集，但事实上没有选择。所以，我们说，该消费者明显更偏好于 x^0 而不是 x^1。不过，这并不意味着消费者不会选择 x^1。而是意味着在某一价格水平 p^1 下，消费者选择 x^1。与此对应的预算线 M^1M^1，这说明在这一新价格水平下 x^0 比 x^1 更贵，因为与 x^1 相对应的预算线是 M^1M^1。换句话说，如果 $p^0x^0 \geqslant p^0x^1$，当在价格 p^1 水平下选择 x^1，那么 $p^1x^1 < p^1x^0$ 必然成立。本图已经画出了这一定理，即 x^0 位于预算线 M^1M^1 的外侧。

弱公理并没有说，在任何情况下，消费者不会选择 x^1。我们现在先来解释为什么说它是弱公理，而不是强公理。在价格向量 p^0 的情况下，消费者会选择 x^1。弱公理说明的是，如果在价格 p^0 情况下，消费者选择了 x^1，那么在价格 p^1 上，x^0 比 x^1 更贵。根据图 11-1，在价格 p^0 情况下，与该价格对应的预算线是 MM，即 $p^0x^0 = M^0$。由于 x^1 位于预算线 MM 的内侧，因此，消费者有能力购买 x^1，但是他没有购买，而是选择了 x^0。在价格 p^1 的情况下，与此对应的预算约束线是 M^1M^1，即 $p^1x^1 = M^1$，这时消费者可能会选择 x^1。但是，注意，在价格 p^1 情况下，x^0 比 x^1 更贵，也就是说，$p^1x^1 < p^1x^0$。因此，我们不能仅仅因为消费者选择了 x^1，而得出结论说，x^1 是显示偏好了 x^0。同样的道理，我们也不会得出 Chevrolets 显示偏好于 Codillacs。这种情况只说明，在价格 p^1 水平上，消费集 x^1 比 x^0 更便宜。单单从 $p^1x^1 < p^1x^0$ 中不能得出消费者对于 x^0 和 x^1 的偏好情况的结论。

显示性偏好用代数的形式表示如下：

如果：

$$p^0x^0 \geqslant p^0x^1$$

那么：

$$p^1x^0 > p^1x^1 \tag{11-2}$$

这里，消费者所选择的消费集是其上标和价格向量的上标一致的消费集。图 11-2 还画出了

与弱公理相矛盾的一组价格消费情形。该图中，在价格 p^1 消费者能够选择 x^0，但事实上并没有选择，而是选择了 x^1。在这种情形下，$p^0x^0 \geqslant p^0x^1$，同时，$p^1x^1 \geqslant p^1x^0$。因此，弱公理并不隐含着对于可观察到的行为的某种约束。那么，这些约束条件又是什么呢？

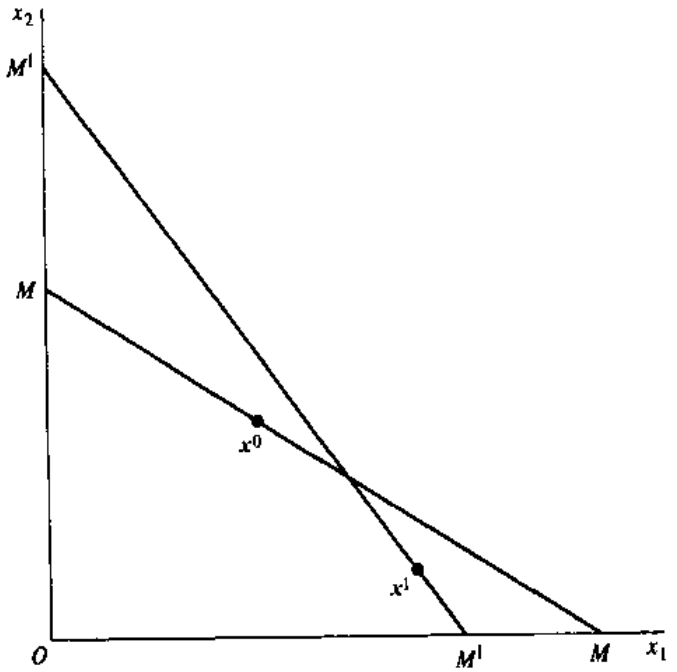

图 11-2　与显示性偏好弱公理相违背的情况。在初始价格 p^0 的情况下，消费者能够选择 x^1 但他事实上没有选择，而是选择了 x^0。因此，x^0 显示偏好于 x^1。在 p^1 价格下选择了 x^1。这时相应的预算线是 M^1M^1，消费者可以选择 x^0 但实际上他没有选择，这说明 x^1 是显示偏好于 x^0。这与弱公理相矛盾，这里需要注意的是，如果画一条无差异曲线，并使其与 MM 和 M^1M^1 分别相切于 x^0 点和 x^1 点，那么，这条无差异曲线凹向原点。弱公理把这样的行为排除在外。

命题 1　需求关系式(11-1)对于所有价格和货币收入而言都是零阶齐次。也就是说：

$$x_i^M(tp_1,\cdots,tp_n,tM)\equiv x_i^M(p_1,\cdots,p_n,M)$$

证明：当价格和收入是$(\boldsymbol{p}^0,M^0)=(p_1^0,\cdots,p_n^0,M^0)$情况下，消费者选择了消费集是 $x^0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$。价格和收入是$(\boldsymbol{p}^1,M^1)=(p_1^1,\cdots,p_n^1,M^1)$时，消费者选择的消费集是 $x_1=(x_1^1,\cdots,x_n^1)$。假设 $\boldsymbol{p}^1=t\boldsymbol{p}^0$，并且 $M^1=tM^0$。也就是说，在两种情况下消费者选择了两个不同的消费点。由于 $tM^0=M^1$，并且消费者花费了整个预算，那么：

$$t\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x}^1$$

但是 $\boldsymbol{p}^1=t\boldsymbol{p}^0$，因此得到：

$$t\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0=t\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1$$

或者：

$$\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{x}^1 \tag{11-3}$$

因为消费者可以选择 x^1 而事实上没有选择，所以等式(11-3)说明了 x^0 显示偏好于 x^1。因此，如果消费者选择了 x^1，那么说明 x^0 比 x^1 更贵，也就是说：

$$p^1x^1<p^1x^0 \tag{11-4}$$

但是，$p^1=tp^0$ 并代入(11-4)式，可以得到：

$$tp^0x^1<tp^0x^0$$

或者：

$$p^0x^1<p^0x^0 \tag{11-5}$$

但是，(11-5)式和(11-3)式是互相矛盾的。因此，$x^1\neq x^0$ 的假设是错误的。所以，显示性偏好的弱公理说明需求关系式(11-1)是零阶齐次。

命题 2 弱公理隐含说明需求关系式(11-1)是单值的，也就是说任给一个价格收入向量(p,M)，消费者只选择一个消费点。

证明：事实上，本定理是定理 1 的一种特殊个例。只是在命题 1 证明过程中令 $t=1$ 即可。命题 1 对于所有 $t(t>1)$的情况都成立。因此，当 $p^1=p^0$，$M^1=M^0$ 时，有且仅有一个消费集被选中。如果消费者选择了两个消费集，那么其中每一个都显示偏好于另一个，这明显与显示性偏好弱定理相矛盾。

可见，效用分析中所隐含的需求函数的两个属性：单值性和零阶齐次性，同样也隐含在显示性偏好的弱公理之中。但是，更重要的是，弱公理还隐含着另一个重要的结论，即希克斯—斯拉斯基项类型的替代项$\partial x_i^M/\partial p_i+x_i\partial x_i^M/\partial M$，其符号为负。我们定义：

$$s_{ij}=\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}+x_j\frac{\partial x_i^M}{\partial M} \tag{11-6}$$

但是，我们不能称这些项为纯替代效应，或者补偿性变化，因为我们还没有证明对于该消费者而言是否存在一个效用函数。事实上，单靠弱定理并不足以来证明上述命题。在效用还没有被定义之前，无差异及效用保持不变的概念是无意义的。但是，我们能证明以下命题。

命题 3 在显示性偏好弱定理的假设下，由 s_{ij} 组成的矩阵是半负定矩阵。

证明：我们假设需求曲线还是(11-1)定义的函数，$x=x^M(p,M)$是可以求微分的函数。

令 $p^1=p^0+\mathrm{d}p$，$x^1=x^0+\mathrm{d}x$，其中导数说明在切平面上移动。根据弱公理，得到：

$$p^0x^0=p^0x^1 \quad \text{隐含着：} p^1x^1<p^1x^0$$

其中 p^1 和 x^1 是上述定义的内容，因此可以得到：

$$p^0x^0=p^0(x^0+\mathrm{d}x) \tag{11-7}$$

这隐含着：

$$(p^0+\mathrm{d}p)(x^0+\mathrm{d}x)<(p^0+\mathrm{d}p)x^0 \tag{11-8}$$

等式(11-7)可以简化成 $p^0\mathrm{d}p=0$，并且等式(11-8)可以简化成：

$$(p^0+\mathrm{d}p)x^0+(p^0+\mathrm{d}p)\mathrm{d}x<(p^0+\mathrm{d}p)x^0$$

或者：

$$(p^0+\mathrm{d}p)\mathrm{d}x<0$$

因此，对于可求导的需求函数而言，弱公理可以表述成：

$$\mathbf{d}\boldsymbol{p}\mathbf{d}\boldsymbol{x}<0 \tag{11-9}$$

并且无论何时都有：

$$\boldsymbol{p}\mathbf{d}\boldsymbol{x}=0 \tag{11-10}$$

也就是说，无论什么时候，只要 $\sum p_i \mathrm{d}x_i = 0$，那么都有 $\sum \mathrm{d}p_i \mathrm{d}x_i \leqslant 0$。并且当所有价格以相同的比例变化时，(11-9)的等式才能成立，即 $\mathbf{d}\boldsymbol{p}\mathbf{d}\boldsymbol{x}<0$。现在，我们把关系式(11-9)和(11-10)与希克斯—斯拉斯基项，即于(11-6)中定义的 s_{ij} 项联系起来。对于每一个需求函数 $x_i = x_i^M(p_1, \cdots, p_n, M)$ 而言，

$$\mathrm{d}x_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j\right) + \frac{\partial x_i^M}{\partial M}\mathrm{d}M \tag{11-11}$$

但是，当 $\sum_{j=1}^{n} p_j \mathrm{d}x_j = 0$，有：

$$\mathrm{d}M = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{d}p_j + \sum_{j=1}^{n} p_j \mathrm{d}x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{d}p_j \tag{11-12}$$

把(11-12)式代入(11-11)式中，可以得到：

$$\mathrm{d}x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}\mathrm{d}p_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i^M}{\partial M} x_j \mathrm{d}p_j$$

或者：

$$\mathrm{d}x_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i^M}{\partial M}\right)\mathrm{d}p_j = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\mathrm{d}p_j \tag{11-13}$$

在等式(11-13)中应用等式(11-9)，可以得到：

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}p_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}\mathrm{d}p_i \mathrm{d}p_j \leqslant 0 \tag{11-14}$$

当所有价格以相同的比例变化时，等号成立。关系式(11-14)说明，由斯拉斯基项组成的矩阵是半负定矩阵。在推导最大化问题的一阶条件中，我们所采用的方法也可以推导出上述结果，即 $s_{ii} \leqslant 0$(通常是 $s_{ii}<0$)。这也就是说，自替代效应为负。

那么，关系式(11-9)和关系式(11-10)意味着什么呢？根据效用分析框架，在效用固定的前提下，关系式(11-9)和关系式(11-1)隐含着一个重要的条件，即 $p_i \mathrm{d}x_i = 0$。当效用固定时，即 $U(x_1, \cdots, x_n) = U^0$，其中 U^0 是一个定值。根据预算约束条件下效用最大化问题的一阶条件，可以得出：

$$\mathrm{d}U = \sum U_i \mathrm{d}x_i = \lambda \sum p_i \mathrm{d}x_i = 0$$

因此，在本例中，假设非饱和性($\lambda \neq 0$)成立，即 $\sum p_i \mathrm{d}x_i = 0$。这样，$\mathrm{d}x_i$ 可以被解释成

纯替代性移动。如果只有一种价格 p_j 变动，也就是说 $dx_i=0$，其中 $i \neq j$，那么关系式(11-9)说明 $dp_j dx_i<0$。或者如效用分析所隐含的那样，即自替代效应为负。但是，由于目前我们还没有证明效用函数的存在性，因此这些分析都只是在这一点上的分析。

消费者理论中的显示性偏好方法，最初提出的目的是，作为效用分析方法的可操作性的替换方法，因为效用分析方法有一定的含糊不清。事实上，我们发现，显示性偏好弱定理隐含了内容几乎和效用分析一样多，因此，两者实际上是等价的。弱公理惟一没有隐含的结果是斯拉斯基项的对称性，即 $s_{ij}=s_{ji}$。因为 $s_{ij}=s_{ji}$ 是效用理论的必然结果，因此，如果没有这一结果，肯定不存在效用函数。于是，就出现这样的问题。我们能否使显示性偏好弱公理得到加强，使其隐含对称性？这样，显示性偏好理论和效用分析方法就可能完全等同了。豪斯豪科于 1950 年提出这一问题，我们将在下一节讨论该问题及其结果。

11.2 显示性偏好强公理和积分问题

不能从显示性偏好弱公量中推导出斯拉斯基替代项的对称性，这初看起来是一个很烦人的细节。但是，对于一个给定的消费者而言，如果他的确不存在效用函数。那么，我们会经常发现，这个消费者会表现出一些古怪的行为，同时，这些行为和我们在正常情况下观察到的消费者行为不一致。那么，现在让我们来看一看哪些行为并没有被显示性偏好弱定理排斥在外。

假定有 3 个消费集 $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2$，并且消费者分别以 $\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2$ 的价格来获得。每一个消费集都代表了三个互相独立的商品消费水平。令 $\boldsymbol{x}^j=(x_1^j, x_2^j, x_3^j)$，$\boldsymbol{p}^j=(p_1^j, p_2^j, p_3^j)$，其中 $j=0,1,2$，且：

$$\boldsymbol{x}_0=(2,2,2) \qquad \boldsymbol{p}^0=(2,2,2)$$
$$\boldsymbol{x}^0=(3,1,2) \qquad \boldsymbol{p}^1=(1,3,2)$$
$$\boldsymbol{x}^0=(4,1,1.5) \qquad \boldsymbol{p}^2=(2,1.5,5)$$

初始条件是，当每种商品价格是每单位 2 美元，消费者会一次购买每一种商品 2 单位，并花掉总预算 12 美元。当 p^1 从 2 美元下降到 1 美元，而同时 p^2 从 2 美元上升到 3 美元时，价格向量变成 $\boldsymbol{p}^1=(1,3,2)$，显然消费者会增加商品 x_1 的消费而减少 x_2 的消费，这与用低价格商品替代高价格商品的规律相一致。类似的，在上述价格变化的同时，p^3 从 2 美元上升到 5 美元，消费者会减少 x_3 的消费，从原先的 2 单位下降到 $1\frac{1}{2}$ 单位。尽管 p^1 在绝对数上从 1 美元上升到 2 美元，但是相对于 p^3 的变化，x_1 显得相对的便宜，因而，消费者会增加 x_1 的消费。所以，消费集和价格的关系看上去是很合理的。

由于在这些点上显示性偏好弱公理都成立，因此，上述结果显得更加合理。尤其，我们注意到：

$$p^0x^0 = p^0x^1 = 12$$

并且，x^0 是显示偏好于 x^1。消费者事实上购买了 x^1，这说明 x^0 比 x^1 更贵，即：

$$p^1x^1 = 10 < p^1x^0 = 12$$

此外，x^1 是显示偏好于 x^2。因为：

$$p^1x^1 = p^1x^2 = 10$$

当消费者购买 x^2 时，这说明 x^1 比 x^2 更贵，即：

$$p^2x^2 = 17 < p^2x^1 = 17.5$$

但是现在，出现了一种倒置的情况：x^2 是显示偏好于 x^0，即：

$$p^2x^2 = p^2x^0 = 17$$

当消费者购买 x^0 时，这说明 x^1 比 x^0 更贵，即：

$$p^0x^0 = 12 < p^0x^2 = 13$$

从上述这个例子中我们发现，显示性偏好弱公理会导致偏好的不协调的发生。如果显示性偏好和我们常说的消费者偏好相关联的话，那么，我们不会允许这种情况出现，即 x^0 显示偏好于 x^1，x^1 显示偏好于 x^2，x^2 显示偏好于最初的 x^0。在常用的效用分析方法中，不会出现这种情况，尤其无差异曲线的不相交假设更不允许出现这种情况。但是，这种情况在上述的例子中确实出现，并且和显示性偏好弱公理完全相符。

显示性偏好弱公理中隐含的东西比效用最大化中隐含的东西少，这很正常。这种差异主要表现在对称性问题上，弱公理允许 $s_{ij} \neq s_{ji}$ 的存在。当我们考虑了弱公理，并且从这些法则中任意消去其中之一，不是这个就是那个，那么非对称性和显示性偏好的非一致性是等价的，尽管我们很难解释这种现象，但是这却是真实存在的。换句话说，如果我们能使显示性偏好弱公理加强，使其包括这样的内容，即使显示性偏好不会出现非一致的情形，那么，显示性偏好弱公理能证明消费者存在效用函数，并且该效用函数具有良好的一般性质，这些性质还括对称性，即 $s_{ij} = s_{ji}$，其中 $i, j = 1, \cdots, n$。另外，如果在弱公理的基础上再加一条假设，即 $s_{ij} = s_{ji}$，其中 $i = 1, \cdots, n$，这也能够确保效用函数的存在，并且使显示性偏好保持一致性。后来一个问题就是需求函数积分这个经典的问题。也就是说，我们能否从某个效用函数中推导出一组给定的需求函数的问题。

现在我们不妨引用豪斯豪科的话[1]，把显示性偏好强定理正式表述出来。

显示性偏好强公理　令在价格向量 p^i 下购买的商品集为 x^i，对于任一有限集 $(x^1, \cdots, x^k)$，如果 x^1 显示偏好于 x^2，x^2 显示偏好于 x^3，$\cdots$，x^{k-1} 显示偏好于 x^k；或者用代数表达即为：如果 $p^1x^1 \geqslant p^1x^2$，$p^2x^2 \geqslant p^2x^3$，$\cdots$，$p^{k-1}x^{k-1} \geqslant p^{k-1}x^k$，那么 $p^kx^k \geqslant p^kx^0$，也就是说，x^k 并不显示偏好于 x^1。

定理　个人需求函数 $x_i = x_i^M(p_1, \cdots, p_n, M)$，$i = 1, \cdots, n$，与从效用分析中推导出来的

1　H. S. Houthakker, "Revealed Preference and the Utility Function", Economoca, 17: 159-174, May 1950.

显示性偏好强定理相一致。也就是说，存在这样的一组效用函数 $F(U(x_1,\cdots,x_n))$，其中 F 是任一函数单调转换形式。当在预算约束 $p_i x_i = M$ 条件下，使该效用函数最大化，可以得到上述特定的需求函数。

由于这一"定理"涉及到一些技术性的数学条件，这些数学条件包括可导和其他一些细节，因此这里加上引号。但是，本质上，强公理与效用最大化假设是等同的。其中任意一个都隐含着另一个。不过，不幸的是，这个定理的证明超出了本书的范围。对此有兴趣的同学可以参考豪斯豪科最初的论文和他后来的一些文献。

强公理是弱公理的一般化表述。它只是把弱定理扩展到两种以上消费集的情况。一般来说，当我们对于多维度曲线性质的函数做出论述时，两个消费者之间的比较显得太弱了。例如，某个消费者拥有定义很好的无差异曲线，对于是两种商品 x_1 和 x_2 而言都是非凹的，类似的，我们可以假设商品 x_2 和 x_3 之间，以及商品 x_3 和 x_1 之间的都存在定义良好的无差异曲线。那么，这些相互独立的无差异曲线和一个总效用函数 $U(x_1,x_2,x_3)$ 相一致吗？不一定，这样整体的函数并不必然存在。尽管，这些无差异曲线在单个存在时，它们都会表现出良好的性质。但是，它们在代数上可能是不协调的，或者会出现前面例子中所出现的偏好不一致的问题。举个例子，假设在某一给定的点上，对于某一消费者而言，苹果对于桔子的边际替代率是 3 个苹果换 1 个桔子。并且假设该消费者愿意用一个桔子换两个梨子，用两个梨子换四个苹果。在一个三维的效用函数中不能产生这些的边际替代率，因为该消费者会在最初点上盘旋，并且同时对于最初的消费集和另一个消费集之间表示出无差异，尽管后面这个消费者的某种商品具有更多的数量而其他商品保持不变。但是，在二维空间中很容易画出无差异曲线。

此外，互相独立的二维无差异曲线具有的凸性并不足以保证三维无差异平面也具有类似的凸性。如果这个二维曲线凸向原点，该曲线的海赛加边矩阵是：

$$H_2=\begin{vmatrix} U_{ii} & U_{ij} & -p_i \\ U_{ji} & U_{jj} & -p_j \\ -p_i & -p_j & 0 \end{vmatrix}$$

总是非负的。但是，即使它们在单个情况下每一个都是那么正的，整体海赛加边矩阵即：

$$H_3=\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & -p_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & -p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix}$$

也不一定有恰当的符号，也就是不一定是非负。结果，即使所有整体平面的二维投影都表现出严格的拟凹性，而整体无差异平面甚少在某些点上凹向原点。这些都是微妙的几何问题。但是，即使像显示性偏好强公理这样简单的表述，都包含了多维效用函数的拟凹性这样的行为含义，这是令人惊讶的。

积分问题

假设某一经济计量学家估计了一组需求关系式 $x_i=x_i^M(p_1,\cdots,p_n,M),i=1,\cdots,n$，他请你检验一下这些估计到的函数是否能够从效用分析中推导出来。也就是说，有没有可能确定这些给定的需求函数与标准的效用分析相一致？如果有可能，怎么确定？如果有两个需求函数：

$$x_1=\frac{M}{2p_1}\quad x_2=\frac{M}{2p_2} \tag{11-15}$$

尽管我们已经知道答案，知道这些需求函数在第 10 章中已经被推导出来，但是，现在我们还得来演示其决定过程。很显然，两个函数对于价格和货币收入都是零阶齐次。并且满足：

$$p_1x_1+p_2x_2=\frac{M}{2}+\frac{M}{2}\equiv M$$

也就是说，预算约束恒成立。现在，让我们来计算斯拉斯基项 s_{ij} 组成的矩阵。注意，这里我们还不能称之为纯替代效应，因为到目前为止，我们还没有论证这样的概念。我们知道：

$$s_{11}=\frac{\partial x_1}{\partial p_1}+x_1\frac{\partial x_1}{\partial M}=-\frac{M}{2p_1^2}+\frac{M}{2p_1}\frac{1}{2p_1}=-\frac{M}{4p_1^2}$$

因此 $s_{11}<0$。类似的，我们可以得到 $s_{22}=-M/4p_2^2<0$。此外，还可以得到交叉效应，即：

$$s_{12}=\frac{\partial x_1}{\partial p_2}+x_2\frac{\partial x_1}{\partial M}=0+\frac{M}{2p_2}\frac{1}{2p_1}=\frac{M}{4p_1p_2}$$

和

$$s_{21}=\frac{\partial x_2}{\partial p_1}+x_1\frac{\partial x_2}{\partial M}=0+\frac{M}{2p_1}\frac{1}{2p_2}=\frac{M}{4p_1p_2}$$

这样，得到 $s_{12}=s_{21}$ 的结果，这是我们所需要的。最后，要求由这些 s_{ij} 组成的矩阵是半负定矩阵；也就是说，要求 $s_{ii},s_{ij}<0$，并且 $s_{11}s_{22}-s_{12}^2=0$。前者我们已经证明，后者恒成立，因为：

$$s_{11}s_{22}-s_{12}^2=\left(-\frac{M}{4p_1^2}\right)\left(-\frac{M}{4p_2^2}\right)-\left(\frac{M}{4p_1p_2}\right)^2\equiv 0$$

因此，这些需求函数显示出所有一般的性质。但是，这是不是已经足够了？我们怎能确信证明效用函数存在不需要其他条件呢？让我们现在来找出一个效用函数（如果它存在的话），我们能够从该效用函数中推导出上述需求函数。由于需求函数就是一阶条件的解，而这些一阶条件是拉格朗日函数的偏导形式，所以，这个问题就是回到效用函数的积分问题。具体过程如下：如果对于上述需求函数而言，存在这样的一个效用函数 $U(x_1,x_2)$，那么沿着任何一条无差异曲线都有：

$$\mathrm{d}U=U_1\mathrm{d}x_1+U_2\mathrm{d}x_2=0$$

或者：

$$\mathrm{d}x_1+\frac{U_2}{U_1}\mathrm{d}x_2=0 \tag{11-16}$$

这也等价于：

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{U_1}{U_2} \tag{11-17}$$

这就是我们很熟悉的式子，即在任一点上，两种商品的边际替代率等于两种商品边际效用的比例。但是，在该选择到的点上，$U_1/U_2=p_1/p_2$，对于这些需求函数而言，$p_1=M/2x_1$，$p_2=M/2x_2$，因此得到：

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{p_1}{p_2}=\frac{x_2}{x_1}$$

把它代到等式(11-17)，得到：

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{x_2}{x_1} \tag{11-18}$$

把上述等式进行变换得到：

$$\frac{dx_2}{x_2}=-\frac{dx_1}{x_1}$$

对于该式进行积分，得到：

$$\log x_2=-\log x_1+\log F(U)$$

或者

$$F(U)=x_1x_2 \tag{11-19}$$

这里，积分函数 $F(U)$是从斜率为 dx_2/dx_1 中的无差异曲线中任意选出的一个无差异曲线。图 11-3 画出了这种情况。

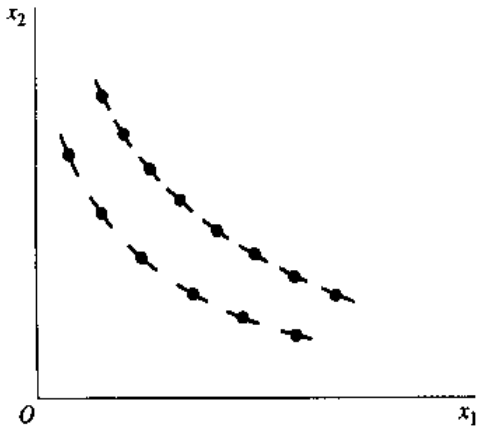

图 11-3 可积性：两变量的例子。等式(11-16)或(11-17)它必在 x_1x_2 平面上某一点(x_1, x_2)上定义了一个方向。此图用通过某一点的线段来表示这些方向因素。积分问题就是对于人为取定的函数水平，要找出和上面定义的方向有关的一个函数。在效用分析中，由那些具有等式(11-16)给定的斜曲的线段联起来就是无差异曲线。对于两种商品而言，积分总是可能的。

在本例中，碰巧遇到比较好处理的情况。一方面，我们可以很容易只用消费变量 x_1 和 x_2 来表述斜率；另一方面，本例中的微分方程很容易求积分。最后得到的效用函数就是我们在前面章节中用来推导需求函数的效用函数。下面，让我们更深入研究这些问题。

第一步是用 x_1 和 x_2 来表述斜率。这需要把需求函数进行变换，从原先的关于价格和收入的函数变成关于商品数量的函数。在大多数情况下，只要满足一个条件，这种变换就可

以实现。由于需求函数 $x_i=x_i^M(p_1,\cdots,p_n,M)$ 对于价格和收入而言是零阶齐次函数。因此，显然我们不可能变成 $p_i=p_i^*(x_1,\cdots,x_n)$ 的形式，因为，任何一个给定的消费集总是和无限的价格向量联系在一起。但是，我们可以用相对价格，或者价格相对于收入的相对值来化解。根据齐次性，我们可以知道：

$$x_i^M(tp_1,\cdots,tp_n,tM)\equiv x_i^M(p_1,\cdots,p_n,M)$$

如果令 $t=1/M$，需求函数可以写成

$$x_i^M(p_1,\cdots,p_n,M)\equiv x_i^M\left(\frac{p_1}{M},\cdots,\frac{p_n}{M},1\right)\equiv g_i(r_1,\cdots,r_n) \tag{11-20}$$

这里 $r_i=p_i/M,i=1,\cdots,n,r_i$ 代表消费者购买一单位 x_i 所必需的收入。一般而言，我们认为由相对价格需求函数 g_i 组成的雅科比矩阵具有非零行列式，并且能够根据 x_i 来求解这些相对价格，或者得到：

$$r_i=h_i(x_1,\cdots,x_n) \tag{11-21}$$

由于 $p_i/p_j=r_i/r_j$，并使用转换过的需求函数(11-12)，我们就可以用数量变量来表述斜率 $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}x_j=-p_j/p_i$。在上述例子中，即在微分方程(11-18)中，我们已经得到了这样的结果。

现在，我们已经解出 $r_i=h_i(x_1,\cdots,x_n)$，或者说对于两个变量而言，$r_1=h_1(x_1,x_2)$ 和 $r_2=h_2(x_1,x_2)$。现在，我们还要求解微分方程(11-16)或(11-17)，即：

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=-\frac{p_1}{p_2}=-\frac{h_1(x_1,x_2)}{h_2(x_1,x_2)}$$

或者：

$$h_1(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1+h_2(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2=0 \tag{11-22}$$

一般情况，这些微分方程并不容易求解。不过，只对于两个变量而言，一个很有名的数学定理确保它有解。

那么，怎样对方程式(11-12)进行积分呢？也就是说，如何对该方程进行求解？这里需要注意的是，我们假设该微分方程是某个效用函数沿着某条无差异曲线所形或的总的微分方程。也就是说，$\mathrm{d}U=0$。那么根据等式(11-16)，对于 $U=U(x_1,x_2)$ 而言，我们可知 $U_1=h_1,U_2=h_2$。而且，由于交叉项不会随着微分的阶数的变化而发生变化，因此，我们能够得到 $U_{12}=U_{21}$，或者：

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_2}=\frac{\partial h_2}{\partial x_1} \tag{11-23}$$

在前面例子的需求函数中，我们发现这些需求函数碰巧满足这个条件。在该例中，$h_1=1/2x_1,h_2=1/2x_2,\partial h_1/\partial x_2=\partial h_2/\partial x_1=0$。但是，显然如果一个积分方程 $U(x_1,x_2)$ 存在，那么 $\partial h_1/\partial x_2=\partial h_2/\partial x_1$ 是该积分方程存在的必要条件。同样，根据微分方程组的这个著名的定理，该条件也是某个积分函数存在的充分条件。因此，在前面的例子中，由于 $\partial h_1/\partial x_2=\partial h_2/\partial x_1$，所以，必然存在某个积分效用函数 $U(x_1,x_2)$，并且 $\partial U/\partial x_1=h_1,\partial U/\partial x_2=h_2$。

前面讨论的关键一点是，如果一个人从一个随意选择的一组需求函数 $x_i=x_i^M(p_1,\cdots,$

$p_n, M)$，$i=1,\cdots,n$ 出发，并且，这些需求函数满足预算约束条件和齐性条件，那么，如果微分方程(11-22)的一般形式有解，那是一件很幸运的事。这里讲的一般形式是：

$$h_1(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1+\cdots+h_n(x_1,\cdots x_n)\mathrm{d}x_n=0 \qquad (11\text{-}24)$$

在一般情况下，上述微分方程不会有解。也就是说，不能得到效用函数 $U(x_1,\cdots,x_n)$ 并使 $\partial U/\partial x_i=h_i$，$i=1,\cdots,n$。为了保证有解，我们必须对于 h_i 追加特定的约束条件。

但是，特别令人感到好奇的是，对于两个变量而言，微分方程(11-22)或(11-24)总会有解。也就是说，从两个需求函数 $x_1=x_1^M(p_1,p_2,M)$，和 $x_2=x_2^M(p_1,p_2,M)$ 出发、并且这两个需求函数满足预算约束条件和齐次性条件，那么，$h_1(x_1,x_2)$ 和 $h_2(x_1,x_2)$ 总会可积。尽管得到的微分方程：

$$h_1(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1+h_2(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2=0$$

事实上并不满足 $\partial h_1/\partial x_2=\partial h_2/\partial x_1$ 的条件，但是在两变量的情况下，碰巧总存在一个积分因子 $G(x_1,x_2)$，可以使：

$$G(x_1,x_2)h_1(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1+G(x_1,x_2)h_2(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2=0$$

可积。也就是说，$\partial(Gh_1)/\partial x_2=\partial(Gh_2)/\partial x_1$ 成立。这个重要定理的证明在许多有关积分的书里都能找到，我们在这里不再重复了。尽管这样，这里需要注意的一点是，由于 $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1=-Gh_1/Gh_2=-h_1/h_2$，因此，$G$ 函数对应的函数是 $F(U)$，在这里，$F(U)$ 是指效用函数 U 的任何一个单调转换函数。

两个变量系统总是可积的理由可以在图 11-3 中看得更清楚，同时可积性和显示性偏好之间的关系也可以得到更清晰地阐述。微分方程(11-16)或(11-17)是用来定义 x_1x_2 平面上每一点(x_1,x_2)斜率，或方向 $-h_1/h_2$。每一点都有经过这种定义的方向，这些方向其中的一部分用通过每一点的小线段来表示出来。积分函数 $U(x_1,x_2)$ 则把对应于某一个固定值的斜率联起来。在这些具有技巧性的数学条件下，我们总能完成上述过程。因此，两变量情况下微分方程(11-16)总有解。

但是，对于三种商品而言，情况就不同了。在 x_1x_2，x_2x_3，x_3x_1 平面中，每个平面都有用 $\mathrm{d}x_j/\mathrm{d}x_i=-h_i/h_j$ 定义的斜率。在显示性偏好那一节，这些都被称作无差异元素。但是，这并不能保证这些方向性元素互相之间能够连接起来。当一个消费者围绕某一点旋转时，能达到一个无差异点，但是，这个无差异点其中一种商品数量增大，而其他商品数量保持不变，那么，就能出现上述方向性元素不能连接起来的局面。这种情况还使前面提到的偏好不一致行为成为可能。但是，积分条件 $\partial h_i/\partial x_j=\partial h_j/\partial x_i$ 保证这种行为不会发生；像显示性偏好强公理一样，可积条件通过确保效用函数的存在，把非一致性行为排除在外。图 11-4 演示了这一原理。

显示性偏好理论的分析结果是，对于两种商品而言，弱公理事实上足以保证效用函数的存在。如果弱公理成立，那么，在两种商品的情况下，不会发生前面所说的偏好不一致行为。两种商品和许多种商品之间的基本差别是对于两种商品而言只有一个相对价格。在只有一个相对价格的情况下，消费者就不能在最初点周围旋转到一个具有更大商品水平的点上，并

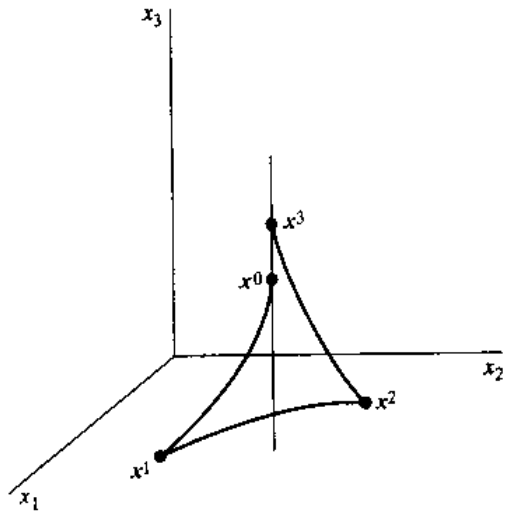

图 11-4　可积性：三种商品的情况。假设有一点 $x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$。微分方程(11-24)定义了 x_1x_3 方向的斜率项，即 $-h_1/h_3$。在该平面上积分，平行于 x_1,x_3 轴，我们碰到另一点 x^1。在 x^1 点，在平行于 x_1,x_2 轴的 x_1x_2 平面上定义了一个方向项，即 $-h_1/h_2$。沿着这些曲线进行积分，我们会遇到另一点 x^2，在该点上又回到了 x_1 的值。在 x^2 点上，在 x_2x_3 平面上定义了一个方向项，即 $-h_3/h_2$。沿着这条曲线积分，我们会遇到像 x^3 这样的点，该点和 x^1 具有相同数量的效用水平，但比 x^1 具有更多的商品 x_3。不过，可积性条件排除了这种旋转过程。为了得到性质良好的无差异平面，对于效用函数 $U(x_1,x_2,x_3)$ 而言，诸如 x^3 点必须和 x^0 点重合。这样，路径 $x^0\to x^1\to x^2\to x^3$ 代表了沿着一个无差异平面上的移动轨迹。只有在显示性偏好弱公理成立的条件下，才可能出现如图中所示的 $x^0\to x^1\to x^2\to x^3$ 的路径。强定理通过假设该轨迹中最后一点不能显示偏好于第一点而有效地排除了图中所画情形。

且，同时还能保持在相同的无差异曲线上。在三种商品情况下，如果只满足弱公理，则可能出现上述这种情形，即偏好不一致的情形。

那么，需求函数自身有什么条件下可以确保其可积？事实上，存在这样的条件。但是，很不幸的是，我们不能在这里证明，斯拉斯基项 $s_{ij}=x_i^M/p_j+x_j\,x_i^M/M$ 的对称性足以保证能够从中推导出需求函数的效用函数的存在，因为这需要更高的技巧。如果给定这种对称性，那么斯拉斯基项 s_{ij} 可以被解释成为补偿需求曲线的斜率，即偏导 $x_i^U(p_1,\cdots,p_n,U)/p_j$。由于 $x_i^U/p_j=x_j^U/p_i$，因此，微分表达式 $x_1^U\mathrm{d}p_1+\cdots+x_n^U\mathrm{d}p_n$ 是严格的，也就是说它是可积的。根据包络定理我们可知，支出函数或成本函数 $M^*(p_1,\cdots,p_n,U)$ 具有 $M^*/p_j=x_j^U$ 的性质，因此，上述微分表达式显然可以写成：

$$\mathrm{d}M^*=\frac{\partial M^*}{\partial p_1}\mathrm{d}p_1+\cdots+\frac{\partial M^*}{\partial p_n}\mathrm{d}p_n=x_1^U\mathrm{d}p_1+\cdots+x_n^U\mathrm{d}p_n$$

因此，$M^*(p_1,\cdots,p_n,U)$ 就是该表达式的积分方程，并且我们知道它是存在的。因为 $\partial^2M^*/\partial p_i\partial p_j=\partial x_j^U/\partial p_i=\partial x_i^U/\partial p_j=\partial^2M^*/\partial p_j\partial p_i$。这样，如果斯拉斯基项是对称的，那么，支出函数就具有良好的性质。根据以前章节的讨论，我们知道对应的效用函数肯定存在。

现在，让我们来验证两变量情形下总是可积的结论。假定有两个需求函数 $x_1=x_1^M(p_1,p_2,M)$ 和 $x_2=x_2^M(p_1,p_2,M)$，并且假设：

$$p_1x_1^M+p_2x_2^M\equiv M \tag{11-25}$$

和

$$x_i^M(tp_1,tp_2,tM)\equiv x_i^M(p_1,p_2,M)\quad i=1,2 \tag{11-26}$$

也就是说，需求函数满足预算约束条件和齐次条件。如果这些需求函数是可积的，即肯定存

在某个效用函数，并且可以从该效用函数能够推导出这些需求函数，那么，我们会发现 $s_{12}=s_{21}$。让我们来看一看是否会出现这种情况。为了减少符号的混乱，我们将省略上标。

根据齐次性和等式(11-25)，并且运用欧拉定理，我们可以得到：

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}p_1+\frac{\partial x_1}{\partial p_2}p_2+\frac{\partial x_1}{\partial M}(p_1x_1+p_2x_2)\equiv 0$$

在上述等式推导中要用到 $M=p_1x_1+p_2x_2$ 的条件。对上式进行合并同类项，得到：

$$p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}+x_1\frac{\partial x_1}{\partial M}\right)+p_2\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_2}+x_2\frac{\partial x_1}{\partial M}\right)\equiv 0$$

或者：

$$p_1s_{11}+p_2s_{12}\equiv 0 \tag{11-27a}$$

用类似的方法，对于 $x_2(p_1,p_2,M)$ 应用欧拉定理，得出：

$$p_1s_{21}+p_2s_{22}\equiv 0 \tag{11-27b}$$

把等式(11-27)扩展到 n 种商品的情形，得到一个一般化的式子，即：

$$\sum_{j=1}^{n}p_js_{ij}\equiv 0 \quad i=1,\cdots,n \tag{11-28}$$

现在来考查预算关系式(11-25)。把该式两边对 p_1 求导，得到：

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\equiv -x_1$$

把(11-25)式两边对 M 求导，得出：

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial M}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial M}\equiv 1$$

对于该式，两边同乘上 $-x_1$，并把得到的式子代到前面式子中，得到：

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\equiv -p_1x_1\frac{\partial x_1}{\partial M}-p_2x_1\frac{\partial x_2}{\partial M}$$

合并同类项，得到：

$$p_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}+x_1\frac{\partial x_1}{\partial M}\right)+p_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1}+x_1\frac{\partial x_2}{\partial M}\right)\equiv 0$$

或者：

$$p_1s_{11}+p_2s_{21}\equiv 0 \tag{11-29a}$$

用类似的方法，通过把预算关系式对 p_2 求导，我们能得到：

$$p_1s_{12}+p_2s_{22}\equiv 0 \tag{11-29b}$$

更一般的情形，对于 n 种商品而言，有：

$$\sum_{i=1}^{n}p_is_{ij}\equiv 0 \quad j=1,\cdots,n \tag{11-30}$$

注意，在等式(11-28)中是对 j 跨度求总和，而在等式(11-30)中是对 i 跨度求总和。这些等

式说明，对于任何商品、任何价格而言，斯拉斯基项的加权总和为零，其中权重就是价格。我们在推导这些等式的过程中并不需要用到效用理论。惟一的假设是消费者具有性质良好选择函数，并且，这些函数满足预算约束条件和齐次性条件。

显然，对于两种商品而言，根据等式(11-27a)和等式(11-29a)，可知 $s_{12}=s_{21}$。因此，的确总是可以找到一个效用函数 $U(x_1,x_2)$，并且能从该效用函数中推导出货币收入需求函数 $x_i=x_i^M(p_1,p_2,M)$，$i=1,2$。如果再在斯拉斯基项的追加负半定的性质，即 $s_{11}<0$，$s_{22}<0$，同时，根据等式(11-27)或(11-29)可知 $s_{11}s_{22}-s_{12}^2=0$，那么，该效用函数就是具有我们在消费理论中所说的凸无差异曲线常有的一般性质了。

这些结果的重要性在于，它们表明斯拉斯基项的负半定性和对称性组成了消费理论的所有内涵，因此，不可能有关于效用理论的独立的其他结论。任何其他结果，如 Le Chatelie 效应，都可以从这些假设或者从效用理论中推导出来。此外，由于显示性偏好强公理保证了效用函数的存在，因此，这些方法在消费理论中都是等价的。

11.3　复合商品定理

经济系统的一个特征是大量的变量之间相互作用，现代经济所生产的商品的数量达到几百万或几十亿种，所制造的工作、技能和资本又是数不胜数。的确，如果没有对于现实实体进行简化或抽象，要分析这样的系统对于大多数人来说是不可能的。在本书的第 1 章，我们讨论了在科学研究中假设的重要性，尤其是那些为了建立可检验的理论而必要的简化。在这节中，我们将对这个过程进行研究，尤其是许多种商品整合在一起成为一种复合商品的方法。

大多数教科书和文章在讨论经济学问题时，一般都把世界简化成两种商品，或者两种产品要素。例如，一种通常是所要分析的商品，另一种通常称为“所有其他商品”或者所有其他“紧切相关”的商品。那么，这种做法在多大程度上是合理的吗？在什么条件下，所有其他商品可以被看成是一种商品呢？

事实上，我们称之为商品的东西并不是一种技术性的材料。一开始认识到这个问题，是很恰当的。大多数商品有好几种特征，其中每一种特征都会给消费者带来效用。但是，通常情况下，只有这些特征中的一种会被标上商品的称号。例如鸡蛋，鸡蛋有各种各样，有不同的体积、重量，重量比体积相对容易测量(最后一个特征，即硬度，这是美国农业部曾经采用过的测量尺度。但是，在不打碎鸡蛋的情况下是不能测量到的)。另一个例子是钻石，它需要经过严密的测量。钻石是根据颜色(白色、蓝色、蓝白色、黄色等)和无瑕的水晶结构相比的程度以及切的形状(如圆形、翡翠形等)来分类。这些特征的每一项都是要经过仔细地测量，并且价格随之发生变化。由于与钻石材料高昂的价格相比，测量相对便宜多了，因此，需要对钻石进行严密细致的测量和分析。所以，人们对钻石会进行大量测量，而对于相对便宜

的商品会进行少量的测量。最后一个例子是，许多商品在当令季的时候是按份出售，而在非当令季按重量出售。当商品处于当令季，也就是说供应相对大，因而价格低，所以测量成本相对高。结果，对于商品的测量也就相对比较少。消费者只做那些他们认为可以接受的相对少的测量就可以了。因此，商品单位会在不同的时间甚至不同的地点有所不同，这主要依赖于所提供的零售服务的水平。因此，商品提法并不是一个技术术语，而很大一部分依赖于商品的经济成本性质。

但是，在接下来的讨论中我们将忽略这些事情。假设目前有几种定义很好的商品，$x_1,\cdots,x_n$，并且消费者分别以 $p_1,\cdots,p_n$ 的价格购买，假设这些商品的某个子集的商品价格同时以相同的比例变化。数学上，令 $p_0=(p_1^0,\cdots,p_n^0)$ 是初始价格向量，假设部分商品其价格 $p_{k+1},\cdots,p_n$ 都以相同的比例变化；也就是说 $p_{k+1}=tp_{k+1}^0,\cdots,p_n=tp_n^0$，这里，在初始情况下 $t=1$。（如果 $t=2$，那么所有上述商品价格都加倍。）那么，对于这 $n-k$ 种商品的同比例价格变化而言，消费者会有什么样的反应呢？

正如我们在前面章节中所指出的那样，效用理论的行为内涵都可以总结如下：即补偿性变化或斯拉斯基项 s_{ij} 形成一个对称的半负定矩阵。我们可以从最小化问题推导出纯替代效应，所谓的成本最小化问题是：

最小化

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$$

使满足于

$$U(x_1,\cdots,x_n)=U^0$$

支出函数 $M^*(p_1,\cdots,p_n,U_0)$ 具有如下性质，即 $\partial M^*/\partial p_i=M_{p_i}^*=x_i^U(p_1,\cdots,p_n,U^0)$，$M_{p_ip_j}^*=\partial x_i^U/\partial p_j$。我们在当前问题中引入一个新变量 t，当 t 变化时，为了从 x_i 中推导出补偿性变化，我们必须考察以下这个模型：

最小化

$$M=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i=\sum_{i=1}^{k} p_i x_i+\sum_{i=k+1}^{n} tp_i x_i \tag{11-31}$$

满足于

$$U(x_1,\cdots,x_n)=U^0 \tag{11-32}$$

目标函数(11-31)也可写成：

最小化

$$M=\sum_{i=1}^{k} p_i x_i+ty \tag{11-33}$$

这里 $y=\sum_{i=k+1}^{n} p_i x_i$，指的是消费者在从商品 $k+1$ 直到商品 n 上的总支出，这些商品价格都以相同的比例变化。当 $t=1$ 时，关系式(11-33)和关系式(11-31)相同，因为都在同一需求点上。现在，我们通过用第 7 章所得到的对偶结果来分析 t 从 1 开始发生变化的情形。因为 $\partial M^*/\partial t=M_t^*=y^U=\sum_{i=k+1}^{n} p_i^0 x_i^U$，所以：

$$M^*_{ip_j}=\frac{\partial y^U}{\partial p_j}\quad j=1,\cdots,k$$

并且由这些项组成的$(k+1)\times(k+1)$矩阵：

$$M^*_{\mu}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1^U}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_k^U}{\partial p_1} & \dfrac{\partial y^U}{\partial p_1}\\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial x_1^U}{\partial p_k} & & \dfrac{\partial x_k^U}{\partial p_k} & \dfrac{\partial y^U}{\partial p_k}\\ \dfrac{\partial x_1^U}{\partial t} & & \dfrac{\partial x_k^U}{\partial t} & \dfrac{\partial y^U}{\partial t}\end{pmatrix} \tag{11-34}$$

一定是负半定矩阵。比例因子 t 进入该矩阵的方式和价格 $p_1,\cdots,p_k$ 进入该矩阵的方式一样，并且花在 $x_{k+1},\cdots,x_n$ 上的总支出 y^U 进入该矩阵的方式与其他数量变量一样。因此，该补偿性变化与定义良好的 $k+1$ 个补偿性需求函数中的任何一个没有什么差异。因此，当一些商品的价格按同一比例同时变化时，这些商品的总支出的变化和其他任何一种商品类似，新变量 y 被称为复合商品，是首先由希克斯在《价值和资本》一书中提出的。复合商品和其他任一决策变量是一类似的，例如对于自身"价格"t 的变化的反应是负的，即：

$$\frac{\partial y^U}{\partial t}<0 \tag{11-35}$$

此外，由(11-34)中交叉项的对称性可知：

$$\frac{\partial y^U}{\partial p_i}=\frac{\partial x_i^U}{\partial t}\quad i=1,\cdots,k \tag{11-36}$$

同时，它还具有一般商品的条件，即：$\partial x_i^U/\partial p_j=\partial x_j^U/\partial p_i$。

这个重要的定理说明了，在许多经济理论中，二维图形分析是具有合理性的。我们很容易在实证研究中碰到这样的情形，在经济系统中，一种商品价格发生重大变化，但是在其他商品群中商品并没有发生什么样的变化。这部分商品因此可以被看成是单一商品，因为，对于相对价格变化而言，一个商品价格变化等同于群体内所有商品价格变化。因此，在经济分析中，只考察所研究商品而假设其他商品价格不变的简便的方法，大致和效用理论相符，并且在许多实证例子中也具有合理性。

把商品苹果运输出去

现在，让我们来考察另一种类型的价格变化，即一些商品价格都增加某一固定的数额。也就是说，把价格变化效应 t 加到 $p_1,\cdots,p_k$，得到 $p_1+t,\cdots,p_{k+t},p_{k+1},\cdots,p_n$。当前 k 种商品面临同样的税负或运输成本时，会出现这样情形，在本例中，复合商品 $z=\sum_{i=1}^{k}x_i$，像一种单一商品似的。

再次，我们来考察相关的成本最小化问题：

最小化

$$M=\sum_{i=1}^{k}(p_i+t)x_i+\sum_{i=k+1}^{n}p_ix_i \tag{11-37}$$

使满足于

$$U(x_1,\cdots,x_n)=U^0$$

其中，我们可以得出补偿性需求函数：

$$x_i=x_i^U(p_1,\cdots,p_n,t,U^0) \tag{11-38}$$

但是，M 是一个关于 t 的线性函数，令 M^* 表示支出函数，即 $M^*(p_1,\cdots,p_n,t,U^0)$，我们能够得到：

$$\frac{\partial M^*}{\partial t}=\sum_{i=1}^{k}x_i^U\equiv z^U(p_1,\cdots,p_n,t,U^0) \tag{11-39}$$

因此，z^U 代表了其他任何一种商品的性质。M^* 对于 $p_1,\cdots,p_n$ 和 t 的两阶偏导矩阵而言，它是对称的和负半定的，即：

$$M_{\mu}^*=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1^U}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1^U}{\partial p_n} & \dfrac{\partial x_1^U}{\partial t}\\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial x_n^U}{\partial p_1} & & \dfrac{\partial x_n^U}{\partial p_n} & \dfrac{\partial x_n^U}{\partial t}\\ \dfrac{\partial z^U}{\partial p_1} & & \dfrac{\partial z^U}{\partial p_n} & \dfrac{\partial z^U}{\partial t}\end{pmatrix} \tag{11-40}$$

从上述对称性中，我们可知：

$$\frac{\partial z^U}{\partial p_i}=\frac{\partial x_i^U}{\partial t} \tag{11-41}$$

根据 z^U 的定义和 $s_{ij}=s_{ji}$ 的事实，我们可以得出：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial t}=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_j^U}{\partial p_i}=\sum_{j=1}^{k}s_{ji}=\sum_{j=1}^{k}s_{ij} \tag{11-42}$$

复合商品 z^U 的自效应是负的，即：

$$\frac{\partial z^U}{\partial t}<0 \tag{11-43}$$

从最初的替代矩阵中，我们也可以推导出上述结果，令 $s_{ij}=\partial x_i^U/\partial p_j$，并且 $s_{it}=\partial x_i^U/\partial t$，$s_{tt}=\partial z^U/\partial p_t$，根据负半定定义，我们可知：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s_{ij}h_ih_j\leqslant 0 \tag{11-44}$$

这里，当 h_i 和其价格同比例时，等号成立。令 $h_i,h_j=1,i=1,\cdots,k$ 且 $h_i,h_j=0$，$i,j=k+1,\cdots,n$，那么(11-44)可写成：

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}s_{ij}<0$$

假设所有商品价格都不相等，那么上式就是等达式(11-43)。

现在，让我们来更深入地研究这类价格变化的实证效应。用复合商品定理，我们来考察 3 种商品的例子，即 x_1，x_2 和 x_3，这里 x_3 是前一节所定义过的复合商品。假设商品 1 和商品 2 是从另一个地方运输过来，而商品 x_3 是本地生产。这样，从本地消费者的角度来看，这 3 种商品的价格分别是 p_1+t，p_2+t 和 p_3，其中 p_1 和 p_2 分别是原产地的价格。[2] 下面是西雅图一个发怒的消费者写给“西雅图时报”的一封抱怨信。[3]

“为什么华盛顿苹果在本地市场上又小又老！它们干枯的样子看上去好像这些苹果是从去年就摘下来储存的冷冻室中取出来的一样。最近，一些种植苹果的朋友带给我们一些他们采摘的苹果，这些苹果比在本地买到的苹果大四倍。这些大而味美的苹果都跑到什么地方去了？它们是被运到欧洲或亚洲去了吗？在西雅图还能买到这样的苹果吗？”

来自贸易代表的一个答复信声称，是跨国游动的交易者(砍价者)存在问题。

“她所看到的苹果可能是 1974 年采摘的苹果，或者是那巡回游动的交易者不断储藏的低等苹果”。

一些天以后，我用本书的方法来分析这个事例：[4]

苹果和苹果之间的比较

对于 M、W、P 的抱怨，他说所有好的苹果都被运输到亚洲，你可能会有兴趣知道，在 U、W 经济系的课堂考试题目中，“把苹果运输出来”是许多年来一直很受偏爱的考题。

这是一个真实的现象，也很容易解释：

例如，假设一个好苹果成本是 10 美分，而一个坏苹果是 5 美分。由于决定吃好苹果的成本与决定吃坏苹果的成本是一样的，那么，我们可以说好苹果成本大体上是坏苹果成本的 2 倍。2 个好苹果的成本相当于 4 个坏苹果。

现在假设把苹果运输到亚洲，每个苹果需要运费 5 美元。那么，在东方，好苹果是 15 美元，而坏苹果的价格是每个 10 美元，但是，现在吃两个好苹果成本相当于 3 个坏苹果成本，而不是 4 个坏苹果。尽管两种商品的价格都上升，但是，在东方好苹果的相对价格下降了，因此，在苹果消费中，东方人本身消费更高比例的好苹果。

这并不是合谋或暗中勾结，而是商品供求法则决定的。

另一个可以同样推理的例子法国葡萄酒。便宜的法国葡萄酒只在法国销售，从不运往

2　阿尔庆(A. Alchian)和阿仑(W. Allen)在他们原理性的教材《大学经济学》(《University Economics》)以及其浓缩的版本《交易和生产》(《Exchange and Production》)中首先分析了这个问题。

3　Seattle Times, Sunday, Oct. 19, 1975.

4　Seattle Times, Tuesday, Oct. 28, 1975.

美国。一个可能的原因是，法国的消费者讨厌把最好的法国葡萄酒运往美国。在19世纪20年代，有两种等级的烟草：高级烟草每包10美分，而标准烟草每包5美分。当政府对烟草征收10%的税收时，高级烟草对于标准烟草的相对价格变成了4∶3，而不是3∶1，结果，标准烟草在市场中消失了。今天，一些州对葡萄酒征税是以瓶为单位，也就是以容积为单位。这种征税的效应使好葡萄酒的相对价格下降，从而刺激好酒的消费。饭店购买了大多数被农业部评定为最好等级的牛肉，这可能是出于饭店之间的合谋行为，但是更有可能是饭店用好牛肉替代低价格牛肉。在国内，一块牛排4美元，而一块USDA牛排则只要2美元。如果加上饭店舒适的服务费20美元，那么其相对价格是24∶22，而不是2∶1。还是这个原因，我们很少在高档饭店的菜单中找到汉堡包。类似的，我们很少看到昂贵的房屋会建立在便宜的地皮上。地皮越贵，造价越高的房屋就相对便宜。

当然，我们在这里提出疑问。对于苹果的例子道理是很清楚的，因为消费者从运输成本中没有得到效用。但是，饭店舒适的环境或一块好的地皮却可以给消费者带来效用，原则上消费者可以把两者分离开来购买。因此，对于这个例子，复合商品定理就不能直接应用了。我们必须考虑其他关系，例如，烹调服务对于牛肉是互补关系，还是替代关系？

格等(John Gould)和斯格(Joel Segall)进一步挑战阿尔庆(Alchian)和阿伦(Allen)的替代性定量[5]。他们指出，当存在3种或更多的商品时，这些商品间互相作用可以破坏所谓的替代效应。格等(Gould)和斯格(Segall)举了一个关于龙虾的例子。这引出了另一个有意思的问题：把商品运输到人们居住地或把人们运送到商品原产地，两件事是否全有不同的后果？(当然，如果由于种种原因龙虾只有在Maine才可以得到，那么，这与这里讨论的问题无关。)一些部门会发10美元的补偿给部门成员，让他们出去和部门新成员吃饭，那么，这类补贴和我们这里讨论的问题有关吗？如果我们根本不想出去吃，又会发生什么呢？这个补贴，只是简单的货币转移，只不过具有很弱的收入效应。该定理应该隐含着这样一条假设，即到Maine来的游客比本地人平均消费更高档次的龙虾。最近，艾瑞科·蒂涛那兹(Eric Bertonazz)、麦拉尼(Michael Malaney)和麦科密克(Robert McCormick)证实了这一结论。他们发现，从远方来到clenson大学观看足球比赛的那些持票人，比本地人购买更贵的座位[6]。有人认为，对于这些球迷而言，运输费用是个沉没成本，但是事实上，球迷把比赛与旅游都放在一起消费。现在，让我们用数学来分析这种情形。

阿尔庆和阿伦命题是：如果x_1是优等商品(价格高)，而x_2是劣等商品，那么：

$$\frac{\partial(x_1^U/x_2^U)}{\partial t}>0 \tag{11-45}$$

注意，这里不能省略上标，学生必须牢记这些都是补偿性变化。此外，把收入效应引入本分

5 John Gould and Joel Segall, "The Substitution Effects of Transportation Costs", Journal of Political Economy, 130-137, 1968.

6 Eric Bertonazzi, Michael Maloney, and Robert McCormick, "Some Evidence on the Alchian and Allen Theorem: The Third Law of Demand?" Economic Inquiry, 31: 383-393, July 1993.

析框架使本分析更加复杂，因为，收入效应往往是不确定。将关系式(11-45)[7] 中的商数加以扩展，得到：

$$\frac{\partial(x_1/x_2)}{\partial t}=\left(x_2\frac{\partial x_1}{\partial t}-x_1\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)\frac{1}{x_2^2}$$

根据等式(11-42)，可知$\partial x_1/\partial t=s_{11}+s_{12}$，$\partial x_2/\partial t=s_{21}+s_{22}$那么：

$$\frac{\partial(x_1/x_2)}{\partial t}=\frac{x_1}{x_2}\left(\frac{s_{11}}{x_1}+\frac{s_{12}}{x_1}-\frac{s_{21}}{x_2}-\frac{s_{22}}{x_2}\right)$$

让我们把这些项变成弹性形式，令 $\epsilon_{ij}=(p_j/x_i)(\partial x_i/\partial p_j)$，我们可以得到：

$$\frac{\partial(x_1/x_2)}{\partial t}=\frac{x_1}{x_2}\left(\frac{\epsilon_{11}}{p_1}+\frac{\epsilon_{12}}{p_2}-\frac{\epsilon_{21}}{p_1}-\frac{\epsilon_{22}}{p_2}\right)$$

不过，根据补偿性需求函数的齐次性可知：$\sum_{j=1}^{n}p_js_{ij}=0$ 把它除以 x_i，得出：

$$\epsilon_{11}+\epsilon_{12}+\epsilon_{13}=0$$

和

$$\epsilon_{21}+\epsilon_{22}+\epsilon_{23}=0$$

用这些表达式去代替前面等式中的 ϵ_{12} 和 ϵ_{22}，我们可以得到：

$$\frac{\partial(x_1/x_2)}{\partial t}=\frac{x_1}{x_2}\left[\frac{\epsilon_{11}}{p_1}+\left(-\frac{\epsilon_{11}}{p_2}-\frac{\epsilon_{13}}{p_2}\right)-\frac{\epsilon_{21}}{p_1}-\left(-\frac{\epsilon_{21}}{p_2}-\frac{\epsilon_{23}}{p_2}\right)\right]$$

或者：

$$\frac{\partial(x_1/x_2)}{\partial t}=\frac{x_1}{x_2}\left[(\epsilon_{11}-\epsilon_{21})\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)+(\epsilon_{23}-\epsilon_{13})\left(\frac{1}{p_2}\right)\right]\qquad(11\text{-}46)$$

现在让我们来检查等式(11-46)。由于 x_1 是优质商品，即 $p_1>p_2$ 那么 $1/p_1-1/p_2<0$。同时，因为两种商品的质量是互相替代的，那么 $\epsilon_{11}<0$，$\epsilon_{21}>0$。于是，阿尔庆和阿伦的命题就可以写成：$\partial(x_1/x_2)/\partial t>0$。等式(11-46)中第一个复合项证明了这一点。在两个商品世界里，这是个完整的表达式，也就是说，Alchian 和 Allen 必须正确。但是，(11-46)中的最后一项 $\epsilon_{23}-\epsilon_{13}$ 是不确定的。但是，如果我们假设低质商品和优质商品与复合商品 x_3，互相作用的方式是一样的，即 $\epsilon_{13}=\epsilon_{23}$，那么该学说是合理的。只有在非对称的情形，即优质商品与第三种商品的替代关系比低质商品与第三种商品的替代关系要强，也就是说 $\epsilon_{13}>\epsilon_{23}$，那么，该学说不成立。当 p_1 和 p_2 价格都上升，例如分别增加 t，变成 p_1+t 和 p_2+t，那么，消费者为了替代 x_1 的幅度要比用 x_3 替代 x_2 的幅度大，这使该学说更加复杂。但是，对于那些临时的观察者而言，这种不对称性质实证研究上是不重要的。

7　Thomas Borchering demonstrated this algebra. See Thomas Borcherding and Eugene Silberberg, "Shipping the Good Apples Out: The Alchian and Allen Substitution Theorem Reconsidered", Journal of Political Economy, 86: 131-138, February 1978.

当 t 变化时，我们可以通过微分，而不是通过分析 x_1 对 x_2 消费量比例的方法来得出类似的结果，令 $p_1=p_2+k$，$k>0$，根据齐次性我们可以得出：

$$(p_2+k)s_{11}+p_2s_{12}+p_3s_{13}=0$$
$$(p_2+k)s_{21}+p_2s_{22}+p_3s_{23}=0$$

因为 $\partial x_1/\partial t=s_{1t}=s_{11}+s_{12}$，$\partial x_2/\partial t=s_{2t}=s_{21}+s_{22}$，

$$p_2s_{1t}+ks_{11}+p_3s_{13}=0$$
$$p_2s_{2t}+ks_{21}+p_3s_{23}=0$$

扣除以后，可以得到：

$$p_2(s_{1t}-s_{2t})=-k(s_{11}-s_{21})+p_3(s_{23}-s_{13}) \tag{11-47}$$

假设低质商品和高优质商品可以互相替代（否则整个分析将毫无意义），那么 $s_{21}>0$，这样(11-47)可边第一项，$-k(s_{11}-s_{21})$为正。这验证了我们以前提到的一个结论，即运输费用增加会增加优质商品消费的绝对量。在三种商品情形下，该分析的合理性集中于$(s_{23}-s_{13})$项，该项类似于等式(11-46)中出现 x_1/x_2 项。如果这些商品与第三种商品的相互作用方式类似，那么优质商品中被运输到远方的商品数量比低质商品多。

这里，需要指出的是，同一种商品的优质和低质是互相强替代关系的。因此，在实证研究中，我们会期望出现 s_{11}，s_{12}、s_{22}的绝对值比较低的情形，或者具有比较高的弹性。这会使等式(11-46)和(11-47)的第一项相对大。如果这些商品和第三种商品并不密切相关，那么 s_{13}和 s_{23}将会是很小。因此，从实证角度来看，Alchian 和 Sllen 的关于当运输成本或其他成本追加到两种数量的和商品上时，优质商品相对于低质商品而言，其消费量会增加的论点对于大多数商品来说是正确的。

一般情况，我们可以这样来定义同时价格变化：$p_i=p_i^0+p_i(t)$，$i=1,\cdots,k$，$k<n$，$p_i(0)=0$。这些价格变化一般不会得出有意思的比较静态的定量，结果只会使涉及到导数 $p_i(t)$的复合商品定理更复杂，并且其实证意义也是很小的。

11.4 家庭生产函数

在 1965 和 1966 年间，Gary Becker 和 Kelvin Lancaster 在他们的两篇文章中，介绍了家庭生产函数的概念。[8] 在他们的模型中，消费者不是通过在市场上购买商品直接获得效用，而是来自商品所拥有的某些特性，并且只在对这些商品进行一定形式的转化之后才获得。例如，尽管消费者在市场上购买的是生食，但只有在吃掉所有的食品之后，才获得效用，在这一过程中，需要投入相应的劳动、时间以及可能的其他投入。

8 Gary S. Becker, "A Theory of Allocation of Time," Economic Journal, 75:493-517, kSeptember 1956; and Kelvin J. Lancaster, "A New Approach to Consumer Theory," Journal of political Economy, 74:132-57, April 1966.

现代经济中生产的许多商品，其用途类似。例如，有各种各样的、不同特性的食品，同样对于服装、住房而言，情况也是如此。消费者通常选择其中一种或几种不同的特性，而放弃消费余下的所有特性。在上一个部分中，我们分析了在同一商品的两个不同特性上增加定量税或者其他成本所产生的影响。事实上，标准的效用理论是没有什么机制来区分两种商品是作为同一商品的不同特性，还是作为独立的两种商品。上一部分中的代数分析应用于任意两种用 x_1, x_2 表明的商品。(x_1, x_2)既可以表示苹果与橘子，或者是不同种类的商品，如苹果与打字机，也可以表示红色的苹果与金色可口的苹果，这两种可能性在分析时是相同的。我们理所当然地认为牛肉和猪肉是替代品，笔和纸是互补品，然而，这样的看法是基于使用这些特定商品的技术，也就是说，是将这些商品同其他商品以及投入相结合以产生效用的方式。标准的效用理论无法解释食品为什么不同于服装，住房或其他什么东西。

为了弥补这个缺陷，Lancaster 假定，消费者以价格向量 p 在市场上购得商品向量 x，并且由$z=g(x)$转化为产生效用的特性 z。广义上，该模型是：

最小化

$$U=U(z)$$

满足

$$\begin{aligned} z&=g(x) \\ px&=M \end{aligned} \tag{11-48}$$

M 在这里表示消费者收入。合并变换函数和效用函数。

最大化

$$U=U(g(x))=V(x)$$

满足

$$px=M \tag{11-49}$$

显然，在这样广泛的意义上，如果假设 $V(x)$函数具有同效用函数一样的曲度特性，则 Lancaster 模型同标准效用模型是等同的。假设(11-49)有内部解，可被驳倒的隐含条件将包含“补偿的”需求函数 $x=x^V(p,V^0)$的一般特征，$x=x^V(p,V^0)$是满足 $V(x)=V^0$(一个常数)的条件下最小化 $M=px$ 的解。这些需求函数的偏导关系在传统意义上不是真正的“纯替代效应”，因为当价格发生变化的时候，生产也会发生变化(即通过 $g(x)$变化 z)。但是，矩阵$(\partial x^V/\partial p)$是负半定这一陈述仍然对可被驳倒隐含条件的完全集有所折衷。由此，在这样的一般化程度上，该模型与标准效用理论是不可区分的。

为了使该模型更加有用，换句话说，就是能提供比一般效用分析更具洞察力的命题，因此，就要在转换函数 $g(x)$加上某种可观测到的结构。Lancaster 假设 $g(x)$是线性的，即 $z=Bx$，B是某种(恒定的)技术函数矩阵。如果对于每一个消费者而言的矩阵 B 均不同，Lancaster 进一步假定 B 对于所有消费者均为常量。也就是说，用于将 x 转换为属性 z 的技术对于每一个消费者均相同，因为如果每一个消费的矩阵 B 均不相同，则该模型很可能不具有可操作性。为了获得效用最大化 z，用 z^* 表示，消费者有必要在最小的成本下，购买

能产生 z 的 x。即消费者要求解下述"线性规划问题":最小化 px,使得 $Bx \geqslant z^*$。

这种类型的线性模型将在线性规划的章节作详细的介绍。用它足以说明可行区域即可获得 z 的集合,会是由一个具有多个角与多个面的(n 维)凸多面体构成,而不是一个"平展的"预算超平面。如果技术的变化导致产生某种属性 z_i 的成本降低,那么产生效用最大化属性的最小成本解决方案,也许就是转向某些新的市场利益或某些新商品。这似乎与观察到的情况一致。试考虑,当电子计算器和电脑的价格下降的时候,消费者就逐渐地从依赖于简单计算器的手工计算转向依赖于精密机器的复杂而广泛的计算,在这里产生效用的属性则是"计算",而产生"计算"的技术的变化则引致更多的"计算",这依赖于随技术而产生的更强有力的计算器。在传统效用分析中令人苦恼的概念"新产品"在 Lancaster 的框架里也更容易地得到解决。在传统的分析的框架中,对这一问题必须要假定一个新的效用函数,而在 Lancaster 的模型中,比如新计算机的发明,并不会导致消费者偏好的重新组合,而只是对于包含属性"计算"成本最小化问题的新的解。

上面所讨论以及所作的仍存在这样的问题,即以一种真正可观测的方式对 Lancaster 模型进行经验性的说明,仍不是直截了当的,属性的识别与测度比市场上商品的测度要困难的多。当技术系数发生变化时,即使是很少的变量,对于所购商品中属性变化的测度与预测也是相当困难的,这种困难就如同我们所熟悉的,具有三个未知量的三个线性方程解的复杂性制裁所体现的困难一样。另外一个事实就是对于补偿的变化,则 $\partial x_i / \partial p_i \leqslant 0$,这对于传统的效用理论没有任何改进,该模型应用子属性是相加的,而且是互不冲突的商品上时最为成功,比如,食品的营养价值。[9]

在 Gary Bevker 的相关文章中,他试图将时间消耗的决策也纳入到标准效用框架,通过用放弃的可以产生收入的用途来考虑时间的成本,Becker 提供了解释由于工资收入变化导致消费变化这一问题的基础,工资收入的变化是用已知符号的替代效应来解释,而不是通过特定收入效应解释的,如果工资增加导致收入增加,这表明空闲的边际价值增加。我们因而会期待消费者从时间密集的商品(指对该商品的消费需要大量的时间)调整到时间成本相对较小的商品上。用这种方式,消费的变化就可以用需求法则的结论来解释了。但在以前,消费的变化被认为是基于特定的基础之上,因而需要假定,由于收入效应而导致的在偏好或符号上的变化。

与 Lancaster 相似,Becker 假定效用是属性 z 向量的函数,即 $U=U(z)$,但是,Becker 采用一个非常简单的结构来产生属性。对于每一个 z_i,

$$T_i = t_i z_i \tag{11-50a}$$

$$x_i = b_i z_i \tag{11-50b}$$

9 Silberberg 证明当收入增加时,分配在纯营养(与味道相对)上的食物预算部分就会下降,这也可以由营养的递减的边际生产力来说明。见 Eugene Silberberg, "Nutrition and the Demand for Tastes," Journal of Political Economy, 93 (5):881-900, October 1985。

t_i 是一个参数，表示消费每单位 z_i 所需的时间，那么用于消费 z_i 的总时间就是 T_i；b_i 也是一个参数，表明每单位 z_i 所需的商品 x_i 的数量。那些 t_i 值相对较高的属性则称为时间密集的属性。

假定消费者要将消费属性的效用最大化，并满足市场预算约束和时间约束条件，T 表示所有活动可用的总时间（即一天 24 小时），T_w 等于用于工作的时间，工资率为常数 w，另外假定个人还拥有非工资收入 Y，那么：

最大化

$$U=U(z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

满足

$$\sum p_i x_i = wT_w + Y \quad 和 \quad \sum T_i = T - T_w$$

然而，由于时间与市场上的商品不可避免地由生产等式(11-50)相联系，所以，两个约束条件就可以合并。根据时间约束条件，在收入约束条件中用 $T - \sum T_i$ 代替 T_w，由此产生单独的预算条件：

$$\sum p_i x_i = w(T - \sum T_i) + Y$$

或者

$$\sum p_i x_i + \sum wT_i = wT + Y$$

将 $T_i = t_i z_i$ 和 $x_i = b_i z_i$ 代入，则导出 Becker 基本模型：

最大化

$$U(z_1, z_2, \cdots, z_n) = U$$

满足

$$\sum (p_i b_i + wt_i) z_i = wT + Y \tag{11-51}$$

我们可以将 $\pi_i = p_i b_i + wt_i$ 的值解释为消费 z_i 的“全部价格”，[10] 当消费一单位的某种属性 z_i 时，则需要支付 $p_i b_i$ 的现金和 t_i 的时间支出。该时间本来可以用来产生收入 wt_i，wt_i 则反映出消费 z_i 的一个机会成本。全部价格的总量乘以被消费属性的数量，则等于一个人全部的收入，该收入包括非工资收入和如果全天工作所带来的全部收入。

在该模型中，空闲的时间（睡眠）也是属性，即是 z_i 集合中的一部分。这一部分也许不涉及到现金的支出，由此 b_i 将为 0。所有这些时间都用固定的工资率 w 来估值，因此也要假定在该工资率下，个人想要工作多少就工作多少，而不会出现工作短缺。用于消费所有属

10　任意 z_i 的隐含价格与 z_i 的最终选择是相独立的，这仅仅是由于对于家庭生产技术的特殊假定。特别要必须假定 $z=g(x)$ 是规模报酬不变并且不存在联合生产。Becker 简单的线性技术均满足这些假定。见 Robert A. Pollak and Michael L. Wachter, “The Relevance of the Household Production Function and Its Implications for the Allocation of Time,” Journal of Political Economy, 88(2): 255-277, April 1975. For a more complete discussion of the theoretical limitations of these models.

性的全部时间是 $T_c = T - T_w = \sum T_i$。

假设充分的二阶条件成立，那么求解一阶等式就得到马歇尔需求函数：

$$z_i = z_i^Y(\pi_1, \cdots, \pi_n, w, Y) = z_i^Y(p, b, t, w, Y) \tag{11-52}$$

上式中 p, b, t 分别是价格、技术参数和时间密度的向量。应用等式(11-50)，就可以直接导出对市场上商品 x_i 以及在每一个属性上所花费时间 T_i 的需求。

比较静态分析

该模型的目的就是要解释时间的利用，我们特别感兴趣的是消费者对工资水平变化以及技术参数变化的反应。正如在标准的效用最大化模型那里，在 Becker 模型中的参数均出现在约束条件中，因此，通常不能仅仅基于最大化假说推导出不可驳倒的隐含条件。所以，我们考虑纯替代效应，可以从下述支出最小化模型中推导出希克斯需求函数：

最小化

$$Y = \sum (p_i b_i + w t_i) z_i - wT$$

满足

$$U(z_1, z_2, \cdots, z_n) = U^0$$

假设一阶条件和二阶条件均满足，则希克斯需求函数为：

$$z_i = z_i^u(\pi_1, \cdots, \pi_n, w, U^0) = z_i^U(p, b, t, w, U^0) \tag{11-53}$$

模型中 π_i 和 z_i 中的结构与标准支出最小化模型是相同的，所以 $\partial z_i^u / \partial \pi_i < 0$。又因为参数 p_i, b_i，或者 t_i 的变化均会导致 π_i 按一定比例增加，因此表明，$\partial z_i^U / \partial p_i < 0$，$\partial z_i^U / \partial b_i < 0$ 以及 $\partial z_i^U / \partial t_i < 0$。根据关系式(11-50)，同时定义希克斯需求函数 x_i^U 和 T_i^U 分别为花费在每种属性上的商品需求和时间需求，并存在下述关系：

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial p_i} = b_i \frac{\partial z_i^U}{\partial p_i} < 0$$

$$\frac{\partial x_i^U}{\partial t_i} = b_i \frac{\partial z_i^U}{\partial t_i} < 0$$

$$\frac{\partial T_i^U}{\partial p_i} = t_i \frac{\partial z_i^U}{\partial p_i} < 0$$

$$\frac{\partial T_i^U}{\partial b_i} = t_i \frac{\partial z_i^U}{\partial b_i} < 0$$

然而，b_i 变化对 x_i 的影响以及 t_i 变化对 T_i 的影响均是含混的：$\partial x_i^U / \partial b_i = \partial (b_i z_i^U) / \partial b_i = b_i \partial z_i^U / \partial b_i + z_i^U = z_i^U (1 + \epsilon_b)$，$\epsilon_b$ 是 z_i 相对于系数 b_i 变化的消费弹性，b_i 用来联系 x_i 与 z_i，该弹性必然是负的，但是整个表达式的符号却取决于其变化对于单位变动的广度和深度。类似的表达对 T_i 也成立：$T_i / t_i = T_i^U (1 + \epsilon_t)$，$\epsilon_t$ 是 z_i 相对于时间系数 t_i 变化的消费弹性，t_i 的

增加则意味着消费给定数量 z_i 所需的时间也相应增加。这增加了 z_i 的全部价格，相应的则减少了对 z_i 的消费，只有当 z_i 减少的幅度大于 t_i 增加的幅度时，花费在该属性上的全部时间才会减少。但是，由于 $x_i=b_iz_i$。所以 z_i 的减少必然会导致减少对 x_i 的消费。

对工资率变化的分析，其问题更多。只要 z_i 消费时间，则 z_i 的全部价格中就一定包含 w，因此 w 的变化会导致许多价格同时发生变化，这就妨碍了需求法则的应用。也就是说，因为 w 出现在许多(如果不是全部)的一阶等式中，这样即使是在简单的模型中，涉及到这一重要参数 w 的补偿性需求函数的可被驳倒假设也是不可能的。Becker 认为，当工资上升时，一般情况下，消费会转向时间密集程度低的商品。这看似有道理，但我们仍需要其他关于模型中不同变量价值的假设，这样才能严格地推导出这样的结果。

所有用于工作的小时数，其纯替代效应的符号是确定已知的。应用关系 $T_i=T-T_w$，我们可以用 $n+1$ 个变量 $z_i,\cdots,z_n$ 和 T_w，以及两个约束条件来表达支出最小化模型：

最小化

$$Y=\sum p_ib_iz_i-wT_w$$

满足

$$U(z_1,\cdots,z_n)=U^0$$

和

$$\sum t_iz_i+T_w=T$$

回忆一下一般方法论的定量，只要假定一阶条件和二阶条件均满足，则对只出现在目标函数中参数的比较静态分析就与无约束条件下的模型相同。在这里，w 并不出现在约束条件中，而是以格外简单的形式进入目标函数，$-wT_w$，即 T_w 的价格。因为这是最小化问题，支出函数对 $-w$ 是凹的，也就是说，$\partial(-wT_w)/\partial w<0$ 或 $\partial T_w^U/\partial w>0$，在这里，$T_w^U$ 表示工作时间的补偿性需求函数。在这个模型中，“空闲”实际上表示用于消费 z_i 的所有时间，所以有 $\partial T_C^U/\partial w=\partial(T-T_w)/\partial w<0$。因此，正如在更为简单的“劳动——空闲”选择模型中那样，工资的补偿性增加就是增加空闲的机会成本，从而导致对空闲消费的减少和对工作时间的相应增加。

正如我们上面讨论的，家庭生产理论考虑到人数行为的一个重要方面。在这个模型之后，产生了关于家庭结构、出生率、劳动力市场等的经济理论。比如，当妇女的工资增加时，相应地增加了孩子以及其他家务劳动的边际成本。所以，即使“孩子”很可能是非劣质品，但如果收入是来自于工资而非继承，那么往往是更高的收入与更小规模的家庭相联系。由双职工家庭消费的“方便食品”的上升，则可以归因于这些家庭中主妇的工资增加。更高工资的家庭倾向于购买“更高质量”的商品服务。这是因为这种质量属性减少了维修所需的时间。这个理论使我们更加严格地思考一些重要的选择，并且提供了新的基于改变机会的解释框架来代替基于偏好的解释框架。

11.5 消费者剩余

在交换理论中最让人厌烦的问题一直以来就是如何用货币收入来度量贸易所得。图 11-5中，消费者最初是在无差异曲线 U^0 上的 $x^0=(x_1^0,x_2^0)$点，所面临的价格分别是 p_1^0 和 p_2^0 以及货币收入 M^0，假设 p_1 下降至 p_1^1，消费者移到无差异曲线 U^1 上的 $x^1=(x_1^1,x_2^1)$点。比起 x^0 点，消费者在 x^1 点的情况有什么样的改善呢？一种解答方式就是看在 x^1 处，我们可以拿走多少收入而消费者的效用仍不低于最初点 x^0，用图形表示就是预算线从 x^1 平行的移动到位于原无差异曲线 U^0 上的 x^a 点。从 x^1 到 x^a 这一收入的变化量就是消费者为获得更低的 x_1 的价格所愿意支付的最大数额，这也叫“补偿性变动”，记为 M^{1a}。现在再来考虑另一种解答方式，即在最初的价格水平下，必须为消费者增加多少收入才能使其效用同 x_1 降价后的效用一样高？

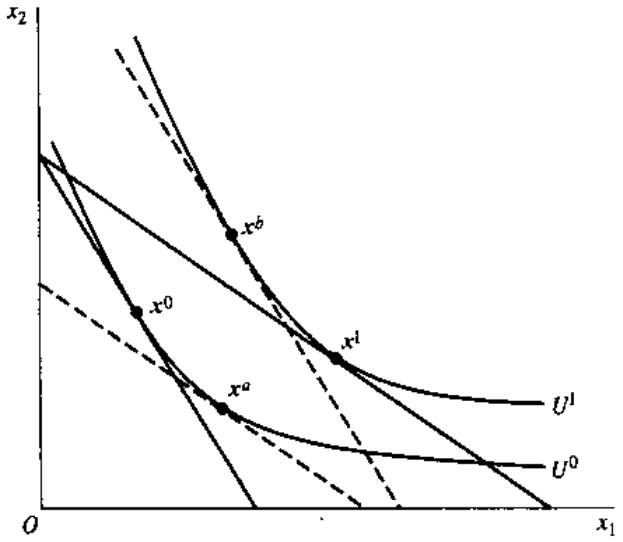

图 11-5 两种可以用来衡量交换利得的方法。假设消费者最初在 x^0 点，价格为 $p^0=(p_1^0,p_2^0)$。如果 p_1 下降至 p_1^1，消费者移动到点 x^1。消费者为获得这一较低价格的权力所愿意支付的最大值为收入 M^{1a}，M^{1a}是使预算平面从 x^1 移回到最初无差异平面 U^0 上的 x^a。这个量 M^{1a}就是价格下降时的补偿性变动。在这种情况下，消费者购买最初的商品束 x^0 与在更低的价格下，购买商品束 x^a 是无差异的。类似的，如果消费者已经拥有“权力”，即足够的收入以消费 x^1，那么提高价格 p_1，从 p_1^1 到 p_1^0 将使消费者回到 x^0。为了能使消费者自愿接受 x_1 更高的价格，就必须至少支付给消费者 M^{0b}，以使预算平面从 x^0 移到位于 U^1 上的 x^b。这样，消费者也不会比在 x^1 损失什么。这个收入，即 M^{0b}，就是等价性变动，也是升高价格条件下的补偿性变动。这两种从 x^0 到 x^1 的利得衡量方式一般不相等，如果 x_1 是正常品，则有 $M^{1a}<M^{0b}$（为什么？）

这一收入的增加量，记为 M^{0a}，是需要将预算线平行地从 x^0 移动到无差异曲线 U^1 上 x^b 点所需的收入，之所以这样移动是因为消费者在 x^0 和 x^1 点上无差异。M^{0b}就是用来“收买”消费者，使之自愿地接受 x_1 更高的价格 p_1^0，而不是更低的价格。这通常被称为等价变化，但这仅仅是对价格升高的一种补偿性变化。

上面是两种似乎合理的方法来衡量从 x^0 到 x^1 的利得。但问题是两种衡量方法，M^{1a}和 M^{0b}（以及其他可能的方法），一般情况下并不相等。消费者也许愿意多支付 10 美元以获得一个较低的价格。或者在已经获得某商品较低的价格后，消费者只有在至少 15 美元的补偿下才愿意放弃较低的价格而回到最初的情况。消费者在达到一个更高的无差异水平（真实收入增加），而且商品也不是劣质品时，他对这一效用水平的评价会更高。因此，比起让消费者从较低的真实收入水平出发，获得更多的商品所需的补偿量，让消费者放弃已有的利得，其花费更多。（对于劣质品而言，则相反的结论成立。）怎么办呢？

消费者所获的利得被称为消费者剩余。消费者的这种利得来自于可以用边际价值而非平均价值来购买商品的机会。（如果以平均价值来购买商品，则不会有什么利得，原因在于，如果我们对每一单位支付平均价值，则购买所有商品的支付就是这些商品的总价值，自然没有什么利益。）

然而，如果消费者剩余是个有用的模型，那么，至少在理论上，它是可以由一些可被观测的实际问题或实验来识别的，也就是说，消费者剩余价值的知识必须能够隐含着某些对消费者对价格与数量变化的反应具有可操作性的东西（也包括任何影响消费者利得的因素）。那些与这种可操作实验不相关的方法则是毫无用处的。

应用现代需求概念，首次对这一问题进行分析的就是马歇尔在他的《原理》一书中的阐述。马歇尔的推导过程如下：对于某种商品的任意消费量而言，需求曲线的高度体现了消费者对该商品的边际评价，这种评价是以放弃其他商品来定义的。图 11-6 表示对茶的需求，我们将用图11-6来说明马歇尔的消费者剩余。在某一价格——比如 10 美元之上，消费者不会购买茶叶，但当 $p=10$ 美元时，他就购买 1 磅。当价格 9 美元时，他购买 2 磅，8 美元时，购买 3 磅等等诸如此类。根据马歇尔的分析，消费者愿意支付 10 美元以得到 1 磅茶叶，支付 9 美元得到 2 磅，8 美元得到 3 磅，以此类推，沿着需求曲线下去。（为计算简便起见，假设这里讨论的需求曲线是线性的。）[11]

如果茶叶的市场价格是 5 美元，该消费者愿意购买 6 磅，共支出 30 美元。但是，对于该消费者而言，6 磅茶叶的整体价值却是 $10+9+8+7+6+5=45$ 美元，是相继每磅的边际评价的总和。这个总价值就是需求曲线以下的区域，这个区域减去表示消费者实际支出的长方形区域，就得到需求曲线左侧的一个三角形区域，该区域位于市场价格上，表示消费者以 5 美元价格，而不是以其连续的边际评价为基础，购买 6 磅的利得。马歇尔称该区域为消费者剩余，但还增加一个告诫。在他的文章中，马歇尔对他的分析加入一些限制，即要求“暂时忽略，同样的数额也表明了不同人的不同购买量”。在数学推导的附录（注释 VI）中，马歇尔

11　我们忽略了将离散的购买看作是连续的购买所产生的误差。

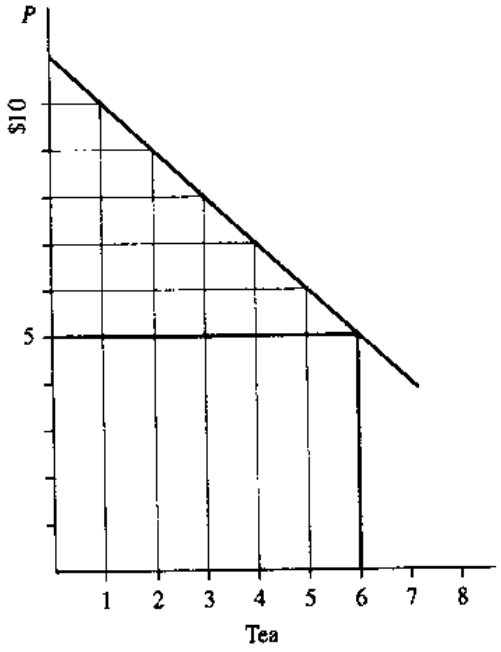

图 11-6 马歇尔的消费者剩余。如果某一消费者愿意支付 10 美元购买 1 磅茶叶、9 美元购买第二磅茶叶，等等以此类推，那么他(或她)就愿意支付 10+9+7+6+5=45 美元来购买 6 磅，马歇尔的结论是消费者剩余为 15 美元，因为在 5 美元价格水平上，6 磅茶叶需 30 美元。然而，这一观点忽略了收入效应，该收入效应产生自该消费者为每一个相继单位商品而支付的内边际价值。

通过用积分来定义，确认需求曲线下的区域等同于“商品的全部效用”，并且重新阐明上述条件：“我们假定对于单个购买者而言，货币的边际效用自始都是相同的”。[12]

这些话的含义是不清晰的，自从发表以来，就让我们陷入极大的混乱。在马歇尔的文献中似乎要表明人际间的效用比较是应用消费者剩余的必要条件；在附录中，马歇尔认为，当购买更多的商品时，货币对于消费者的满足度就会降低，从而破坏了货币与效用之间的任何线性关系。1942 年萨缪尔森进一步指明短语“不变的货币边际效用”的含混性并分析之。[13]对于马歇尔而言，货币不为消费者提供任何直接的效用，货币的作用只在于降低了交易成本。而同时期发展的瓦尔拉斯一般均衡理论则将货币作为一种商品，只是这种商品碰巧具有成为交换中介的其他属性，它作为一般等价物其价格也自然是单一的。让我们来解开这些难题吧。

回头来看图 11-6，我们没有明确地知道这是哪一种需求曲线，即当茶的价格发生变化时，哪些量是保持不变的。如果 10 美元代表了消费者愿意为 1 磅茶叶支付的最高价格，“并且他事实上也承担了那一单位所有的成本，”那么他在购买之后，必须是既不会更好，也不会更差。一个消费者为获得某种商品而愿意支付的最大值，根据定义，是使消费者在购买后与购买前无差异的数量，即在同一效用水平上。如果一个消费者实际上为接下来的每一单位商品都支付其愿意支付的最大值，那么这些边际价值的点均在希克斯曲线上，即补偿性的、效用保持不变的需求曲线。这些需求曲线是由满足 $U(x_1,\cdots,x_n)=U^0$ 条件下，最小化

12 Alfred Marshall, *Principles of Economics*, 8th ed., Macmillan, London, 1920, mathematical Note VI.

13 Paul A. Samuelson, “Constancy of the Marginal Utility of Money,” Studies in Mathematical Economics and Econometrics of, in Honor of Henry Schultz O. Lange et al. (eds.), University of Chicago Press, Chicago, 1942.

$M = \sum p_i x_i$ 推导出来的。在这里与之相关的支出函数 $M^*(p_1, \cdots, p_n, U^0) = \sum p_i x_i^U$，表明为获得效用 U^0 所需的最小成本。马歇尔的推理只对这样的需求函数才是合适的。

用代数来表示当价格下降时，消费者需求曲线左侧的区域是 $-x_i \mathrm{d}p_i$。该积分的单位就是货币收入的单位，货币收入即价格乘以数量，根据包络定理，希克斯需求函数是支出函数的一阶偏导函数。因此，这些需求曲线左侧的区域只是对支出函数值的变化：

$$-\int_{p^0}^{p^1} x_i^U \mathrm{d}p_i = -\int_{p^0}^{p^1} \frac{\partial M^*}{\partial p_i} \mathrm{d}p_i = M^*(p^0, U^0) - M^*(p^1, U^0) \tag{11-54}$$

上式中，p^0 和 p^1 是积分中价格向量的初值与终值。因而，希克斯需求曲线左侧的区域就表示在效用保持不变的前提下，支出的变化。稍微想一想，就能知道这些区域还表明消费者愿意(或不得不)支付的数量，以主动地接受产权上的某些变化，比如某种商品购买价格的变化。如果我们将刚才那个数字的例子解释为希克斯需求曲线，消费者愿意为购买每磅 5 美元的茶叶支付 15 美元，而不是为每磅价格超过 10 美元的茶叶。类似的，他愿意支付 9 美元来而对 5 美元的价格而不是 7 美元的价格。

如果不止一种价格发生变化，那么任意商品的需求曲线均会移动。怎样才能计算当两种相关商品的价格均下降时，消费者愿意支付的数量呢？一种方法是先保持 p_2 不变，计算 x_1 需求曲线左侧的区域。x_2 的需求曲线相应地移动到新的位置，那么计算 x_2 需求曲线左侧的区域，然后再加到原来的区域上。但这是我们想要的答案吗？我们换种方式，即只是计算在 p_2 变化的情况下，x_2 需求曲线左侧的部分，然后让 x_1 的需求曲线移动，将移动后的左侧的区域加到原来的计算结果上，如果是这样，结果会如何呢？我们会得到相同的结果吗？

对于希克斯需求或补偿性需求而言，无论我们选择怎样的价格变化顺序或"路径"，我们都会得到相同的答案，对于多价格的变化，令 p^0 为最初的价格向量，而 p^1 为最终的价格向量，希克斯需求曲线左侧区域的总和仍然只是价格向量初值与终值之间支出函数值的变化：

$$\begin{aligned} -\sum \int_{p^0}^{p^1} x_i^u \mathrm{d}p_i &= -\int_{p^0}^{p^1} \sum \frac{\partial M^*}{\partial p_i} \mathrm{d}p_i = -\int_{p^0}^{p^1} \mathrm{d}M^* \\ &= M^*(p^0, U^0) - M^*(p^1, U^0) \end{aligned} \tag{11-55}$$

等式(11-55)表明这些区域的总和无非就是在新的价格水平上，为达到原来的无差异水平 U^0 所需的最小支出的差值。这一支出函数值在价格初值与终值之间的差别，表示一个消费者愿意支付多少以面对最终的，而不是最初的价格。

总而言之，希克斯需求曲线左侧的区域总是可以解释为，消费者为而对一个更低价格所愿意支付的数量，或如果价格升高，为了让消费者自愿接受这一更高的价格而所必需的补偿。这个通常被称为"补偿性变化"，[14]"补偿性变化"是不需要对效用函数的形式作进一步的假设就可以很好定义的。这些区域就是支出函数值变化的几何表示，这所有满足标准曲度特征——即严格递增以及拟凹性——的效用函数均是成立的。

14　根据希克斯，当价格上升，这些区域通常被称为是等价变化。然而，这些区域在概念上等同于补偿性变化。

但是，马歇尔需求曲线左侧的区域却不是这样容易解释。与希克斯需求函数不同，从满足预算约束条件的效用最大化推导出来的马歇尔需求函数通常不是某些积分函数，如总支出或效用函数的偏导派生物。因而，马歇尔需求函数的积分就不能用某种界定很好的，价格初值与终值以及收入水平的函数值的变化来表达。

根据罗伊等式，马歇尔需求函数是间接效用函数除以收入的边际效用后的一阶偏导。因此：

$$-\int x_i^M \mathrm{d}p_i = -\int \frac{1}{\lambda^M}(\lambda^M x_i^M)\mathrm{d}p_i = \int \frac{1}{\lambda^M}\frac{\partial U^*}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i \tag{11-56}$$

等式(11-56)说明马歇尔需求曲线左侧的区域是当某种价格 p_i 变化时，效用 $\partial U^*/\partial p_i$ 变化的总和(或积分)，再乘以一个因子 $1/\lambda^M$，该因子将效用的变化转换为货币单位。转换因子本身会随 p_i 的变化而变化，也就是说，当价格变化时，1 美元在边际上的价值随其有用性不同而不同。尽管(11-56)中的积分有些用处，但它不能从与消费者行为相关的任何可操作性的实验中识别出来。

在多种价格发生变化的情况中，积分值取决于价格变化的顺序。也就是说，即使是对于已规定的价格向量的初值，以及收入向量，积分值仍不是惟一的，而是依赖于价格在初值与终值之间的路径，因此，如果不对无差异曲线的形状做进一步的假设，则单靠马歇尔需求函数，就没有一种显而易见的方式来评价由于一种或多种价格变化所导致的利得或损失。

然而如果货币的边际效用是"恒定"的，则可以将其移到积分号的外面。对该表达式求积分，得到一个终点价格(和货币收入)的函数：

$$-\int x_i^M \mathrm{d}p_i = \frac{1}{\lambda^M}\int \frac{\partial U^*}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i = \frac{1}{\lambda^M}[U(p^1, M) - U(p^0, M)] \tag{11-57}$$

在这种情况下，马歇尔需求曲线左侧的区域，与效用除以货币的边际价值后的变化相等。等式(11-57)在某种程度上挽救了马歇尔的声明，即需求曲线左侧的区域，在货币的边际效用不变的前提下，可以被解释为效用的变化，当然在这之前的许多讨论是容易引起争论的。

上一段的讨论中，我们忽略了 λ^M"恒定"的含义，即货币的边际效用。事实上，λ^M 不可能是"恒定的"，"恒定"(比如用数学来表示)就是对所有的价格和收入中的每 1 美元的有用性均为一定值，比如说是 3。让我们回想一下，λ^M 对价格和货币收入均是 -1 度齐次的。根据 Euler 理论：

$$\sum \frac{\partial \lambda^M}{\partial p_i}p_i + \frac{\partial \lambda^M}{\partial M}M \equiv -\lambda^M$$

因此，λ^M 是不可能独立于价格和货币收入，那么，如果让等式右边为非零的负值，则左边就变为零。这也就是说，收入的边际效用 λ^M 可以与所有的价格无关，但不能同时也与收入无关，或者 λ^M 可以同货币收入以及小子(或等于)$n-1$ 种价格无关，但至少要同一种价格有关。

"不变的货币边际效用"这一概念究竟具有什么样的含义，以及它对于消费者剩余的分

析有何隐含意义呢？因为$\partial U^* /\partial p_i=-\lambda^M x_i^M$且$\partial U^* /\partial M=\lambda^M$，对微分的次序应用偏导不变性的 Young 的理论，得到(忽略上标)：

$$-\left[\lambda\frac{\partial x_i}{\partial M}+x_i\frac{\partial\lambda}{\partial M}\right]=\frac{\partial\lambda}{\partial p_i} \tag{11-58}$$

假设$\lambda^M/p_i=0, i=1,\cdots,n$，在这里，$\lambda^M$可以像等式(11-57)中那样，移到整个等式的外面，则$(M/x_i)(\partial x_i/\partial M)=-(M/\lambda)(\partial\lambda/\partial M), i=1,2,\cdots,n$，也就是说，收入弹性均相等(根据预算约束，有必要一致)。因此，效用函数一定是相似的。我们用$C=(1/\lambda^M)[U^*(p^1,M)-U^*(p^0,M)]$来表示马歇尔区域，因此，对于相似的效用函数都是一些互相扩展的无差异曲线。马歇尔区域表示了效用变化时货币的变化，将效用转化为货币收入的系数是不随价格变化而变化的。

现在假设λ^M只是一种价格p_n的函数。则根据等式(11-58)，$\partial x_i^M/\partial M=0, i=1,\cdots,n-1$，由于对于从商品 1 到商品$n-1$，没有收入效用，因此，对于所有商品的马歇尔需求与希克斯需求是相同的，这种情形得自于“垂直平行”的无差异曲线(见第 10 章的思考题 20)，在这种条件下，对任何马歇尔需求曲线左侧区域的解释也同希克斯需求曲线的一样，即消费者为达到更低的价格而自愿的支付。马歇尔需求曲线左侧的区域之所以有意义，仅仅是因为这些区域也同时是希克斯曲线左侧的区域。

例　图 11-7 中画出了对某种商品x的不同的需求函数，在OA价格水平下，消费者购买$AB(=OB')$。x的马歇尔需求曲线通过点B和D，在B点，消费者的效用水平为U^0，x的希克斯需求曲线通过B点和E点，即在效用不变，$U=U^0$的条件下，由成本最小化推导出的x的需求。当价格下降到OF时，消费才对x的购买增加到FD。价格变化所导致的纯替代效应是BE，收入效应(假定为正)是$ED(=E'D')$，消费者在D点的效用水平为$U^1>U^0$。穿过点C和D的曲线就是保持效用水平为U^1条件下的对x的希克斯需求曲线。

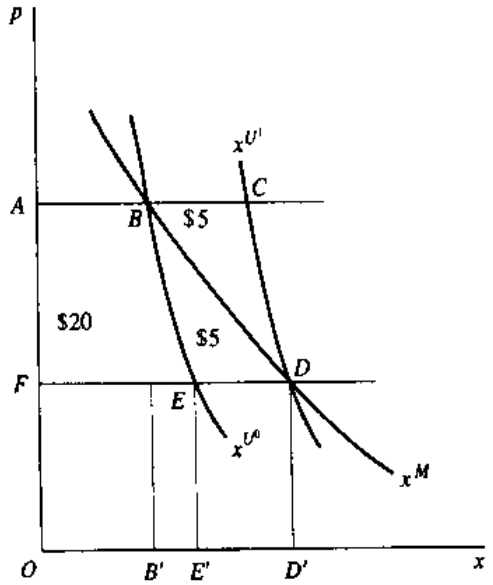

图 11-7　不同的消费者剩余。最初，在价格为OA处，消费者购买AB。当价格从OA下降到OF时，消费者沿着马歇尔需求曲线BD下降，而购买FD。BE是希克斯(效用保持不变的)需求曲线在最初效用水平上的一段，CD则是以价格OF购买FD时所获效用水平下的希克斯需求曲线。$ABEF$就是消费者为达到价格OF，而非OA所愿意支付的数额，$ACDF$则是当消费者已拥有价格OF条件下，自愿接受更高价格OA所必需的补偿。马歇尔需求曲线左侧的区域$ABDF$则没有任何实际意义。

现在假定区域 $ABEF=20$ 美元，$BDE=5$ 美元，$BCD=5$ 美元，这样，在价格 DA 和 OF 之间的 U^0 水平下的希克斯需求曲线左侧的区域为 20 美元，马歇尔需求出线为 25 美元，U^1 水平下的希克斯需求曲线为 30 美元，问题是这些数值，20、25、30 等均可通过数学计算得到，但这些数字说明了什么问题呢？换句话说，这些数值可以说明哪些涉及到消费者行为的可操作实验，即可观测性（甚至是假想的）实验？

x^{U^0} 左侧的区域，20 美元是消费者为获得价格 OF，而不是 OA，而愿意支付的数额。在 OF，消费者可以用 20 美元的总支出获得效用 U^0，该总支出是低于 OA 价格条件下的总支出的。这可以由两价格间支出函数的变化来表示。类似的，希克斯需求曲线左边的区域，30 美元则是消费者为了能自愿接受更高的价格 OA 而需要的补偿，30 美元这一更高的值表明，消费者已经有权获得更低的价格 OF 了，正如图形所清楚展示的那样，对于正常品（非劣质品），相同价格水平间不同方向的变化，其补偿性变动也是不同的，当价格变化是从低到高时，补偿性变动就有必要大于在相反方向时的补偿性变动。如果初值是 OA，则消费者愿意最多支付 20 美元以达到更低的价格 OF。而如果价格已经是在 OF 了，消费者购买更多的商品，并处于更高的效用曲线上，那么就必须支付至少 30 美元给消费者，以使其接受更高的价格水平 OA。

相反，数字 25 美元则不能回答任何可操作性的问题，也就是说，这个区域最好看作是希克斯需求曲线左侧区域的近似，除此以外，没有别的含义了。

实证上的近似

尽管马歇尔需求曲线和希克斯需求曲线左侧的区域在概念上是不同的，但很明显，实际上两个区域差别的程度主要是取决于所讨论商品的收入弹性以及价格变化的幅度。如果实际中马歇尔需求函数更容易估计（因为希克斯需求要求效用保持不变），那么就很容易从马歇尔需求来近似希克斯区域了。1976 年，Robert Willig 基于此种考虑提出一些公式。[15] 参考图 11-7，并应用 Willig 的注解，令 $C=ABEF$ 区域（在最初效用水平下的补偿性变动），$A=ABDF$（马歇尔"剩余"），$E=ACDF$，即在最终价格水平下补偿的（等价的）变动。Willig 应用泰勒级数推导出下列近似公式：

$$\frac{\eta^0|A|}{2M}\leqslant\frac{C-A}{|A|}\leqslant\frac{\eta^1|A|}{2M}$$

和

$$\frac{\eta^0|A|}{2M}\leqslant\frac{A-E}{|A|}\leqslant\frac{\eta^1|A|}{2M}$$

上式中，η^0 和 η^1 分别是在价格变动幅度内，所讨论商品的收入弹性的最大值和最小值。举

15 Robert D. Willig, "Consumer's Surplus Without Apology," American Economic Review, 66: 589 - 597, September 1976.

例来说，假如收入弹性接近一致，并且马歇尔需求函数左边的区域大致是货币收入的 5%，那么，这些区域彼此间相差不过几个百分点。然而，如果估计的是一个“福利损失”三角形而不是需求曲线左侧整个梯形区域，那么，由于我们在相似量值区域之间的比较的原因，收入效应的影响百分比可能就非常大。

还应该指明的是，对于较大的价格变化幅度而言，希克斯同马歇尔需求函数左侧区域的差别也会很大，例如，与简单 Cobb-Douglas 效用函数 $U=x_1x_2$ 相对应的需求函数，x_1 的马歇尔需求为 $x_1^M=M/2p_1$，希克斯需求为 $x_1^U=(Up_2/p_1)^{(1/2)}$。这两条需求曲线均渐近横轴 x_1。但是，在任意价格 p_1^0 下，马歇尔需求函数左侧的区域趋向于无穷，而希克斯的则相反，也就是说，当 $p_1\to 0$，$\int_{p_1}^{p_1^0} x_1^M \mathrm{d}p_1 \to \infty$，这里 $\int_0^{p_1^0} x_1^U \mathrm{d}p_1 = M^*(p_1^0, p_2, U)$。因此，如果谁想用这些区域来衡量消费者愿意支付多少以得到一个为零的价格，而不是任何有限的任意小的价格 p_1^0，那么，马歇尔与希克斯区域之间的差别都是无穷大的。上述这个特定的马歇尔需求曲线左侧的区域，在其中一个终点价格趋向于零时，失去任何经验意义。

最后，我们再来说明，马歇尔需求函数同希克斯需求函数是由斯拉斯基等式相联系的（或者，更准确地讲，是由基本恒等式(10-35)相联系），至少在理论上总是可以从其中一个需求函数计算另一个需求函数。例如，如果已经经验地估计出一个马歇尔需求函数系统，在理论上就可将该函数积分回效用函数，然后应用支出最小化假设，推导出希克斯需求。然而，这一过程对于最简单的需求系统都是难以驾驭的（尽管这一过程已在 Cobb-Douglas 效用函数上实施）。Jerry Hausman 应用罗伊恒等式曾对一个价格的单个线性需求方程进行分析。[16]但是，通常来讲，即使应用发达的计算技术支持，这样的过程仍然是复杂的，也许有一天会有更合适的近似过程。

“消费者剩余”这一短语在两种语境下使用。作为有事实为根据的经济分析工具，消费者剩余只是来自贸易利得的另一种说法。需求法则隐含着，参与自愿贸易个体为全部商品支付的数额总是较少，相反，如果贸易是基于“非此即彼”（即全部拥有或一无所有）的原则，则消费者为获得同样数量的商品所支付的数额较多。这是因为，消费者被认为可能会投入一些资源以扩大他们自己的利得。因此，消费者剩余这一概念应是垄断和卡特尔形成理论以及旨在改变交换参与者的贸易条件（也就是指产权）法案的政治经济理论的基础。

将明确的消费者剩余概念应用最广泛的，却是在福利经济学以及公共政策领域。在这种环境下，例如衡量由于一组消费税而产生的“福利损失”的函数就会被用来衡量成本，该成本是用在给定税收政策条件下所放弃的贸易机会（有时也称为自重损失）来表示的，这个损失函数被解释为价格 p_i 与边际成本差的函数，或用符号表示：

$$\mathcal{L}=f(p_1-MC_1,\cdots,p_n-MC_n)$$

16　Jerry Hausman, “Exact Consumer's Surplus and Deadweight Loss,” American Economic Review, 71(4):662-676, September 1981.

类似的，需求曲线左侧的区域被用来衡量建造不同公共设施（如水坝）的潜在利益，以降低某项利益的边际成本。

到现在为止，我们已经明确，消费者利益惟一有意义的度量就是支出函数值的变化。这样的计算不需要对效用函数施加外来的假设。而这样计算的缺陷在于依赖于一条单独的无差异曲线，并且由此，本质上也不衡量“利益”，而不是消费者在面临多个约束条件时愿意支付（或补偿）的数额。如上文提到的福利损失函数则试图将这一概念推广到边际成本变化的情况下讨论。理论上，福利损失函数可以用来计算，消费者为避免垄断、扭曲的税收或其他政策而愿意支付的数额，这些政策均会导致价格偏离边际成本，我们在有关福利经济学的相关章节再来讨论这些问题。

11.6 实证估计和函数形式

在前面的章节中，我们详细讨论了 Cobb-Douglas 以及 CES 生产函数的特点，和与它们相关的成本函数的特点。同时，我们也简要的讨论了广义 Leontief 成本函数。这些详细的讨论对于成本与生产理论来讲是十分有用的，同时也可以应用到消费者需求的经验估计上。我们将简要分析可被用于经验性需求关系估计的 CES 以及其他函数形式。

线性支出系统

线性支出系统（LES）是 Cobb-Douglas 效用函数的一般化形式，由 Klein，Rubin 和萨缪尔森（1947—1948 年）发现，并且由 Stone（1954 年）和 Geary（1950 年）进行经验性研究，因此，有时也被称为 Stone-Geary 函数。该函数基本上是 Cobb-Douglas 函数，只是起始点改为在正象限中的(β_1,β_2)点：

$$U(x_1,x_2)=\alpha_1\log(x_1-\beta_1)+\alpha_2\log(x_2-\beta_2) \tag{11-59}$$

上式中 $x_i-\beta_i$ 以及 $\alpha_i(i=1,2)$均为正，并且 $\alpha_1+\alpha_2=1$。在满足预算约束的条件下，最大化(11-59)，产生一阶条件：

$$\frac{\alpha_1}{x_1-\beta_1}-\lambda p_1=0$$

$$\frac{\alpha_2}{x_2-\beta_2}-\lambda p_2=0$$

$$M-p_1x_1-p_2x_2=0$$

根据前两个等式，我们可以得到：$p_ix_i=p_i\beta_i+\alpha_i/\lambda$，将它代入到第三个等式中，得到 $\lambda=1/(M-p_1\beta_1-p_2\beta_2)$，所以，需求函数就是：

$$x_i^M=\beta_i+\frac{\alpha_i}{p_i}(M-p_1\beta_1-p_2\beta_2) \tag{11-60}$$

如果我们用支出的形式写出需求函数，则是：

$$p_i x_i^M = p_i\beta_i + \alpha_i(M - p_1\beta_1 - p_2\beta_2) \quad i=1,2 \tag{11-61}$$

我们可以发现，每个商品的支出对所有的价格和收入均是线性的，这便是线性支出系统的由来。

Cobb-Douglas 效用函数可以被看作是 LES 的一个特例，即所有的 β 均为 0。事实上，研究 LES 的经济学家们通常将消费者描述为，首先是购买各种商品以维持生计(β_1,β_2)，然后将剩下的钱按固定的比例(α_1,α_2)分配到不同商品上。因为，边际预算份额是固定的，所以尽管偏好不相似，但 LES 的恩格尔曲线是线性的。这些收入—支出线均通过点(β_1,β_2)。

关于 LES 的间接效用函数可以通过将需求函数(11-60)代入直接效用函数(11-59)得到：

$$\begin{aligned} U^* &= \alpha_1 \log \frac{\alpha_1}{p_1}(M - p_1\beta_1 - p_2\beta_2) + \alpha_2 \log \frac{\alpha_2}{p_2}(M - p_1\beta_1 - p_2\beta_2) \\ &= \log \frac{\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}(M - p_1\beta_1 - p_2\beta_2)^{\alpha_1+\alpha_2}}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}} \end{aligned} \tag{11-62}$$

由于 $\alpha_1+\alpha_2=1$，并且直接效用函数在单调变换中不变，我们可以将(11-62)指数化，消去常量 $\alpha_1^{\alpha_1}+\alpha_2^{\alpha_2}$，因此导出下式：

$$U^* = \frac{M - p_1\beta_1 - p_2\beta_2}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}} \tag{11-63}$$

等式(11-63)可以转化为支出函数：

$$M^* = Up_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} + p_1\beta_1 + p_2\beta_2 \tag{11-64}$$

通过在(11-63)上运用罗伊恒等式，就可以得到马歇尔需求函数。而在(11-64)中运用 Shephard的辅助定理，就可以得到希克斯需求函数。

CES 效用函数

在与生产理论直接比较中，CES 效用函数具有以下形式(Arrow et al.，1961)：

$$U(x_1,x_2) = (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho} \quad \rho \leqslant 1 \tag{11-65}$$

效用最大化的一阶条件是：

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1^{\rho-1}(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{(1-\rho)/\rho} - \lambda p_1 &= 0 \\ \alpha_2 x_2^{\rho-1}(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{(1-\rho)/\rho} - \lambda p_2 &= 0 \\ M - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

合并前两个等式，可以得到：

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}\right)^{1/(\rho-1)} \tag{11-66}$$

替代弹性 σ 是：

$$\sigma = -\frac{\partial \log(x_1^*/x_2^*)}{\partial \log(p_1/p_2)} = \frac{1}{1-\rho} \tag{11-67}$$

σ 值越大，则表示两种商品商间的可替代性越高。[17]

关于 CES 效用函数的马歇尔需求函数可以通过将(11-66)代入预算约束中得到，预算约束条件可以由两种方式得出：

$$M-p_1\left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}\right)^{-\sigma}x_2-p_2x_2=0$$

或

$$M-\frac{(\alpha_1 p_2)^{\sigma}p_1+(\alpha_2 p_1)^{\sigma}p_2}{(\alpha_2 p_1)^{\sigma}}x_2=0 \tag{11-68}$$

因此：

$$x_1^M=\frac{(\alpha_1/p_1)^{\sigma}M}{(\alpha_1^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+\alpha_2^{\sigma}p_2^{1-\sigma})} \tag{11-69}$$

$$x_2^M=\frac{(\alpha_2/p_2)^{\sigma}M}{(\alpha_1^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+\alpha_2^{\sigma}p_2^{1-\sigma})}$$

由于 CES 效用函数所体现出的偏好是类似的，所以，马歇尔需求函数(11-69)对收入是线性的。

将(11-69)代入(11-66)，从而推导出间接效用函数，并且注意到 $\rho\sigma=\rho/(1-\rho)=\sigma-1$

$$\begin{aligned}U^*&=\left\{\alpha_1\left[\frac{(\alpha_1/p_1)^{\sigma}M}{(\alpha_1^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+\alpha_2^{\sigma}p_2^{1-\sigma})}\right]^{\rho}+\alpha_2\left[\frac{(\alpha_2/p_2)^{\sigma}M}{(\alpha_1^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+\alpha_2^{\sigma}p_2^{1-\sigma})}\right]^{\rho}\right\}^{1/\rho}\\&=\left[(\alpha_1^{1+\rho\sigma}p_1^{-\rho\sigma}+\alpha_2^{1+\rho\sigma}p_2^{-\rho\sigma})\left(\frac{M}{(\alpha_1^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+\alpha_2^{\sigma}p_2^{1-\sigma})}\right)^{\rho}\right]^{1/\rho}\\&=(\alpha_1^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+\alpha_2^{\sigma}p_2^{1-\sigma})^{1/\rho}\frac{M}{(\alpha_1^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+\alpha_2^{\sigma}p_2^{1-\sigma})}\\&=\frac{M}{(\alpha_1^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+\alpha_2^{\sigma}p_2^{1-\sigma})^{1/(1-\sigma)}}\end{aligned} \tag{11-70}$$

将间接效用函数求逆函数就可以得到支出函数：

$$M^*=U(\alpha_1^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+\alpha_2^{\sigma}p_2^{1-\sigma})^{1/(1-\sigma)} \tag{11-71}$$

间接的可加的对数效用函数

当明确规定效用函数之后，理论上就有可能通过满足预算约束条件下的效用函数最大化来推导出商品需求函数，但是，并不总是存在封闭形式的解。二元性理论提供了另一种途径来说明间接效用函数。具有下述条件的任何一个函数均是关于某些消费偏好，合法的间接效用函数，并且应用罗伊恒等式，就可以顺利推导出商品的需求函数：(1)收入非递减；(2)

17 当 $\rho=0$ 时，CES 函数变成 Cobb-Douglas 函数。

价格非递增，且价格具有拟凹性；(3)价格与收入连续，而且是零度齐次。

一个有用的函数形式就是“可加对数”间接效用函数，由豪斯豪科于 1965 年提出：[18]

$$U^*(p_1,p_2,M)=\alpha_1\left(\frac{M}{p_1}\right)^{\beta_1}+\alpha_2\left(\frac{M}{p_2}\right)^{\beta_2} \tag{11-72}$$

从可加对数形式得到的需求函数是：

$$x_i^M=\frac{-\partial U^*/\partial p_i}{\partial U^*/\partial M}=\frac{\alpha_i\beta_i p_i^{-\beta_i-1}M^{\beta_i}}{\alpha_1\beta_1 p_1^{-\beta_1}M^{\beta_1-1}+\alpha_2\beta_2 p_2^{-\beta_2}M^{\beta_2-1}} \quad i=1,2 \tag{11-73}$$

如果我们用 x_1^M 除以 x_2^M，其结果对于收入以及 x_1 和 x_2 的相对价格是对数线性的：

$$\begin{aligned}\log\frac{x_1^M}{x_2^M}&=\log\frac{\alpha_1\beta_1 p_1^{-\beta_1-1}M^{\beta_1}}{\alpha_2\beta_2 p_2^{-\beta_2-1}M^{\beta_2}}\\&=\log\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2}-(\beta_1+1)\log p_1+(\beta_2+1)\log p_2+(\beta_1-\beta_2)\log M\end{aligned} \tag{11-74}$$

需求等式系统中的参数则可以由最小二乘法估计。

转 LOG 函数设定形式

转 LOG 间接效用函数(Christensen, Jorgenson, Lau, 1971, 1975)曾经是在经验需求分析中最为广泛使用的函数形式，该形式的优点之一就是其灵活的函数形式：可以是对任意间接效用函数的二阶局部估计函数。基本的函数形式为：

$$\log U^*(p_1,\cdots,p_n,M)=-\sum_j\alpha_j\log\frac{p_j}{M}-\frac{1}{2}\sum_k\sum_j\beta_{kj}\log\frac{p_k}{M}\log\frac{p_j}{M} \tag{11-75}$$

上式中，$\sum_j\alpha_j=1$ 并且对于所有的 k,j 而言，$\beta_{kj}=\beta_{jk}$。

在应用时，使用支出份额等式要比需求等式更为方便，注意：

$$\frac{-\partial\log U^*/\partial\log p_i}{\partial\log U^*/\partial\log M}=\frac{-\partial U^*/\partial p_i}{\partial U^*/\partial M}\frac{p_i/U^*}{M/U^*}=\frac{p_i x_i^M}{M} \tag{11-76}$$

同时，还可以有另外一种写法：

$$\log U^*=\log M-\sum_j\alpha_j\log p_j-\frac{1}{2}\sum_k\sum_j\beta_{kj}(\log p_k-\log M)(\log p_j-\log M) \tag{11-77}$$

这样份额 ω_i 就可以由对数的求导得到：

$$\begin{aligned}\omega_i&=\frac{\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_j\beta_{ij}\log(p_j/M)+\frac{1}{2}\sum_k\beta_{ki}\log(p_k/M)}{1+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\beta_{ij}\log(p_j/M)+\frac{1}{2}\sum_k\sum_j\beta_{kj}\log(p_k/M)}\\&=\frac{\alpha_i+\sum_j\beta_{ij}\log(p_j/M)}{1+\sum_k\sum_j\beta_{kj}\log(p_j/M)}\quad i=1,\cdots,n\end{aligned} \tag{11-78}$$

18　与“可加对数”间接效用函数相关的直接效用函数以及成本函数不具有封闭形式的解。

转 Log 模型的一个特例是齐次性转 Log，这可以通过增加限制条件：

$$\sum_j \beta_{kj} = 0 \quad k = 1, \cdots, n$$

而得到。在给定这 n 个限制条件下，间接效用函数与份额等式就是：

$$\log U^* = \log M - \sum_j \alpha_j \log p_j - \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \beta_{kj} \log p_k \log p_j \tag{11-79}$$

$$\omega_i = \alpha_i + \sum_j \beta_{ij} \log p_j \quad i = 1, \cdots, n \tag{11-80}$$

等式(11-80)表明支出份额与收入是不相关的，这也说明偏好是相似的。同时，间接效用函数(11-79)也可以通过求逆函数来得到相似的转 Log 支出函数：

$$\log M^* (p_1, \cdots, p_n, U) = \log U + \sum_j \alpha_j \log p_j + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \beta_{kj} \log p_k \log p_j \tag{11-81}$$

支出函数(11-81)经常在生产理论的经验性研究中使用。[19]用总成本 C^* 来表示 M^*，并应用 Shephard 的辅助定理，就可以得到要素份额等式：

$$\omega_i = \frac{p_i x_i^*}{C^*} = \frac{\partial \log C^*}{\partial \log p_i} = \alpha_i + \sum_j \beta_{ij} \log p_j \quad i = 1, \cdots, n \tag{11-82}$$

近似完美的需求系统

理论上似乎合理的需求等式系统可以从具备下述条件的支出函数中推导出来：(1)价格和效用是连续的、非递减的；(2)关于价格是凹的，且 1 度齐次。这样的一个例子就是近似完美的需求系统(AIDS)，这可以从(对数的)成本函数推导而来：

$$\log M^* (p_1, \cdots, p_n, U) = a(p_1, \cdots, p_n) + U b(p_1, \cdots, p_n) \tag{11-83}$$

在上式中：

$$a(\cdot) = \alpha_0 \sum_j \alpha_j \log p_j + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \gamma_{kj} \log p_k \log p_j$$

$$b(\cdot) = \beta_0 \prod_j p_j^{\beta_j} \tag{11-84}$$

$$\sum_j \alpha_j = 0$$

$$\sum_j \beta_j = 0$$

$$\sum_k \gamma_{kj} = 0$$

$$\gamma_{kj} = \gamma_{jk}$$

应用 Shephard 的辅助定理，份额等式为：

19 详细说明一个转 Log 利润函数也是可能的，但是，转 Log 利润函数和转 Log 成本函数通常对应于不同的技术。

$$\begin{aligned}\omega_i &= \frac{\partial \log M^*}{\partial \log p_i} \\ &= \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j + p_i U \frac{\beta_i}{p_i} b(\cdot) \\ &= \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j + p_i \frac{\log M - a(\cdot)}{b(\cdot)} \frac{\beta_i}{p_i} b(\cdot) \\ &= \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i \log(M/P) \quad i = 1, \cdots, n\end{aligned} \tag{11-85}$$

上式中，$\log P = a(\cdot)$。Deaton 和 Muelbaner 认为可将 P 看作是价格指数，可以用 $\sum_j \omega_i \log p_i$ 来近似。若给定该近似值，需求等式系统则对价格和真实收入的对数是线性的，因此就可容易的进行估计了。

习题

1. 考虑"加法可分"的效用函数，即：

$$U(x_1, \cdots, x_n) \equiv U_1(x_1) + \cdots + U_n(x_n)$$

证明：

(a) 最多有一种商品具有递增的边际效用，并且在这种情形下(i)这种商品是正常品，而余下的所有商品为劣质品；(ii)该商品是其他所有商品的纯替代品($x_i^U / p_j > 0$)，而余下的所有商品均是彼此的互补品。

(b) 如果所有商品均是边际效用递减，(i)所有商品均是正常品；(ii)所有商品均是彼此的纯替品。

2. 对于从相加可分的效用函数推导出的需求函数，证明：

(a) $\dfrac{\partial x_i / \partial p_k}{\partial x_j / \partial p_k} = \dfrac{\partial x_i / \partial M}{\partial x_j / \partial M}$

(b) $s_{ij} = -k \dfrac{\partial x_i^M}{\partial M} \dfrac{\partial x_j^M}{\partial M}$　其中　$k = \dfrac{\lambda^M}{\partial \lambda^M / \partial M}$

3. 间接效用函数 $U^*(p_1, \cdots, p_n, M) U^*(p_1/M, \cdots, p_n/M, 1) V(r_1, \cdots, r_n)$，$r_i = p_i / M$。证明：如果 V 对 $r_1, \cdots, r_n$ 是相加可分的，则：

$$\frac{\partial x_i^M / \partial p_k}{\partial x_j^M / \partial p_k} = \frac{x_i}{x_j}$$

4. 用前面两题的结论，证明：如果 $U(x)$ 和 $V(r)$ 均是相加可分的，那么 $U(x)$ 是相似的。

5. 知一组需求函数 $x_i = x_i^*(p_1, \cdots, p_n, M)$ 满足预算约束，而且具有齐次性，即：

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial x_i^*}{\partial M} M \equiv 0 \quad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

和

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* \equiv M \tag{2}$$

证明：只根据条件(1)和(2)，希克斯第三定理成立，即：

$$\sum_{i=1}^{n} p_i s_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_j s_{ij} = 0 \quad \text{其中} \quad s_{ij} = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i^*}{\partial M}$$

6. 假设一个消费者的效用函数是相加可分的，并且货币收入的边际效用与价格无关，证明每一条货币收入需求曲线的弹性处处相等。

7. 可以认为效用理论的发展就是提供一个解释需求曲线向下倾斜这一现象的理论。在不久之后就发现，希克斯纯替代项是对称的，萨缪尔森说，这一结果"如果不用数学工具，就无法发现"。

   (a) 解释为什么得到替代项对称性不是一个推断过程？

   (b) 用可观测的价格——商品量共同表示，包含这种对称性的消费者理论同不要求对称性的消费者理论，有何行为上的差异？

8. 下列哪一组价格——商品量的观测值与效用最大化相符？

   (a) $p^1=(1,2,3)$ $x^1=(3,2,1)$
   $p^2=(2,1,2)$ $x^2=(2,2,1)$
   $p^3=(3,5,1)$ $x^3=(1,2,1)$

   (b) $p^1=(3,4,1)$ $x^1=(5,1,3)$
   $p^2=(2,3,2)$ $x^2=(3,3,3)$
   $p^3=(5,3,1)$ $x^3=(4,2,2)$

   (c) $p^1=(4,3,2)$ $x^1=(2,2,2)$
   $p^2=(5,3,3)$ $x^2=(1,3,3)$
   $p^3=(5,2,3)$ $x^2=(1,3,2)$

9. 观察到某一消费者以 p^i 的价格购买商品束 x^i：

   $p^1=(4,2,3)$ $x^1=(1,3,3)$
   $p^2=(3,2,3)$ $x^2=(2,3,2)$
   $p^3=(2,3,3)$ $x^3=(5,1,5)$

   那么这个消费的性别是什么？

10. 对下列两个需求函数求积分，以找到推导出他们的效用函数类：

$$x_1=\frac{p_2}{p_1} \quad x_2=\frac{M}{p_2}-1 \quad p_2<M$$

11. 消费者需求函数如下，题目要求与 11 题相同。

$$x_1=\frac{p_2 M}{p_1 p_2+p_1^2}$$

$$x_2=\frac{p_1 M}{p_1 p_2+p_2^2}$$

12. 在 $p_1=9, p_2=12$ 的条件下，某消费者位于 x^0 点，在该点，$x_1=4, x_2=7, U(x^0)=10$。当 p_1 下降为 $p_1=8$，消费者则移动到 x^1 点，在 x^1 点处 $x_1=6, x_2=6, U(x^1)=15$。根据上述数据，估计下列值：

   (a) 消费者愿意支出多少以达到 x^1 较低的价格？

   (b) 如果消费者最初在 x^1 点，则需要补偿多少，才能使消费者自愿接受 x_1 更高的价格？。

   (c) 您认为(a)和(b)的回答是精确计算的结果？还是近似值？如果是后者，则偏差的方向是可预测的吗？

   (d) 消费者福利在 x^1 比在 x^0 有多少改进？

13. 马歇尔在他的《原理》一书中，得出了如下对消费者剩余的定义：
    (1) 对于给定数量的商品，而不是一点没有，消费者愿意支付的超过他为此实际支付的数量。
    (2) 消费者剩余是消费者在市场价格下，拥有购买商品的权利，而不是一无所有而愿意支付的数额。
    (3) 消费者剩余是指在现有价格水平下，让消费者放弃所有消费而必须支付的费用。
    (4) 消费者剩余等于消费者在现有价格水平下，所得到的效用减去在某个更高价格下，不购买水平的效用之差。
    (5) 消费者剩余等于消费者在现有价格水平下如果被剥夺购买商品的权利所遭受的效用损失。
    (a) 讨论这些衡量方式之间的关系(存在这种关系的条件下)。
    (b) 证明衡量方式 2 的结果大于衡量方式 1。
    (c) 如果某一商品在整个消费集中是正常品，则衡量方式 3 的结果大于衡量方式 2。
    (d) 衡量方式 1、2、3 的结果是否可判断两个相互排斥的购买会导致消费者的效用最大化?
14. 如果一个消费者的收入包含了进入效用函数的一般等价格，证明：用来衡量消费者剩余的有界积分，只有在所有一般等价物的收入弹性为 0 的情况下才会与路径无关。

有关理论方面的参考文献

Barten, A. P.: "Consumer Demand Functions Under Conditions of Almost Additive Preferences," *Econometrica*, **32**:1-38, 1964.

Becker, G. S.: "A Theory of the Allocation of Time," *Economic Journal*, **75**:493-517, September 1965.

Borcherding, Thomas, and Eugene Silberberg: "Shipping the Good Apples Out: The Alchian and Allen Subsitution Theorem Reconsidered," *Journal of Political Economy*, **86**:131-138, February 1978.

Chipman, J. S., L. Hurwicz, M. K. Richter, and H. F. Sonnenschein (eds.): *Preferences, Utility, and Demand*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971.

Debreu, Gerard: *The Theory of Value*, John Wiley & Company, Inc., New York, 1959.

Georgescu-Roegen, N.: "The Pure Theory of Consumer Behavior," *Quarterly Journal of Economics*, **50**: 545-593, 1936.

Gould, John, and Joel Segall: "The Substitution Effects of Transportation Costs," *Journal of Political Economy*, 130-137, 1968.

Hicks, J. R.: *Value and Capital*, 2d ed., Oxford Uniersity Press, London, 1946.

——: *A Revision of Demand Theory*, Oxford University Press, London, 1956.

Houthakker, H. S.: "Revealed Preference and the Utility Function," *Economica*, 17:159-174, 1950. The original discussion of the strong axiom of revealed preference.

——: "Additive Pregerences," *Econometrica*, **28**:244-257, 1960".

——: "The Present State of Consumption Theory," *Econometrica*, **29**:704-740, 1961.

Lancaster, K. J.: "A New Approach to Consumer Theory," *Journal of Political Economy*, **74**:132-157, April 1966.

Lau, L. J.: "Duality and the Structure of Utility Functions," *Journal of Economic Theory*, **1**:374-395,

December 1969.

Morgan, J. N.: "The Measurement of Gains and Losses," *Quarterly Journal of Economics*, **62**: 287-380, February 1948.

Pollak, R. A., and M. L. Wachter: "The Relevance of the Household Production Function and Its Implications for the Allocation of Time," *Journal of Political Economy*, **83**(2): 255-277, April 1975.

Samuelson, P. A.: *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947.

—: "Consumption Theory in Terms of Revealed Preference," *Economica*, **15**: 243-253, 1948.

——: "The Problem of Integrability in Utility Theory," *Economica*, **17**: 355-385, 1950.

Siberberg, E.: "Duality and the Many Consumers' Surpluses," *American Economic Review*, **62**: 942-956, December 1972.

有关函数表达式方面的参考文献

Arrow, Kenneth J., et al.: "CapitaLabor Substitution and Economic Efficiency," *Review of Economics and Statistics*, **43**: 225-250, August 1961.

Christensen, Laurits R., Dale W. Jorgenson, and Lawrence J. Lau: "Conjugate Duality and the Transcendental Logarithmic Production Function," *Econometrica*, **39**: 255-256, July 1971.

——: "Transcendental Logarithmic Utility Function," *American Economic Review*, **65**: 367-383, June 1975.

Cobb, Charles W., and Paul H. Douglas: "A Theory of Production," *American Economic Review*, **18**: 139-165, March 1928.

Deaton, Angus, and John Muelbauer: "An Almost Ideal Demand System," *American Economic Review*, **70**: 312-326, June 1980.

Diewert, W. E.: "An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Pruducton Function," *Journal of Political Economy*, **79**: 481-507, June 1971.

——: "Duality Approaches to Microeconomic Theory," in K. J. Arrow and M. D. Intrilligator (eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 535-599. A technical review of duality and functional forms.

Geary, R. C.: "A Note on 'A constant Utility Index of the Cost of Living,'" *Review of Economic Studies*, **18**(2): 65-66, 1950.

Houthakker, H. S.: "A Note on Self-Dual Preferences," *Econometrica*, **33**: 797-801, October 1965.

Klein, L. R., and H. Rubin, "A constant Utility Index of the Cost of Living," *Review of Economic Studies*, **15**: 84-87, 1947-1948.

Stone, Richard: "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand," *Economic Journal*, **64**: 511-527, September 1954.

Samuelson, P. A., "Some Implications of 'Linearity'" *Review of Economic Studies*, **15**: 88-90, 1947-1948.

第 12 章　跨 期 选 择

12.1　n 期效用最大化

前几章分析讨论的均是同时期商品，然而消费者的另一类重要的选择就与不同时期的消费相关，即如何分配不同时期的收入。例如，我们注意到，大学生时期，学生一般都比较穷；但至中年时，他们的收入达到最高；在退休以后又会下降。对于这样的收入变化模式，典型的对策就是，当年青的时候借钱，到中年的时候贷钱（比如以投资于退休基金的方式）。这似乎表明，如果收入的获取不是平坦的方式，那么个体就倾向于通过借贷的途径将消费变平坦。这样，人们的消费变化就比收入变化小得多。那么是否存在这种行为的某种规律性、系统性的基础呢？

我们对此的讨论先从两期消费开始。令现在为时期 1，将来（第二年）为时期 2，并且在时期 1 和时期 2 的消费分别为 x_1 和 x_2。假定某人现在（第一年）赚得 x_1^0，将来（第二年）为 x_2^0，同时，还假定该人可以在资本市场上以利率 r 借贷。“可以借贷”这一假定意味着任何今年没有消费掉的收入 Y 都可以借给别人，而到第二年，该消费者就可以获得更大的回报 $y+ry=(1+r)y$，另一种可能的情况下，消费者在今年可以增加 y 的消费，而在第二年归还 $y(1+r)$ 给债主。那么，在第一年消费收入 y 的机会成本就是第二年放弃的 $y(1+r)$ 的消费，因而，当前消费的“价格”就是将来消费价格的 $1+r$ 倍；反过来讲，将来消费的“价格”则是当前消费的 $1/1+r$。我们通常讲，y 美元 1 年后的现值为 $y/(1+r)$，这只不过是 y 乘以它的价格，而这个价格是用现期消费来表示的。这里的利率，用 Irving Fisher 的话来讲，就是“商品较早可用性的贴水”。

现期的财富 W 被定义为现期收入和将来收入的现值。消费者的预算约束因而也就是两期的总支出不能超过财富 W，即：

$$x_1+\frac{x_2}{1+r}=x_1^0+\frac{x_2^0}{1+r}=W \tag{12-1}$$

满足(12-1)的条件下，消费者最大化效用 $U(x_1,x_2)$。在效用函数中，我们交替使用“收入”和“消费”，但正如 Fisher 所指出的那样[1]：“收入”实际上是由消费某种东西构成的。“储蓄”（或不储蓄）只是一种在不同时期调整消费的途径。收入只有当它被消费掉的时候才实

1　Irving Fisher, The Theory of Interest, New York, August M. Kelley, 1970. (First edition, The Macmillan Co., New York, 1930.)

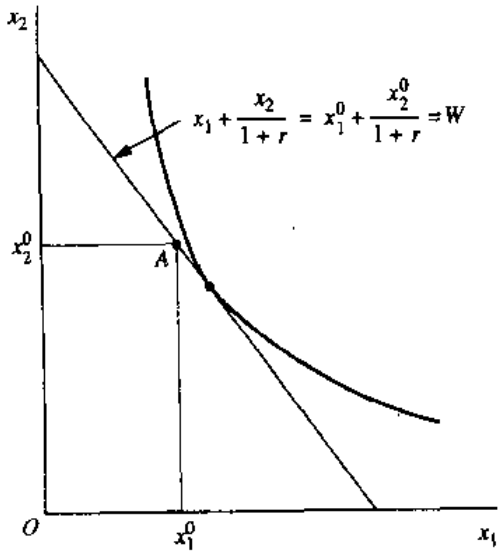

图 12-1 满足财富约束条件的效用最大化。在一般情况下，满足财富约束条件的效用最大化在结构上同具有最初禀赋的类似问题一样。在该图中，由于 $x_1^M>x_1^0$，$x_2^M<x_2^M$。切点位于净借入点。罗伊恒等式表明 $\partial U^*/\partial(1/(1+r))=\lambda^M(x_2^0-x_2^M)>0$。在这种情况下，由于利率的增加会导致预算约束线围绕点 A 顺时针旋转，消费者的效用下降。

现。该模型的图形表示为图 12-1。预算约束线的斜率为 $dx_2/dx_1=-(1+r)$，即用 x_2 表示的 x_1 的价格，并且预算约束线通过禀赋点 $A(x_1^0,x_2^0)$。利率上升则表明现期消费的价格上升，因而，会使预算线围绕 A 点顺时针旋转。

该问题的拉格朗日函数是：

$$\mathscr{L}=U(x_1,x_2)+\lambda\left[(x_1^0-x_1)+\frac{x_2^0-x_2}{1+r}\right] \tag{12-2}$$

一阶条件为：

$$\mathscr{L}_1=U_1(x_1,x_2)-\lambda=0 \tag{12-3a}$$

$$\mathscr{L}_2=U_2(x_1,x_2)-\frac{\lambda}{1+r}=0 \tag{12-3b}$$

以及约束条件：

$$\mathscr{L}_\lambda=(x_1^0-x_1)+\frac{x_2^0-x_2}{1+r}=0 \tag{12-3c}$$

合并(12-3a)和(12-3b)，得到：

$$\frac{U_1}{U_2}=1+r \tag{12-4}$$

等式(12-4)说明，消费者现期收入的边际价值 U_1/U_2，等于现期消费的机会成本，即被放弃的未来消费。如果令 $p=1/(1+r)$，代表未来收入的价格，就可以将上述代数形式简化。假设充分的二阶条件成立，求解一阶条件，即可得到马歇尔需求函数：

$$x_i=x_i^M(p,x_1^0,x_2^0)\quad i=1,2 \tag{12-5}$$

从前面“空闲需求”以及“一般均衡”需求的分析中，我们已经知道，从这样的模型中是不能推导出可被驳倒的隐含条件的，因为像其他类似的模型那样，所有的参数均进入了约束条件。然而，根据包络定理，有 $\partial U^*/\partial p=\lambda(x_2^0-x_2^M)$。如果某人在现期只借不贷，则 $x_1^0-x_1^M<0$，并且 $x_2^0-x_2^M>0$，那么，如果升高利率就会对该人不利，因为，这意味着要放弃更多的未来的消费来

满足现期的消费。类似的，利率的升高也提高了只贷不借者的可获得的效用水平。

通过推导斯拉斯基等式，我们可以更深入地理解该模型，因为在斯拉斯基等式中，财富（收入）效应同替代效应相分离。

希克斯需求可以通过对任意一期的禀赋最小化，以达到某种无差异水平 U^0 推导而来。因此，我们可以将模型以下述方式陈述：

最小化

$$x_1^0 = x_1 + p(x_1^0 - x_2^0)$$

满足：

$$U(x_1, x_2) = U^0$$

那么，该问题的拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}' = x_1 + p(x_2 - x_2^0) + \lambda(U^0 - U(x_1, x_2))$$

假设一阶条件和充分的二阶条件均成立，求解隐含的一阶等式就可以得到希克斯需求：

$$x_i = x_i^U(p, U^0)$$

将希克斯需求代入目标函数中，得到最小支出函数：

$$x_1^*(p, U^0) = x_1^U + p(x_2^U - x_2^0) \tag{12-6}$$

因而，联系马歇尔需求和希克斯需求的恒等式为：

$$x_i^U(p, U^0) \equiv x_i^M(p, x_1^*(p, U^0), x_2^0) \tag{12-7}$$

导出斯拉斯基等式[2]：

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p} \equiv \frac{\partial x_i^U}{\partial p} + (x_2^0 - x_2^U)\left(\frac{\partial x_i^M}{\partial x_1^0}\right) \tag{12-8}$$

如果利率上升，未来消费的价格 p 会下降，这带来的纯替代效应会导致现期消费的减少和未来消费的增加：$\partial x_2^U / \partial p < 0$。但是，利率的变化也导致财富效应。现期收入禀赋的增加与来自任何资源所导致的财富的增加是相同的，因为收入可以在不同时期间借入或贷出。假设进入效用函数中的两期消费均为正常品，所以有 $\partial x_i^M / \partial x_1^0 > 0$，则斯拉斯基等式右边的收入项，或更准确的讲是财富项表明，如果消费者在第 2 期是只借不贷，即 $x_1^0 - x_2^0 < 0$，则替代效应会被财富效应加强。在这种情况下，利率的上升，就会使现期消费相对地更加昂贵，同时也减少了消费者的财富，从而导致现期消费的进一步减少。如果第 1 期中，消费者只贷不借，则财富效应和替代效应的作用方向相反：利率的升高增加了现期财富，导致更多的现期消费。[3]

时间偏好

前面的讨论，在形式上同消费者具有禀赋的效用最大化问题是相同的。如果该模型是特别用来解释不同期消费问题，那么还需要什么样的假设呢？我们在上面的讨论中，将效

2　参见等式(10-75)。

3　但是，如果利率升高来自于未来预期的上升（见下部分），则现期消费的增加可能是由于隐含的财富效用。

用函数作为是任何一个“循规蹈矩”的效用函数 $U(x_1, x_2)$，即严格递增且拟凹的。然而，假设我们希望规定，消费者的偏好，在不同时期保持不变，在这种条件下，消费者在现期和未来消费之间所愿意做出的权衡就不依赖于“时期”，即时间的标志符，也就是说，消费者牺牲 1 单位现期消费以换取一定的将来消费的边际愿望，应该只依赖于每一期的消费水平，而与这种愿望所基于的评价是在 2000 年，2001 年，还是 2010 年是无关的。在加入上述假设后，我们可以对效用函数规定为 $V(x_1, x_2)=U(x_1)+U(x_2)$，每一期的效用函数 U 是相同的。[4] 该效用函数对 x_1 和 x_2 均是相加(强)可分的，而且，每个单独的部分在函数上也是相同的。这一效用的函数设定形式也排除了“习惯于”某种奢侈水平的可能。在任何时期得到的效用与过去的历史，或是将来的预期是无关的。

Irving Fisher 写道：人们是“人性不耐”的(他将此列为他那本书的子标题)。意思是说，人们对于相同数量的商品，更倾向于现期消费而不是未来消费。如果可以不花任何代价地保存财富，自然是希望现在就可拥有，比如现金形式的财富，而不是希望未来拥有，这就是商品对消费者来说，多总比少好的结果。如果一个人现在就拥有金钱，那他就总是可以选择一段时间内不消费，但相反的情况下，则不总是存在这样选择的自由，假设没有诸如防盗这样的成本，如果现在拥有现金，那相应的消费机会集也必须比将来拥有现金的条件下更大。“人性不耐”还包含其他的含义：指“偏好”而不是机会；指在给定收入水平 y 的条件下，未来消费产生的效用将小于现期消费产生的效用。

我们可以将效用函数写成如下形式来表达“人性不耐”：

$$V(x_1, x_2)=U(x_1)+\frac{U(x_2)}{1+\rho} \quad \rho \geqslant 0 \tag{12-9}$$

对于 n 期，则效用函数是：

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{U(x_t)}{(1+\rho)^{t-1}} \tag{12-10}$$

因此，未来消费的权重是低于现期消费的，并且，随着消费的发生越接近未来，相应的权数也按比例下降。

尽管我们有意允许时间偏好的存在，但是，时间偏好事实上是存在争议的，并且也没有被实证资料所证实。这就暗含着消费者对将来有某种“近视”的观点。如果我们知道，未来会到来(并假定对将来的不确定性不是时间偏好的来源)，为什么在我们的效用中，将来的贡献就比现期少呢？如果更早的时候调整了消费，那么当未来来临时，我们会不会遗憾曾经做过的事？我们能否预见到这种遗憾呢？

在效用分析中重要的一般属性(即 $V(x)$ 是严格递增且拟凹的)，允许存在无限种的“折扣”机制，通过这些机制，“商品” x_1 就会随 i 的增加而被赋予逐个降低的权重。但是，在这里，我们的意图是，要将该函数解释为来自消费相同商品的效用函数。“消费”是发生在相

4 当然，可以对该函数进行任何单调变换。同时也要注意，用同样的符号 U 既表示双变量的函数，也表示单变量的函数，是会导致错误的。

继的时间区间上的，Robert Strotz 引人注目地论述：如果在随后的某一年里，估计到消费者会改变从此以后各年的权重赋予机制，那么，最初的 n 期效用函数就在根本上自相矛盾，前后不符。[5] 例如，假设消费者现在（也就是现期）决定他将在 2 年内，每年消费相等的财富，那么到了第三年，消费剩余财富的一半，此后保持恒定的消费。假定 2 年过去了，而第三年成为“现期”，那么这个消费者还会继续最初的计划吗？效用函数的拟凹性就其本身来讲，并不排除这种改变初衷的行为。但是这样一个消费计划隐含着无法解释的偏好变动。很可能在某一年，消费者突然决定放弃比以前更多的未来消费以获取给定的“现期”消费。允许在不同时期中这样任意的偏好变化，这是与效用理论的其他应用以及一般经济学范式不相符的。为此，我们一般希望在跨期效用函数上加入“动态一致性”这个重要的特性：用第 j 期放弃的消费来表示的第 i 期消费的边际价值，与日期无关，只取决于两时期的消费水平。[6]

效用函数(12-10)具有该重要特征。边际替代率（用 x_1 表示的 x_2 的边际价值）是：

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_i}=\frac{-V_i}{V_j}=\frac{-(1+\rho)^{j-i}U_i'(x_i)}{U_j'(x_i)} \tag{12-11}$$

等式(12-11)说明，用放弃的 j 期消费来表示的 i 期消费的边际价值，依赖于 i,j 两期的消费水平，与是哪两个时期无关。因为，函数 $U(x_i)$ 对于 $i=1,\cdots,n$ 均是相同的。而且，更进一步的，是只与分割两期的时期数有关而与时期的具体时间无关。动态一致性就是这样得以保证的。图 12-2 画出的是两期的效用函数。沿着从原点上发的 45°线，$x_1=x_2$。并且，所有无差异曲线均与该射线相交，交点处的斜率均为 $-(1+\rho)\leqslant -1$。也就是说，斜率的绝对值也就是时间偏好率 $1+\rho$，并且大于或等于单位 1。如果没有“人性不耐”的假设，则无差异曲

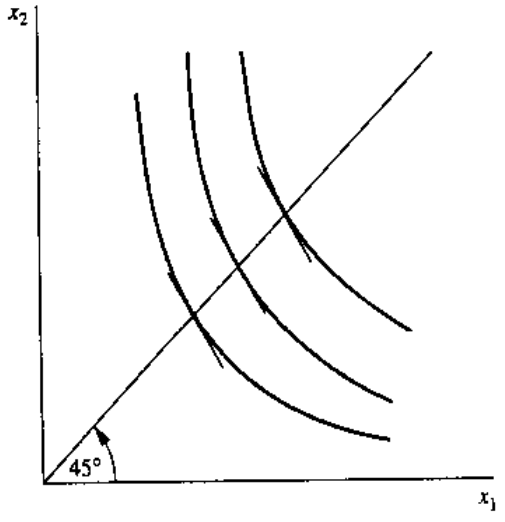

图 12-2　“人性不耐”条件下，相加可分效用函数的无差异曲线。图中所示的是 $\rho>0$ 条件下的 $V(x_1,x_2)=U(x_1)+U(x_2)/(1+\rho)$ 的无差异曲线。沿着 45°线，有 $x_1=x_2$，斜率是 $-(1+\rho)<-1$。因为预算（财富）约束线的斜率是 $-(1+r)$，那么，如果 $\rho>r$，则 $x_1^M>x_2^M$。

5　Robert Strotz, "Myopia and Inconsistency in Uynamic Utility Maximization," Review of Economic Studies, 23(3): 165-180, 1956。

6　Strotz 继续讲到，如果可预计两期之间边际替代率的变化，消费者会理性地避免计划的变化。

线沿45°线上的斜率就均为−1。

在满足约束条件下，最大化效用函数(12-10)：

$$\sum \frac{x_t}{(1+r)^{t-1}} = \sum \frac{x_t^0}{(1+r)^{t-1}} \tag{12-12}$$

对连续的时期 i,j，其切线条件：

$$\frac{-(1+\rho)U'(x_i)}{U'(x_j)} = -(1+r)$$

或者

$$\frac{U'(x_i)}{U'(x_j)} = \frac{1+r}{1+\rho} \tag{12-13}$$

根据这个条件，我们可以看出，消费者对较早可用性的偏好(用 $1+\rho$ 衡量)同较早可用性的市场价格(用 $1+r$ 衡量)，这两者间的关系是如何影响消费的。假定最初消费者不是"人性不耐"的，则有 $\rho=0$，由于我们已知无差异曲线在沿45°线上的斜率是−1，而且财富约束线具有更陡的斜率 $-(1+r)$，因此可断定切线一定位于45°线的上方，所以有 $x_j^M > x_i^M$。如果在具有耐心和一个对商品较早可用性的正贴水条件下，消费者会将消费调整至未来。如果时间偏好率 ρ 是正的，但小于较早可用性的市场贴水 r，那么显然也会出现同样的结果。消费者在将来比在现期会消费掉更多的收入。但是，如果时间偏好率超过了利率，那么消费就会调整到现期，$x_i^M > x_j^M$。

对于所有相继的时期 $i,j,j=1+i$，效用最大化的充分的二阶条件包括 $-[(1+\rho)/(1+r)^2]U''(x_i)-U''(x_j)<0$。如果 $x_i \neq x_j$ 且 $r \neq \rho$，这些条件并不表明在每一期边际效用递减。利用第11章习题1的结果，是可以对至多一个时期存在(局部的)递增的边际效用，也就是说，在 $U(x_i)$ 某一特定的消费水平 x_i^* 的邻近区间，会出现凸出的部分。在这种情况下，财富的增加可能至少在局部上，会导致时期 i 消费的增加，以及在其他各期消费的减少。因此，只应用拟凹性以及强可分性的假设，不能排除消费者全部花掉当年得到的意外收入。典型的做法是：对所有的消费水平均有 $U''<0$，这样就可以消除上述可能性了。

由于 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 表示的是跨期效用，因此，消费者依次顺序消费 $x_1,x_2,\cdots$ 等等，而不像同期消费模型那样，所有的商品都是同时消费的。对于期间效用言而有信，过去的消费水平在取任何值的情况下，都是固定的。同时，随着时间的推移，新增的 x_i 的消费水平也成为固定的了。消费者模型的 Le Chatelier 结果表明，随着新增"商品"被认为是固定不变，希克斯需求函数变得更加不具有弹性。为此，模型预计的结果是当消费者年龄增长、变老时，他们对相对价格的变化就越来越不敏感，这也许肯定了偶然经验主义的观点：年青人通常认为老年人是固执和保守的。(当然随着我们变老，由于所剩时光不多，因此就会在体验新经历上面花费得更少。)

现在让我们来研究本章开头所提到的那些规定，即消费者倾向于将他们的收入流在各期相等化，这一次假定消费者"人性不耐"比率同市场利率相等，即 $r=\rho$，再根据等式

(12-13)，有 $x_i^M = x_j^M$，也就是任意两个相邻时期的消费必相等。因此，收入也会以固定的比率消费掉。在同期消费的效用理论中是没有类似结果的。我们不是想证明 $x_i^* = x_j^*$。之所以出现这样的结果，原因就是在效用函数上增加了其他的结构，特别是动态一致性假设。

在图 12-3 中进一步表现了将消费流平均分配到各期的意图，为了讨论上方便，假设 $\rho = r = 0$，标为 x_1^U 的曲线是现期消费的希克斯需求曲线，纵轴是该商品的价格。需求曲线的高度仍表示边际价值，因此沿需求曲线，现期消费的主观价格体现了消费者为获得现期消费的额外增加，而愿意放弃的未来消费。

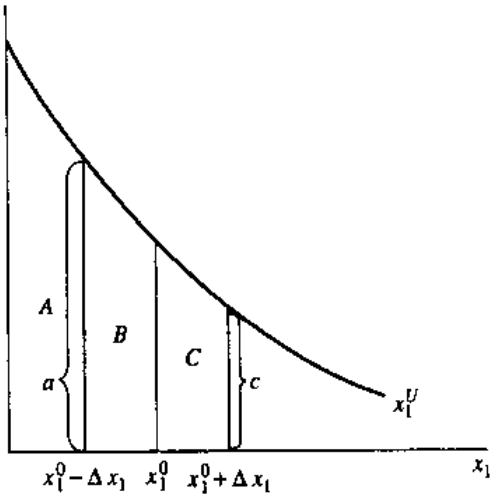

图 12-3　平坦消费流的收益。用补偿性需求曲线下的区域衡量的全部消费价值，只有当消费是平坦的时候才达到最大值。如果忽略利息和时间偏好，那么将 1 美元消费从 $x_1^0 + \Delta x$ 转移到 $x_1^0 - \Delta x$，就会将全部价值增加 $a - c$。换句话说，消费两次 x_1^0 所产生的价值为 $2(A+B)$，大于消费 $x_1^0 + \Delta x$ 和 $x_1^0 - \Delta x$ 的组合，即 $2A+B+C$。

假设消费者有两种选择，一种是在两个时期相同的数量 x_1^0，另一种是在第一期消费 $x_1^0 + \Delta x$，相应地，在第 2 期消费 $x_1^0 - \Delta x$，即比较“稳定消费”与“盛宴与饥荒”的相对优点。在享受盛宴的时期，现期消费的边际价值相对较低，为 c，而在饥荒的时期，现期消费的边际价值相对较高，为 a。如果消费者可以将 1 单位收入从盛宴时期转移到饥荒时期，那么通过将相对低价值消费转化为高价值的消费，他会得到净收益 $a - c$。当这种消费转移发生时，两时期不同的边际价值趋向于 b，b 是消费稳定时，现期消费的边际价值。回顾一下，在效用最大化中，商品的边际价值同其价格成比例。在这里 $(1+r)/(1+\rho) = 1$，并且消费者不以通过借贷来调整不同时期的消费，因此，当 $x_1^U = x_2^U = x_1^0$ 时，效用达到最大。

另一种考虑平坦消费好处的方式，是看现期消费不同层次的“总利益”。这个“总利益”是由希克斯需求曲线下区域的面积来衡量的。这些区域表明，消费者为现期消费的特定层次而愿意支付的未来收入。令 A, B, C 分别表示希克斯需求线下 $x_1^0 - \Delta x$ 左侧、$x_1^0 - \Delta x$ 与 x_1^0 之间以及 x_1^0 与 $x_1^0 + \Delta x$ 之间的区域，那么第二年消费 x_1^0 的总收益就是 $2A+2B$，相反，盛宴——饥荒消费模式下的总收益为 $(A+B+C)+A = 2A+B+C < 2A+2B$，因为希克斯需求曲线是负斜率，所以 $C < B$。这样也说明，在相等消费条件下，收入的价值更高。

如果出现正时间偏好或市场利率，并且彼此不相等，那么上述分析就要做适当的修正。这时消费不是恒定的，而是以等式(12-13)给定的速率，均速上升或均速下降。在这种情况

下，消费在不同时期上下变动的意义上仍然是稳定的，但已经不是字面上“稳定”的含义了。如果预计到收入是不平坦的，例如人在中年时，收入最高，那么，即便在更加一般的假设条件下，个人也会设法让消费在各期相等。在收入不平坦的情况下，所采用的方法就是当年青的时候借我钱，而在中年时，由于预计到将来的退休，进行贷款。

商品价值由于平坦和不平坦消费而增加，解释了为什么要花费一定资源存储季节性生产的产品以供将来使用。举例来说，苹果是在秋天收获，然而通过受控的季节性存储，就可以将苹果的消费扩展到全年。其他的手段，如制成罐头或冷冻，也可以达到同样的目的。生产者之所以值得从事这样高成本的活动，就是因为，如果这些商品可以全年消费而不是暂时性消费时，消费者对它们的评价就会更高。（当然，存储也因同样的理由而鼓励更大的生产。）

“投机者”指为将卖出而现在买进商品的人，比如，当油的供应受到中断时，投机者们就会囤积油，进一步降低油的供应，从面将价格升高到没有投机行为时价格水平之上。当然，投相者的动机就是低价买进，高价卖出。但是，如果某种价值是为消费者生产的，那么个人就只有通过这种方式赚取（生产）收人，实际上产生的效果就是使消费平滑。尽管投机者由于囤积居奇而名声很坏，但是人们通常忽略了当他们再次出售这些商品时，市场上的供应量比没有投机行为时更大，因而价格更低，其结果是价格和消费流变得更加平缓，投机者的作用正是使这种商品价值增加，同时还会带来这样的效果，即如果预计的供应中断并没有真正发生，那么，之前的投机活动就不会为消费者带来有价值的服务，并且至少一些参与这项活动的人会遭受损失。

使消费平坦化的愿望是“永久收入假说”的基础，同时也是“生命周期假说”（根据 Milton Friedman[7]）的基础，该理论由 Franco Modigliani 和其他人[8] 提出并发展。如果在通常的利率下，可以不花费任何成本，将收人在不同时期转移，则收人的变化与财富的变化是相同的，因此，收人暂时（一期）的增加对于当时的消费影响就相对较小，因为财富的增加会扩散到整个时期上。如果效用函数最终导出当前消费的收人（财富）弹性接近于单位 1，面未来消费的收入（财富）弹性接近于 0，这种情况也是十分奇怪的，当然，当一个人越来越老时，消费收入的时间所剩无多，那么收人的变化对当期消费的变化就会有相对较大的影响。然而这一结果依赖于一个假设，即赋予继承人效用的权重低于他自己效用的权重。如果某人从其继承人的未来消费中获得的效用与自身的效用相等，那么年龄对消费增加就没有什么影响了。

比如，假设在某一年，有两个人，每个人拥有 30000 美元的收人，但是 A 每年都有这个收人，而 B 则通常是每年 20000 美元，只是今年运气好才赚了 30000 美元，那么，哪个人会

---

7 Milton Friedman, A Theory of the Consumption Function, National Bureau of Economic Research, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957.

8 See, in particular, franco Modigliani and R. Blumberg, "Utility Analysis and the Consumption Function: kAn Interpretation of Cross Section Data," in Post Keynesian Economics, K. Kunhara (ed.), Rutgers University Press, New Brunswick, NJ, 1954; and Menahem Yaari, "On the Consumer's Lifetime Allocation Process," International Economic Review, 5:304-317, 1964.

储蓄更多的钱呢？B 在收入上有一个暂时的增加，假设存在资本市场，他就可以将收入转移到将来，那么在财富上的增加就会扩散到以后所有年份。他确实会进行储蓄，而且储蓄可以有多种形式，例如，购买债券，或购买耐用消费品，房子、车等等；还可以投资教育。因此，我们将认为收入存在暂时增加的人，其储蓄率会比消费接近于永久性或正常收入的人高。[9]

Fisherian 投资

我们现在来思考 Irving Fisher 曾分析过的一个问题。假设你拥有一片树林，种植的目的是要为一个纸厂生产纸浆。每年，树都以一定的速率生长，也许是开始比较快，但随着树的成熟，生长速度就会放慢，那么，问题是你什么时候砍树？是当所有的树都停止生长的时候吗？或许如果你几年前买了一些上好的葡萄酒，并且放在你的酒窖里使它们变成陈年佳酿，每年，这些酒都会变得更好，那么你什么时候喝它们呢？

让我们用 $g(t)$ 表示上面描述到的树在时间 t 时的价值。假设 $g'(t)>0$，以保证树确实是在生长，但 $g''(t)$ 最初为正，表明生长速度较快，而最终 $g''(t)<0$。种植这些树的人还必须考虑对树进行投资的其他方式。令目前这种投资的利率为 r。回想第 2 章中连续复利的内容，在 t 时，任意得到或支付的 FV，其现值 P 的计算方法为：$P=FVe^{-rt}$。那么类似的，在时间 t 砍伐树的现值是：

$$P=g(t)e^{-rt}$$

最大化财富，并令 $dP/dt=0$：

$$\frac{dP}{dt}=g(t)(-re^{-rt})+g'(t)e^{-rt}=0$$

消去 e^{-rt}，并同时除以 $g(t)$：

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=r \tag{12-14}$$

上式中 $g'(t)/g(t)$ 就是在 t 时，树的生长率。因此，上面财富最大化的推导说明，当树（或其他价值随时间增长的资产）的生长率同投资的机会成本（用利率衡量）相等的时候，就应该砍树了。因此，如果其他投资每年只带来 10% 的利息，而树的生长率为 15%，那就应该让树继续生长，但当树的生长率减少为 10% 时，那也就是砍伐它们的时候了。我们可以求解 (12-14)，得到 $t=t^*(r)$，很容易就可以证明 $dt^*/dr<0$，即投资的机会成本升高会导致树在更早的时候被砍伐，此时树的生长率还是较高的。如果较早可用性的贴水降低，那么我们就会再将葡萄酒再多放些时间。

上面的分析都假设树只被种植一次，好像当树被砍伐的时候，世界也结束了似的。事实

9　弗里德曼提供了一个对永久性收入的精确定义。M. J. Farrell 将“正常”收入定义为具有与个人财富相等现值的恒定的收入流，但是 Friedman 允许存在永久性收入在不同时期间上升的可能性。见 M. J. Farrell, "The New Theories of the Consumption Function," Economic Journal, 69(276):678-696, 1959.

上，种植树的那片土地，对树或是对其他的作物还有其他的用法，并且可以在收割后继续种植。如果我们想像，可以在砍伐后立即种上同样数量的树，我们就可以无限地收获。但是，为了简化分析，我们特别注明，在第一次收获之后，土地的价值是它的当前价值，但已有 t 年的贴现。因此，随着作物的轮流耕作，目标函数就是：

$$P=g(t)\mathrm{e}^{-rt}+P\mathrm{e}^{-rt}$$

解出 P：

$$P=\frac{g(t)\mathrm{e}^{-rt}}{1-\mathrm{e}^{-rt}}$$

应用除法求导法则：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{(1-\mathrm{e}^{rt})[-rg(t)\mathrm{e}^{-rt}+\mathrm{e}^{-rt}g'(t)]-g(t)\mathrm{e}^{-rt}+r\mathrm{e}^{-rt}}{(1-\mathrm{e}^{-rt})^2}=0$$

除以 $g(t)\mathrm{e}^{-rt}$：

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=r+r\frac{\mathrm{e}^{-rt}}{1-\mathrm{e}^{-rt}} \tag{12-15}$$

该等式说明，当树的生长率与其他投资回报 r 加上土地的利息收入之和相等时，才应砍树，其他投资回报 r 与土地的利息收入之和，即不种树的机会成本，这就是 Fausfmann 对作物轮作问题的解答。该成果首次公布于 1849 年，同时这也是土地存在其他机会成本时的 Fisherian 解。尽管在代数上是复杂的，我们仍然可以证明利率增加会缩短到收获的时间，而且很显然，在作物轮作的情况下，假设 $g''(t)<0$，则收获会比在单期模型中更早。对于类似于树这样需要近 20 年才会成熟的作物，由(12-14)和(12-15)求解出的收获时间，不存在较大的差别(试着替换 r，可能的 t 值)，但是对于短期生长的作物，上述差别是很明显的，在那些可以一年两茬的地区，这种判别所导致的影响很可能是严重的。

最后，政策制定者们通常谈论，对某些可再生资源的平均可持续产出最大化，典型的例子就是海洋鱼类，由于通常的产权问题(对这些资源缺乏私人所有权)而导致过度捕捞。也许有人认为可以减慢树的种植(或私人渔场的生产)，以达到每年收获恒定的资源。最大化平均产出实际上也就是最大化 $g(t)/t$。对于该最大化问题的解，即当平均生长率等于边际率时的收获，通常不是财富最大化的解，因为它没有考虑到用于生产这些资源的资金的边际成本。

Fisher 区分定理

在前面的分析中，我们将个人在每一期的收入看作是外生固定的。现在假设消费者可以选择不同的收入计划，这样在给定年份赚得的收入也成为效用最大化决策的部分。例如，每个人选择不同的职业，各种职业的收入模式就有很大的差别，一个人既可以高中一毕业就开始从事某种工作以赚取收入，也可以高中毕业后上大学或专科学院，如医学或是法律。后者在开始时的收入是很低的，但最终会高于没有接受过高中以后训练的人的收入。另外一种情况是当存在好几种商业投资方案，每一种都有不同的“现金流”，那采用什么样的策略才

会同效用最大化相符呢？

图 12-4 中画出生产可能性边界$g(x_1, x_2)=k$，该函数表达了代表个人可拥有的不同收入流的点的集合，在边界上，无论选择任何点$A=(x_1^*, x_2^*)$，均可以在市场利率为 r 的条件下，通过借贷将收入在不同时期进行转移，因此也暗示着一条财富线，$W=x_1^*+x_2^*/(1+r)$，效率为$-(1+r)$，消费者在这条线上选取能将消费效用最大化的点。

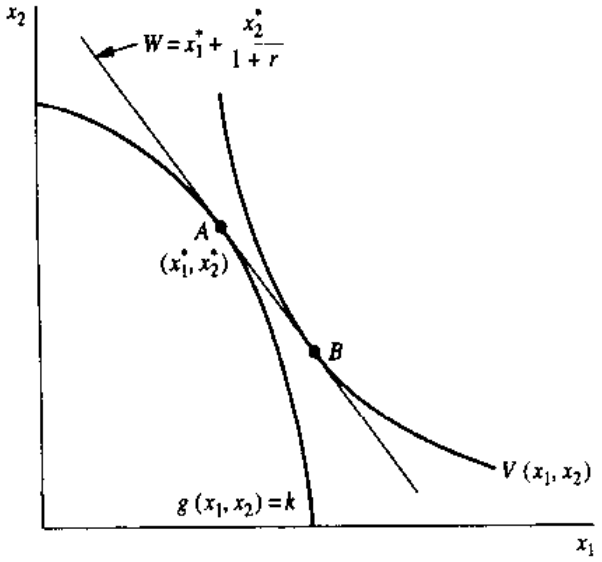

图 12-4　Fisher 分离定理。假设消费者可以生产消费组合$g(x_1, x_2)=k$，在有效资本市场中，所生产的商品束并不需要一次都消费掉，这样消费者可以通过首先将财富最大化，其次通过借贷的方式（以某一特定的利率）在预算约束线上移动，最终在切点 B 处达到效用最大化。

在几何图形上，可以很明显地看出，在上述条件下（最重要的条件是以相同利率借贷的假设），消费者会通过以下述方式达到最高的无差异水平，即首先是选择可以将财富最大化的收入流，然后调整消费以使效用最大化，这个著名的结论就是 Fisher 区分定理，以首次提出的 Irving Fisher 的名字命名。[10]对于该命题的代数分析在形式上与第 10 章关于亚当·斯密著名的断言“市场规模限制劳动分工”的分析是相同的，因此，数学的推导在这里就不再演示了。随着市场规模的扩大，人们总是希望收入或财富能不断地增长。但是，我们必须假定个人对于已有不同投资或收入流没有特别的偏好，特别是在职业选择方面，由于个人通常并不会对各种选择中非金钱的方面漠不关心，因此就要小心谨慎地应用该定理。但是，该定理仍可以在边际的意义上应用：当某种职业金钱方面的财富相对于其他职业增加时，该职业会吸引更多的人。[11]

最后一点就是在前面的讨论中，假设个人可以用同样的利率进行借贷，但是，典型的情况是，借入的利率高于贷出的利率。如果个人希望将收入从将来转移到现在，价格为$1+r_b$（b 代表借入）；如果是将收入从现在转移到将来，则价格为$1+r_l$（l 代表贷出）。图 12-5 展

10　See Fisher, The Theory of Interest, op. cit.

11　亚当斯密首次提到“补偿性工资”以抵销工作中不愿接受的非金钱的方面，而且预言，由于这个原因，垃圾收集工应当同教师拿一样的报酬。

示了利率不同所带来的影响。点 L 是生产边界线同财富在贷出价格为 $1+r_1$ 时的切点，个人可以沿 LL' 向"西北"移动，也就是说，"西北"方向表明更多的将来消费和更少的当前消费。在 L 点以下的切线部分是不存在的。同样的，消费者也可以沿着更陡的切线 BB'，将未来的收入转移到现在，向 B 点上方的延伸部分也是不存在的。消费可行集的边界为 $L'LBB'$。

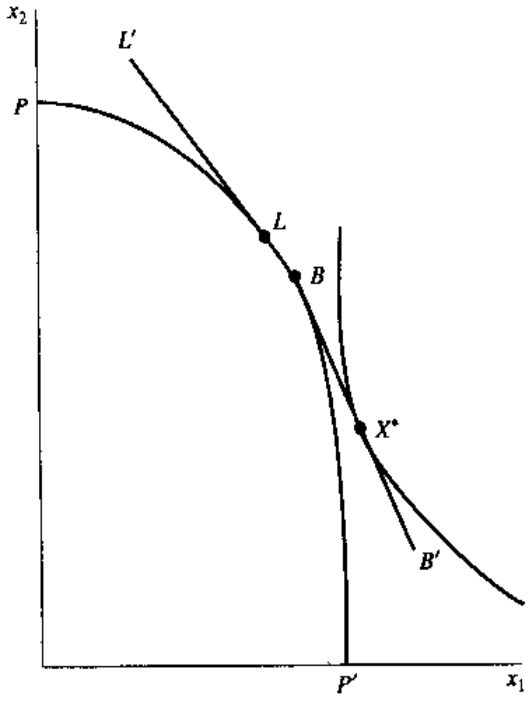

图 12-5 当借款利率超过贷款利率时的效用最大化。当借款利率超过贷款率时的效用最大化时，Fisher 分离定理也许就不成立了，这样，财富最大化也许就不能导致效用最大化。

显然，如果没有更详细的个人效用函数的信息，特别是关于与生产边界上 LB 这部分邻近的当前消费的边际价值，那我们就不可能判断消费者会选择 $L'LBB'$ 上的哪一部分。如图所示，在 BB' 上的 X^* 点是效用最大化，但是，同样也可以轻而易举地将这一点画在 $L'L$ 上。用更高的利率 r_b 来衡量，消费者当前的财富是：$W^* = x_1^* + x_2^*/(1+r_b)$。事实上，也许这一点的财富还低于 $L'L$ 上的某一点呢，在这一点上，未来消费的价格较高，$1+r_1$。因而，当借人与贷出的利率不同时，就没有财富最大化与效用最大化精确的一致。

真实利率与名义利率

前面的讨论完全是以两种商品的相互交换来表达的，即某一时期的真实消费量与另一时期的一定数量的真实消费交换。然而，更一般的是借贷合同（协议）使用的是"名义"上的术语，即价值的货币单位。这样的协议自然是前瞻性的，即表明在将来发生（而不是过去）要偿还贷款。如果贷款合同是以美元作为计价单位，那么借方与贷方就要将预计的美元价值相对于商品的变化包括到合同中。（如果合同是以任何其他单位来计价，如黄金，那双方就

是将预计这种单位发生的价格变化写入条款，在这里即黄金的价格。）我们这里讲的是被预计到的变化，因为当签定合同的时候，货币单位价值的实际变化还不知道。真实利率就是指完全适应贷款合同中价值单位的任何变化的利率，这也是我们到目前为止所讨论的利率。

根据连续复利计算方法，一项本金为 P，利率为 r 的贷款，t 年后的价值是 Pe^{rt}，但是，假设预计每年的通货膨胀率为 g，任何目前名义上的 P 均会以该速率贬值，在 t 年之内，P 的价值会变为 Pe^{-gt}，在通货膨胀和真实利息的共同作用下，P 的未来价值是 $Pe^{rt}e^{-gt}=Pe^{(r-g)t}$。为了抵消预计的通货膨胀的影响，应该将利率设为 $r+g$，这样，P 的将来价值才会又恢复到 Pe^{rt}，当然，这要求实际的通货膨胀率为 g，因此，名义利率就是：

$$i=r+\text{预期的通货膨胀率} \tag{12-16}$$

等式(12-16)就是通常我们所知道的 Fisher 等式。令 p 为一般价格水平，预期的通货膨胀一般写为 $E[(1/p)(dp/dt)]$，E 为数学期望值的运算符。[12]从离散的时间来看，等式12-16仅仅是一个近似值，真实利率 r 和预期的通货膨胀率 g 的共同影响会产生名义利率 $i=(1+r)\times(1+g)$，但是，对于值都较小的 r 和 g 来讲，rg 这一项就是可以忽略的了，因而等式(12-16)也可以认为是适用的。对真实利率的估计一直都是众多研究者的目标，而且，尽管对于不同时间下变化的幅度，仍然处于争论之中。[13]但已经估计出的值，其变化范围仅在 1% 到 2% 之间。

市场利率中还包括了贷款风险的贴水，风险增加了收入的可变性，而且前面的分析中也表明了，需要这样的风险贴水以补偿对全部消费值的降低。在资本市场上很容易发现这种风险贴水，比如，在同一时期，由公司发行的债券，其利息就高于由美国政府发行的债券。公司债券还会被不同的评估服务机构，如 Moody's 和标准普尔等，进行评估。当公司的评估结果恶化时，则通常该公司会许诺更高的债券利息，并且当风险增加时，债券利息也会更高，这是为补偿结果的更大的不确定性，如偶尔拖欠导致最终实现的回报低于许诺的回报。股票资产的平均长期回报要比债券的平均长期回报高，前者的股息依赖于公司利润，这一事实也表明，股票比债券具有更大的风险。因此，我们可以将 Fisher 等式写为(12-17)，等式中各个量的测度是目前大多数研究的目标。

$$i=r+E\left[\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{dp}{dt}\right)\right]+\text{risk premium} \tag{12-17}$$

12.2　利率的决定因素

利率也是市场上的一种价格，在这一价格下，将不同期的消费进行交换。恐怕没有其他

12　在下一章，我们将讨论不确定性与数学期望。

13　See, for example, Ibbotson Associates, Stocks, Bonds, Bills and Inflation: 1997 [Annual] Yearbook, Ibbotson Associates, Chicago, 1997.

哪一种价格像利率这一特殊价格一样，产生这样多公众与私人的敌意吧！尽管宗教的或世俗的法律都禁止或限制带息的借贷，但利息一直存在的事实就是其重要作用的有力证明。

也许最好先来考虑为什么利息是正的？以及是否在某种合理的情况下，利率也可以为负？当然，预期的通货膨胀以及风险都增加了所观察到的利率，而我们这里所讨论的是正的真实利率，根据 Fisher 和 Bohm-Bawerk，接下来我们该思考时间偏好，经济增长以及生产条件的影响，也就是说，考虑社会通过目前生产的商品以增加未来消费的能力，而这些商品是旨在提高未来生产力的。[14]

首先思考一个负的利率是否可以被广泛接受。假设在一个纯贸易经济中，例如第二次世界大战期间的战俘营。在这种经济中，没有生产，而收入则是以定期收到的红十字会的包裹为外在的形式的，而且还假设将财富保存很长的时间。那么，战俘营中的每个人都倾向于将他们的消费流平坦化。假如现在知道将来的收入将会下降，在这种情况下，每一个人就会试图将现在的部分消费交换为将来的消费，这样的交换在战俘营中的形式，就是以现在已有的商品用将来得到的红十字会的包裹相交换。由于缺乏对当前消费偏好，那么所有人同时将消费转移到未来的努力就会导致一个负的利率。在这一结果的推导中，不能无成本的存储财富是十分关键的假设，如果财富可以无成本地进行存储，那真实利率就绝不会是负的，在这种情况下，一个人是绝不会今天贷出 100 美元，明年收回 95 美元。因此，只有当足够的人都希望将收入转移到将来，例如，所有人都会预期收入将会下降，并且从现在到将来这段时间，存储财富的成本高昂，在上述两种条件的共同作用下，才有可能存在负的真实利率。

相反，假设目前经济处于增长状态，这样每个人就预期将来的收入一定比现在高。在这种情况下，将消费平坦化的愿望就会导致人们彼此签定协议，以把将来的消费转移到现在。任何人都可通过许诺，将自己将来的部分收入转给他人，从而从该人处获得现在的部分消费。然而，尽管部分人可以通过这种方式达到收入转移的目的，但所有人都这样做就不可能了，人们并非真正要消费下一年的收入，而是在同一个经济中，将这些收入同他人进行贸易，下一年的收入只有当它被生产出来的时候才会被消费掉。同时将未来收入转移到现在的努力就会产生一个对牺牲当前消费的报酬(贴水)，当该报酬增加时，就会有更多的人愿意做出这样的牺牲，同时贸易利得的耗尽导致该报酬，这个报酬指的是用放弃的未来消费表示的当前消费的价格，所有个人的当前消费的边际价值相等。

可以将同样的推理应用到以下的情况，即个人的时间偏好率为正，这样如图 12-2 无差异曲线与 45°射线交点处的斜率均为 $-(1+\rho)$，这个假设只是解释消费者为什么希望将未来收入转移到现在的另一个理由罢了，对它的分析同前一段中的分析类似，即消费者同时转移收入的努力会导致商品较早使用性的价格为正。

在前面的分析中，都将未来收入看作是外生的，即个人不能影响未来收入的水平。现在

---

14 上述三个支持正利率存在的理由可以在 Bohm－Bawerk's Capital and Interest 中找到，由 William Smart 翻译为 The Positive Theory of Capital, Books for Libraries Press, Freeport, NY, 1971。

让我们来放弃这一假设，即分析未来收入的内生的情况，通过将现在的收入转向“资本品”的生产可以增加未来收入，在这里的“资本品”本身不产生消费，也不会消费自身，而是增加了生产其他投入的边际产品，这样就可以在将来带来更多的收入。将资源投入到拖拉机、计算机、教育等方面，在消耗社会的当前消费的同时，也导致更高的未来收入。因而获得这样“迂回”生产的能力也影响着利率水平。

在该领域，由著名经济学理论家 Frank Knight 使用的分析策略是最简单的理论框架了。Knight 以鲁滨逊·克鲁索为分析对象。鲁滨逊·克鲁索的船搁浅在一个海岛上，食物供应包括一个可以食用的灌木，该灌木的生长速率 r 是外生恒定的，假设每年 10%。事实上，无论这个灌木大小，它都会以恒定的速度生长，换句话说，即它的生长速率与鲁滨逊·克鲁索对这个灌木在任何给定时间中的消耗无关。

图 12-6 描绘了这种情况，横轴上的点表示当前消费，纵轴上的点表示未来消费，C_1 表示消费全部灌木所达到的消费水平，如果现期全部消费，就会导致将来的饥饿，而如果不吃，则在下一个时期会有 $C_2=(1+r)C_1$ 可以消费。在这种情况下，鲁滨逊·克鲁索的预算约束线是一条直线，即用可以食用的灌木定义的生产边界线，其斜率为 $-(1+r)$。无论克鲁索有什么样的时间偏好率，只要他的效用函数是严格递增（克鲁索不会满足的）、具有拟凹性，并且排除边界解。那么，在效用最大化的切点上，他现期消费的边际价值一定是 $-(1+r)$。[15] 在这种情况下，生产条件完全决定了真实利率。在这种普遍采用的技术条件下，任何个人都可以沿着这条边界将现在消费转化为将来的消费，这样在多人经济中的利率就是恒定的增长率 r。

现在假设对目前以及将来消费的生产是沿着某种凹的生产边界线进行的，如图 12-7 所示。在单人经济中，利率的决定是取决于满足生产约束条件下，效用最大化的切线条件。时间偏好率（如果存在）和将当前消费转化成将来消费的（变化的）边际成本都决定着利率，在多人经济中，生产边界线定义了当前消费的边际成本（供应）曲线，该边际成本是用放弃的未来消费来表示的。

个人的偏好决定当前消费的需求，交换利得的耗尽将导致单一的市场价格，这样，对于市场中的所有参与者，用被放弃未来消费表示的当前消费的边际主观价值，就等于提供当前消费水平的边际机会成本，该成本也是用放弃的未来消费表示的。[16]

15　如果灌木实际上还以某种速率萎缩，而且任何部分只要腐烂，就会被除去，这样，存储灌木就是不可能的事情了，结果克鲁索就会面对一个负的真实利率 s。

16　在第 2 节关于一般均衡的部分中，我们分析了一个模型，该模型是用两种要素——劳动和资本——生产两种商品，即资本品和消费品。在该模型中，暗含着资本的租金率 R 等于资本的边际产品 MP_k 与资本价格 P 的乘积；利率就是 $r=R/p=MP_k$。在这个模型里，利率一方面是由资本品和消费品的相对价格决定，另一方面也是由商品中劳动与资本使用的相对密度决定的。见第 18 章。

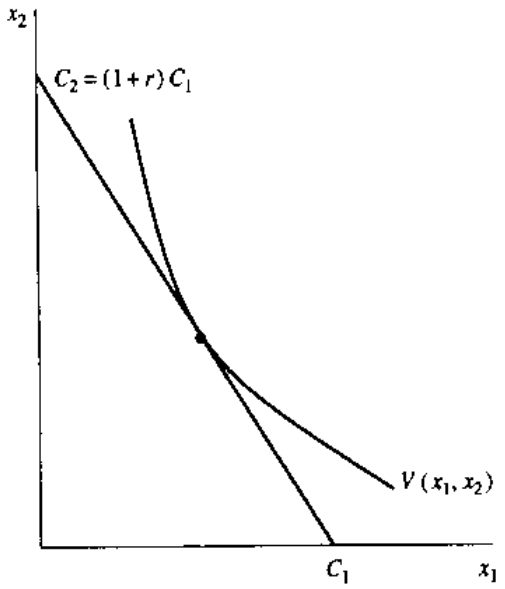

图 12-6　现期消费的边际成本固定条件下，克鲁索式经济中的两期消费。如果技术使一单位的现期消费总是可以转换成$(1+r)$单位的未来消费，那么利率一定是r，而与个人的时间偏好率是多少无关。

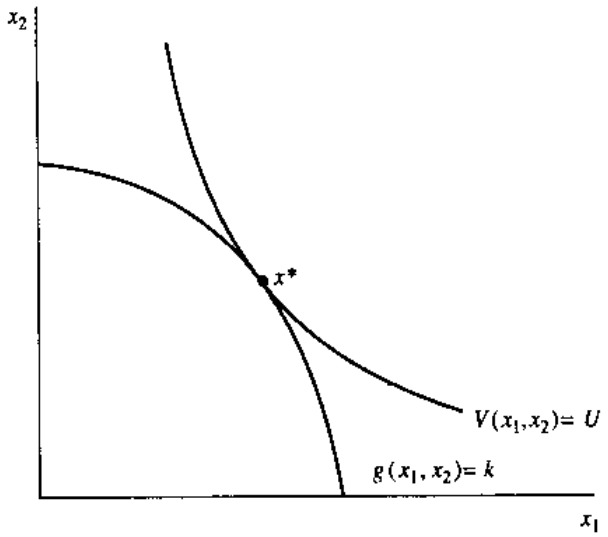

图 12-7　利率的市场决定因素。在一个可以根据某种凹生产边界线，将现期消费转换成未来消费，那么消费者现期消费的边际价值与现期消费的边际机会成本相等处的点确定市场利率。

12.3　存量与流量

能在将来提供收入的大部分商品都是耐用品，资本可以由直接商品构成，直接商品就是在某种生产过程中只被使用一次的商品，因而利率和时间偏好对于这样的商品就不是直接适用的。大部分资本的利率集中于那些可以持续几个或许多个时期的商品，在这种情况下，我们就必须区分物理存在的商品，称为存量，以及来自于这些存量的服务流量。

对于这些概念的一个方便的解释就是一幢房子和拥有或租用此房而获得的房屋服务。如果我们是租用房子，那我们实际上是购买了租期这段时间内的服务流，而如果我们是购买这幢房子，那就相当于我们购买了这一存量。对房子(存量)的拥有使拥有者可以在房子存在的所有时期内，消费将来全部的服务流。当然，与此同时，拥有者还有义务支付与所有权相关的所有成本及费用，如财产税，维修费等等。因而存量的价值就是预期的未来无限长时间的净租金的现值(服务流量、单位时间的值以及成本净值)。令t=时间，并假设存量从$t=0$时可以延续使用到$t=T$时，如果净租金值是某一恒定的值R，则存量的价格是：

$$P=\int_0^T Re^{-rt}\,dt-\left(\frac{1}{r}\right)R(1-e^{-rT}) \tag{12-18}$$

一般，R 在不同时期值是不同的，即 $R=R(t)$，在这种条件下，所有预期的净租金就都包括进存量的价格中了。在有效市场中，如果出现在将来的某个时间可以改变 R 值的新因素，那这些新因素也会很快地被“资本化”到价格 P 中。

当 $T\to\infty$：

$$P=\frac{R}{r} \tag{12-19}$$

即如果目前拥有 1000 美元，利率为固定值 0.10，则每年可以从中收取 100 美元的利息，消费存量的机会成本就是放弃每年都可以获得的稳定的 100 美元，(12-19)的另一种形式是，(永久)某项资产的租金率除以资产的价格即为利率 $r=R/P$。

事实上，一期或两期以上的租金的现值与利率的一般水平相比是十分小的。从 $t=T$ 到 $t=\infty$的存量的价值是：

$$P=\int_T^{\infty} Re^{-rt}dt=\left(\frac{1}{r}\right)Re^{-rT} \tag{12-20}$$

例如，如果 $T=50$ 且 $r=0.10$，那么 T 以后所有时间的资产的价值还不到过去 50 年资产价值的 1%。[17]因此，使用这个简单的公式(12-19)，$P=R/r$，就可以很好地近似计算任意长期的资产的现值。在现值的计算中，利率通常指的是折扣率，因为利率在这里的应用具有在算术上降低未来收入名义价值的效果。

在这些公式中应用的利率应当是能反应资金的机会成本，该机会成本可以有两种表达方式，其一是该资金用在其他投资项目中的回报，其二是用于生产当前消费的回报。与将来租金水平相关的，基于对将来实际情况的不确定性的风险，也是机会成本的一部分。这个机会成本是指将这些资金用于增加能带来未来收入的资产。风险的含义就是存在某种可能性，使目前用于构建资产的部分或全部消费得不到什么回报。预期未来收入有可能永远也不能实现，因此在上述计算中，更为恰当的利率应当是真实利率加上风险贴水。在股票市场上是用“市盈率”来报道公开上市的股票与当期发放股利的比率。典型的数字是 8 到 15，如果底限为 5，则认为太低，上限为 20，则认为太高。如果目前的所有者权益就是预期的平均未来收入，那这些数字的倒数就可以近似地认为是“权益资本的回报率”，即在考虑风险的前提下，反映投资于那些公司的机会成本的利率。

现在让我们来考虑利率的变化如何影响股票和现金流的价格和数量以及投资报酬率。[18]图 12-8 中的(a)展示的是住房供给的供需曲线，即房屋的服务流量，垂直的供应曲线表明提供的房屋单元的供给相当大，并且在短期内不会有太大的变化。当然，在任何时候都

17　著名的法国数学家 Blaise Pascal 曾经说，正是对死后无限的深谋远虑才让人们信仰宗教，但他没有将把未来价值转为现值时的折扣考虑在内，而正是这个原因使年青人经常无视他的建议，而老年人则乐于听从，见 Corry Azzi and Ron Ehrenberg，“Household Allocation of Time and Church Attendance，”Journal of Political Economy，83：27-56，February 1975。

18　该讨论改编自 James Witte，Jr.，“The Microfoundations of the Social Investment Function，” Journal of Political Economy，74：441-456，October 1963。

会有一些房子废弃不用，而另一些则刚刚建成，为简化讨论起见，这里假设供应曲线表示一个净房屋供应的"稳定状态"，对提供房屋的服务流量需求则从效用最大化中推导而来，这与其他商品或服务的需求推导过程是一样的，但同时在该需求的推导过程中，由于获得房屋的不同方式，如租借或购买，因而还涉及到交易成本最小化的问题。最后由供需曲线共同确定市场上租赁房屋的价格 R。

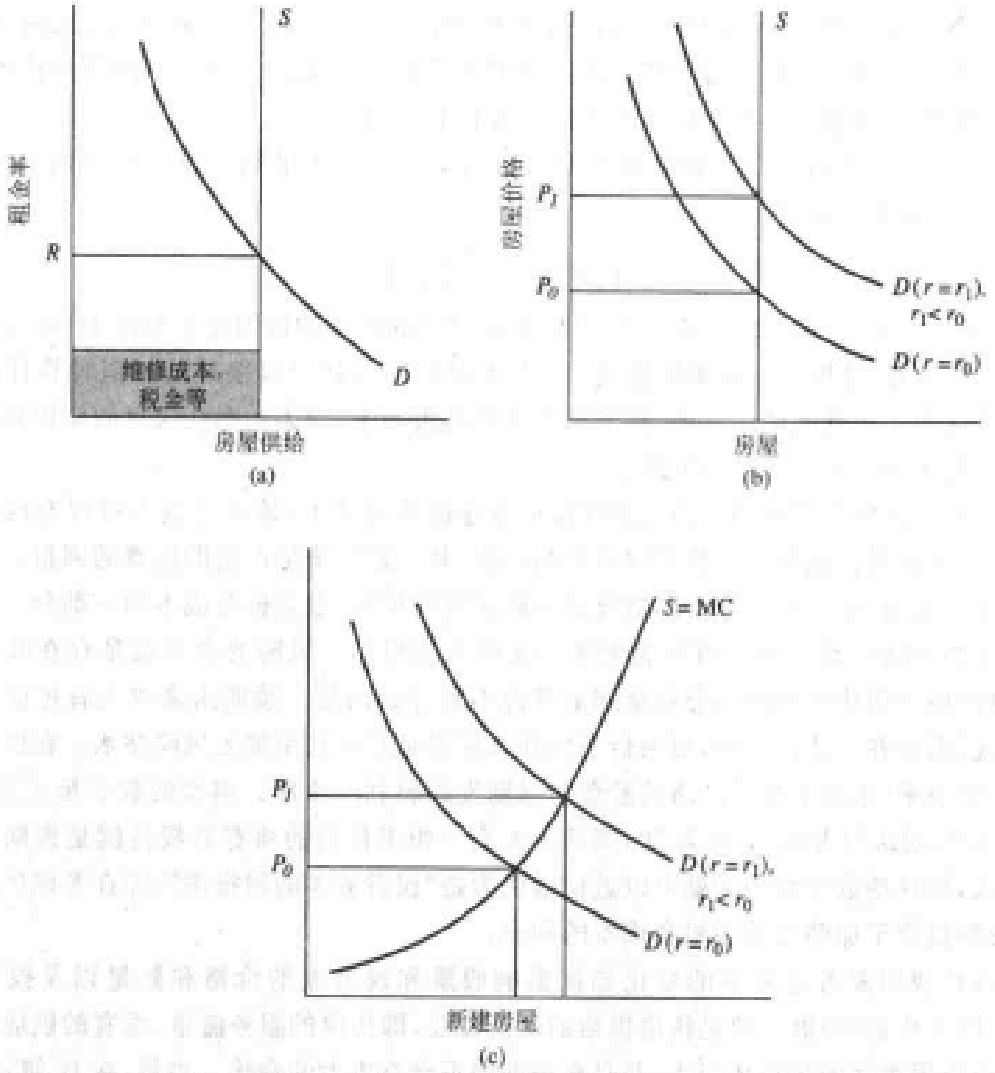

图 12-8 存量与流量。图(a)表示房屋服务"流"的供需情况。这些曲线大部分是不受利率影响的。在图(b)中，当利率下降时，对房屋存量的需求向上移动。图(c)表示房屋价格的上升导致新房屋的供给增加。

假设，由于外界的原因，真实利率从 r_0 下降到 r_1，这些原因可能是，预期中未来的经济增长会下降，或为保证未来的收入需要更大的保障。真实利率的变化对于房屋(相对于其他同期的商品)的需求没有任何可预见的影响，利率的下降实际上就是当前消费相对于未来消费的价格下降，当前商品的混合，即房屋、食物、服装等，是不应受其影响的。因此，我们推测

租赁价格 R 不发生变化，但是在(b)图中，画出的是房屋的供需曲线，房屋的市场价格就是净租金的现值：

$$P=\frac{R-C}{r} \tag{12-21}$$

上式中，C 是由住房拥有者所承担的年度费用，如维修成本和税金。成本 C 在图(a)中是由全部年度租金中的阴影部分表示的，r 的下降表明对当前消费的补贴下降了，未来消费的价值就相对升高，因而，任何能在将来产生收入的资产价值也相应提高。那么，对于这样的资产的需求也就会向外移动，如图(b)所示，表示所有预期的将来房屋服务现值的房屋价格 P，因此也会上升。

房屋当前价格的上升对市场上新房的供需有显而易见的影响。图(c)中是对新房的供需关系。当利率下降时，新房的需求曲线向外移动，因为拥有一项能在将来提供收入的资产其价值相对较高，因此，新(和旧)房的价格上涨，新房的建造直到生产的边际成本与消费者对新房的边际价值评价相等时候，才会停止。提供住房的数量会上涨，从而高于原来的水平。在短期内，由于房屋供给的存量已经相当大了，所以，上述变化对于租金的影响是可以忽略的。但是经过一段时间之后，房屋供给的存量将增长到从前的水平之上，增加了住房服务的供应，从而就会降低提供住房的租赁价格，如果新的利率永远处于较低的水平，那就会有更新的、更大的、稳定的住房以及住房服务出现。

上述的分析证明了，尽管货币当局可以试图通过降低利率来使房屋服务更容易被更多人接受，但这样做的短期效果也仅仅是使房价上升。租赁价值是不会被这样的政策影响的，惟一的变化也只发生在利息以及抵押支付的本金中。从长期来看，当更大的房屋供给的存量普遍存在时，将来的房屋购买者也许就会获得某些好处。但是，如果这种结果是通过扭曲资本价格获得的，也就是说，如果当前消费的价格是由其他种类的收入补贴的，那么整个经济就会遭受效率的损失，即失去贸易中的利益。通过对个人要支付的某项贷款合同——如住房抵押——的利息进行补贴，总是可以使这个人的情况更好，而通过这种方式增加每一个人的财富则完全是另一回事了。

应用同一分析框架还可以解释其他一些问题。在 1978 年，加利福尼亚的选举者们通过了著名的“13 号建议”，该建议大幅降低财产税，该建议对于公众来讲，部分上是作为降低租赁价格的手段。当然，从上图(a)中我们知道，由于法律没有能影响房屋服务的供给与需求，因此，至少在短期是不会达到所期望的效果的。但是，通过降低住房所有权的成本 C，从而增加了财产所有者的净租金，从而房价也随之上升。正如等式 12-21 所示，导致新建住房的增加。在长期租赁价格将会下降，但这仅仅是由于从更大的房屋供给的存量中产生更多住房服务的供给。[19]

19　在另一方面，许多地区的财产税是直接与地区的社区服务相联系的，如学校。人们在搬入特定的城市或社区时，就要交这样的税，表明他们可以消费这里提供的地区性服务。例如，如果搬入该地区的主要目的是为了能在这里上学，消费教育。那么，某学校征税的失败，就可能实际上导致房价的下降。

习题

1. 效用函数如下：

$$U(x) = \sum \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t \log x_t$$

$$U(x) = \sum \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t x_t^{\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$$

假设某人具有这些偏好以及禀赋 $x_1^0, x_2^0 \cdots, x_n^0$，在满足财富约束条件下，最大化效用，利率为 r。证明任何一期的消费(除第一期以外)都等于一个常数乘以前一期的消费。证明对于 $r>\rho(r<\rho)$该常数大于(小于)效用。

2. 假设你拥有一套公寓楼，每年租金收入为 R，现在有两种处置方式，一种是以价格 P 卖掉，另一种方式是出售股份。
   (a) 以"当前消费"为横轴，"未来消费"(假设是无限远)为纵轴，画出由出售股份所产生的可行的消费点。
   (b) 假设你得知房产的价值下降了一半，其原因也许是利率涨了一倍或一半的房子被烧掉了。如果存在这样的事情，则在什么样的条件下，财产损失的原因对你是无差异的[20]？
3. 目前在美国，在计算联邦收入税的时候，房屋抵押的利息已从收入中扣除，那么删除这项收入来源对下述各种人的财富有什么影响？
   (a) 目前房屋的拥有者。
   (b) 将来可能的房屋拥有者。
   (c) 建筑行业的人。
4. 假设羊的繁殖可以保持每年使羊的数量增加 10%，那么真实利率会变为 10%吗？
5. "投资于土地，由于人口是稳定增加，而土地又是相对固定不变，因此随时间增加，租金也随之上涨，这样，土地将产生可观的回报"。评论这段话，你的回答是如何依赖于"人口增长"和"固定的土地"这两个假设前提的？
6. 目前美国税法要求公司基于历史成本，而非重置成本来评估资产。
   (a) 通货膨胀对未来利润的现值以及股价有何影响？
   (b) 在美国法律环境下，为了税收的目的，黄金以及房主居住的自己房屋是不可贬值的，那么未被预期到的通货膨胀上升对这些资产的影响如何？同对其他资产的影响有何不同？
   (c) "资本盈利"(某种资产价值的增加)是以名义基础征税的，这样通货膨胀就会制造虚假的可征税的资本盈利，但是，房主居住的房子如果是一年内购买的、又新又更加昂贵的房子，则可以免税。在这种情况下，(未被预期的)通货膨胀对这种资产的相对价格的有什么影响？
7. 如果房屋抵押是以按月的固定支付为基础的，那么通货膨胀增加对实际的支付负担有何影响？同时对个人偿还债务的能力有何影响？

---

20 改编自 A. Alchian and W. Allen, Exchange and Production, 3d ed., Wadsworth, Belmont, CA, 1983。

8. 某一城市地区的投票者颁布了一项"绿带"法案，以限制周边的乡村地区扩散房产，这项法案对如下方面有什么影响？
   (a) 目前以及将来的租金率。
   (b) 目前以及将来的房屋价格。
9. 假设汽车平均每年可以行驶 10 000 英里，汽油的零售价为每加仑 1 美元，假设有如下不同的里数初值，如 15 英里/加仑、20 英里/加仑、25 英里/加仑，那么在上述三种初值条件下，将每加仑的里数增加 1 英里，对消费和对私汽车生产商分别有多大的价值？
10. 证明下述著名的"72 规则"：如果增长速度为每年 $g\%$，那么大约 $72/g$ 年之后，最初的量(资产、本金等)就会增加一倍。

部分参考文献

Bohm-Bawerk, E. : Capital and Interest, translated by William Smart, as *The Positive Theory of Capital*, Books for Libraries Press, Freeport, NY, 1971.

Brealey, R. A., and S. C. Myers: *Principles of Corporate Finance*, 3d ed., McGraw-Hill, New York, 1988, pp. 569-570.

Fisher, I. : *The Theory of Interest*, August M. Kelly, New York, 1970. (First edition, The Macmillan Co., New York. 1930.) This book is so clear, you may become convinced you knew this material all along, even if you didn't.

Friedman, M. : *A Theory of the Consumption Function*, National Bureau of Economic Research, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957.

Green, H. A. John: *Consumer Theory*, rev. ed., The Macmillan Co., London, 1976. Contains an excellent discussion of intertemporal choice and uncertainty.

Ibbotson Associates, *Stocks, Bonds, Bills and Inflation: 1997* [*Annual*] Yearbook, Ibbotson Associates, Chicago, 1997.

Modigliani, F., and R. Blumberg: "Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross Section Data," in *Post Keynesian Economics*, K. Kurihara (ed.), Rutgers University Press, New Brunswick, NJ, 1954.

Olson, Mancur, and Martin J. Bailey: "Positive Time Preference," *Journal of Political Economy*, 89(1): 1-25, February 1981. A readable discussion of the issues surrounding the existence and evidence for positive time preference.

Strotz, R. : "Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization," *Review of Economic Studies*, **23** (3): 165-180, 1956.

Witte, J. Jr. : "The Microfundations of the Social Investment Function," *Journal of Political Economy*, **71**: 441-456, October 1963.

Yaari, M., "On the Consumer's Lifetime Allocation Process," *International Economic* Review, 5: 304-317, 1964.

第 13 章　不确定下的行为

13.1　不确定情况下的行为

不确定是生活中的常事。对于不确定情况下行为的数学分析，需要用到概率的概念。我们首先举 3 个例子来说明怎样设计事件的概率。

1. 抛一块硬币会出现两种可能的结果：头朝上或尾朝上。如果假设两个事件的发生都有同样的可能性，那么它们一定具有相同的概率。也就是说，头朝上和尾朝上的概率都是 0.5。

2. 在美国，每年大约每 1000 人中就有 8 人死去，我们可以说，在美国每个人在一年中死去的概率是 0.008。因此，某一事件发生的概率就等于试验在类似的条件下重复大量的次数，该事件发生的相对频率。当然，不同年龄、性别或健康状况的人代表不同的条件。但是，我们知道，85 岁以上的人死亡的概率是 0.4，因为在这个年龄段的人群中人们以该相对频率死亡。

3. 当一个企业家把一种新产品引入市场时，等概率发生的概率事件的概念和相对频率的概念不再有用。但是，只要一个人对于不确定结果的行为所持偏好满足一些一致性条件，那么，我们也能决定他对于不同可能事件的主观概率。[1] 例如，该企业家会认为新产品失败的可能性是 0.71，而成功的可能性是 0.29。如果我们对预测行为感兴趣，那么主观概率就可以发挥作用。

前面 3 个例子分别对应于 3 种不同概率的定义。无论采用哪种概率定义，概率的数学理论都是一样的。假设 S 代表所有可能出现的结果的集合，而 E 是 S 的一个子集。而且，我们用 $\Pr(E)$ 来表示事件 E 发生的概率。那么，概率函数就是把实数与 S 的子集相对应的函数联系，并且它满足以下条件：

1. 对于任一事件 E 都有，$\Pr(E)>0$。

2. $\Pr(S)=1$。

3. 对于任何一个有限或无限的互相排斥的事件 $E1, E2\cdots$，都有 $\Pr(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \Pr(E_1)+\Pr(E_2)\cdots$

由于本书篇幅有限，我们只提供对于概率、随机变量、均值和方差概念的最粗略的介绍。读者如果想进一步了解概率论，可以参考各种关于概率或数理统计的书。

1　See L. J. Savage, *The Foundations of Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1954.

随机变量和概率

随机变量是一个函数，它使事件结果与实数相对应。例如，在抛硬币的试验中，我们可以这样定义随机变量：如果硬币落到地上时头朝上，那么 $X=47$；如果硬币落地时尾朝上，那么 $X=35$。与每一个随机变量相关联的是累计分步函数，即：

$$F(X)=\Pr(X\leqslant x)$$

继续这个例子，如果硬币是一块分布均匀的硬币，那么 X 的分布是：

$$F(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\geqslant 47\\ 0.5 & \text{当 } 47>x\geqslant 35\\ 0 & \text{当 } x<35\end{cases} \tag{13-1}$$

这里需要注意的是，分布函数具有以下性质：

1. $F(\infty)=1$。
2. $F(-\infty)=0$。
3. $F(x)$对于 x 而言是单调不递减函数。

关系式(13-1)所给出的分布函数显然满足以上这些条件。

随机变量可能是离散的，也可能是连续的，如果随机变量是离散的，那么它只能是有限个值或可列无限值。例如 $x_1,x_2,x_3\cdots$与离散随机变量 x 相关的概率函数是：

$$f(x)=\Pr(X=x)$$

显然，概率一定是非负的，而且加起来等于 1。因此，我们可知：

1. $1\geqslant f(x)\geqslant 0$。
2. $\sum_x f(x)=1$。

当随机变量是连续时，该随机变量等子某一特定值的概率是零。但是，我们发现位于一小段间隔之间的随机变量的概率是 $\Pr(x<X\leqslant x+h)$。把该概率除以间隔长度，并取间隔长度趋向于零的极限，我们能得到概率密度函数：

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\Pr(x<X\leqslant x+h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\&=F'(x)\end{aligned}$$

概率密度函数也必须满足两个条件：

1. $f(x)\geqslant 0$。
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$。

这里需要注意的是 $f(x)$可以大于 1，因为它不是一个概率。

期望值和方差

分布函数可以彻底地描述一个随机变量。但是，用一个实数来总体上描述随机变量的集中趋势或者随机变量的平均行为总是有用的。在这些描述随机变量的集中趋势的实数中，最重要的测量工具是期望值，也称为均值。用 $E(x)$ 来描述代表随机变量 x 的均值或期望值，其定义如下：

$$E[x]=\begin{cases}\sum_{x} xf(x) & \text{如果 } x \text{ 离散}\\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x & \text{如果 } x \text{ 连续}\end{cases}$$

例 1. 考察下面的赌博行为。如果有个人不断地抛硬币直到出现尾部朝上的情形为止。如果第 1 次就出现尾部朝上的结果，你将赢 1 美元；如果尾部朝上出现在第 2 次，你能赢 2 美元，如果出现在第 3 次，你能赢 4 美元。以此类推，如果出现在第 n 次，你将赢 $2n$ 美元。我们不妨令随机变量 x 代表你所赢的钱，那么赢 2^{n-1} 美元的钱的概率是 $(1/2)^n$。因此 x 的期望值是：

$$\begin{aligned}E[x]&=\sum_{n}2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\\&=\infty\end{aligned}$$

该赌博被称为皮特斯博格(Petersburg)矛盾。称其为矛盾是因为尽管赢钱的期望值是无限的，但是人们却不愿意花大量的钱去参加这种赌博。调和这种矛盾的一种方式是假设个人是风险规避者。18 世纪数学家伯努利就是采用这种方法，[2] 我们在后面会更详细地讨论这个问题。另一个方法是认为你的对手并没有无限多的财富。假设你的对手只有 10 亿 (10^9) 美元，如果尾部朝上的结果出现在第 30 次或更靠前，那么你还可以赢得你预期能得到的钱。但是，如果出现在 30 次以后，那么他也只能支付给你 10 亿美元。你将赢得 10 亿美元的概率是：$f(10^9)=\left(\frac{1}{2}\right)^{31}+\left(\frac{1}{2}\right)^{32}\cdots=\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$。可见皮特斯博格赌博的期望值所提供的财富约束少于 16 美元：

$$\begin{aligned}E[x]&=\sum_{n=1}^{30}2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+10^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}\\&=30(0.5)+10^{9}(9.3\times10^{-10})\\&=15.93\end{aligned}$$

2 See Daniel Bernoulli, "*Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*" (1973), trans. By L. Sommer, *Econometrica*, 22：23-36, 1954.

例 2. 假设某一事件成功的概率是 p(那么不成功的概率是 $1-p$)。具体说,假设一个企业每年面临破产的可能性是 p,而且是固定的。也就是说,在每一年中年初开始开业的企业,它在该年年末还继续运行的概率是 $1-p$。那么,我们期望一个企业能生存多少年呢?我们用以下的方法来计算期望值,期望的年数是:

$$E(n)=1p+2p(1-p)+3p(1-p)^2+\cdots$$

对于任何一个无限几何序列而言,当$|z|<1$ 时,总是有:

$$z+z^2+z^3+\cdots\equiv\frac{z}{1-z}$$

由于这是一个恒等式,所以我们对该恒等式两边求导,可以得出:

$$1+2z+3z^2+\cdots\equiv\frac{1}{(1-z)^2}$$

把这一方法应用到 $E[n]$表达式上,并且令 $z=(1-p)$,那么可以得到:

$$E(n)=p\left(\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{p}$$

因此,如果公司在一年中有 0.1 的可能性要破产,那么这样公司的平均寿命是 10 年。

很自然,有关期望值的表达方法可以扩展到随机变量的函数上。如果 $u(x)$是随机变量 x 的一个函数,那么 $u(x)$自身也是一个随机变量,其期望值是:

$$E[u(x)]=\begin{cases}\sum_x u(x)f(x) & \text{如果 } x \text{ 离散}\\ \int_{-\infty}^{\infty}u(x)f(x)\mathrm{d}x & \text{如果 } x \text{ 连续}\end{cases}$$

一般而言,$E[u(x)]\neq u(E[x])$,除非 u 是 x 的一个线性函数。如果 $u=a+bx$,这里 a, b 都是定值,那么:

$$E[a+bx]=a+bE[x]$$

这种期望值的线性性质还可以被应用到两个或两个以上随机变量的情况上。因此,对于任何两个随机变量 x 和 y,不管 x 和 y 是不是相互独立的都会有:

$$E[x+y]=E[x]+E[y]$$

对于两个随机变量 x 和 y 而言,当且仅当对于任意任给 x^0 和 y^0 都有 $\Pr[x\leqslant x^0,y\leqslant y^0]=\Pr[x\leqslant x^0]\Pr[y\leqslant y^0]$,那么随机变量 x 和 y 才相互独立。如果 x 和 y 是相互独立的,那么:

$$E[xy]=E[x]E[y]$$

随机变量的期望值是测量该随机变量集中趋势的指标,而方差说明了该变量易变化的程度。在数学上,用 var(x)来代表随机变量 x 的方差,其定义是:

$$\mathrm{var}[x]=E[(x-\mu)^2] \tag{13-2}$$

其中 $\mu=E[x]$。等式(13-2)还可以写成:

$$\mathrm{var}[x]=E[x^2-2x\mu+\mu^2]$$

$$=E[x^2]-2\mu E[x]+\mu^2$$
$$=E[x^2]-2\mu^2+\mu^2$$
$$=E[x^2]-\mu^2$$

关于方差，有两种事实需要引起我们注意：

事实 1 对于任给的定值 a 和 b，都有 $\mathrm{Var}[a+bx]=b^2\,\mathrm{Var}[x]$。

证明：令 $\mu=E[x]$，那么：

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[a+bx]&=E[((a+bx)-(a+bu))^2]\\&=E[b^2(x-u)^2]\\&=b^2E[(x-u)^2]\\&=b^2\,\mathrm{var}[x]\end{aligned}$$

事实 2 如果 $x_1,x_2\cdots x_n$ 是互相独立的随机变量，那么：

$$\mathrm{var}[x_1+\cdots+x_n]=\mathrm{var}[x_1]+\cdots+\mathrm{var}[x_n] \tag{13-3}$$

证明：令 $\mu_i=E[x_i]$，$i=1,\cdots n$，那么：

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[x_1+\cdots+x_n]&=E[(x_1+\cdots+x_n)-(\mu_1+\cdots+\mu_n)]^2\\&=\sum_i(E[x_i-\mu_i)^2])+2\sum_{i>j}(E[x_ix_j]-\mu_i\mu_j)\end{aligned} \tag{13-4}$$

如果 x_i 和 x_j 是互相独立的，那么，上述第二项等于零，因而得出等式(13-3)。

等式(13-4)中 $E[x_ix_j]-u_iu_j$ 项就是 x_i 和 x_j 的协方差，因此，一般而言有：

$$\mathrm{var}[x_i+x_j]=\mathrm{var}[x_i]+\mathrm{var}[x_j]+2\mathrm{cov}[x_i,x_j]$$

例 3. 令 x 是一个企业一支股票的价值。如果 σ^2 是 x 的方差，那么一人拥有该企业股票的 n 股的投资组合会有方差 $\mathrm{var}[nx]=n^2\sigma^2$。另一方面，如果某人喜欢拥有 n 种不同的股票 $x_1\cdots x_n$，其中每种股票都投资 1 股，而且这些股票的收益都是互相独立的。如果所有股票都具有相同的方差 σ^2，那么这个多元化的证券组合的方差只有 $\mathrm{var}[x_1+\cdots+x_n]=n\sigma^2$。

13.2 细述偏好

状态偏好方法

在前几章所阐述的消费理论已经可以随时被扩展到不确定情况下的消费行为。今天消费的苹果和明天消费的苹果不一样，类似地，热天的冰淇淋和冷天的冰淇淋也不同。在跨期间消费问题上，同样物质的商品在不同时间上的消费被认为是不同的商品。在与不确定相关的问题上，我们可以在把不同的状态下的同一物质商品看成是不同的商品。所谓状态变化商品是指只有在特定的世界状态下才能消费的商品。一个例子是有关运送冰淇淋的合同，该合同明确规定，只有在气温超过华氏 80°度时才运送冰淇淋，否则不运送。假设只有

两种可能的状态，让 W_1 和 W_2 分别代表状态 1 和状态 2 下商品的数量。尽管 W_1 和 W_2 可以是代表商品集的向量，但是通常是代表财富或复合商品的分量。如果状态度和状态的可能性分别是 π_1 和 π_2，且 $\pi_1+\pi_2=1$，那么消费者的偏好可以用以下效用函数来代表：

$$U(W_1,W_2;\pi_1,\pi_2) \tag{13-5}$$

这里，我们是在权变的消费计划(W_1,W_2)基础上来定义效用。由于状态权变商品的价值依赖于在外生的价格水平，即该价格水平状态发生的可能性有多大，因此效用函数也把概率 π_1 和 π_2 作为参变量包含其中。消费者将选择 W_1 和 W_2 使其在预算约束下达到效用的最大值。由此推导出来的消费者对于状态权变商品的需求函数满足以前章节中有关需求函数的所有定理。但是，由于状态偏好方法是非常一般的，因此，在状态权变商品中完全竞争市场假设是很难得到满足的。如果有 n 种不同的商品和 s 种可能的状态，那么就有 ns 种不同的市场。阿罗(Arrow)已经证明状态权变声明下的交易(也就是说，这种声明就是这样的金融合同，该合同说明在不同的世界状态下可以获得不同量的钱)可以用在状态权变商品之间的交易来代替[3]。那么，一个完整的市场集只需要 n 种商品市场和 s 种证券市场。由于详细说明和测量状态是很困难的，因此要对权变性市场进行组织和管理会具有很高成本。当状态权变商品并不在市场上进行交易时，这种状态偏好应用于实证研究具有一定的限制性。

期望效用假设

等式(13-5)所示的效用函数是很一般的。如果效用满足一些附加的公理的话，那么我们就有可能对于效用函数施加更多的结构。这些很重要的公理是：

1. 状态是互相独立的。如果在一种前景中，在状态 1 情况下会有 x，在状态 2 情况下会有 y；另一种前景是在状态 1 情况下会有 y 而在状态 2 情况下会有 x。如果在两种前景中 x 出现的概率都是一样的，那么消费者对于这两种前景具有同样的偏好。状态独立性意味着偏好依赖于世界中状态的可能性，而不在于状态本身。该公理是否合理看具体问题而定。例如，对于医疗保险而言，尽管医疗费用可以全部得到补偿，但是偏好还是依赖于其健康状态。

2. 复合彩票的简约性。如果 x 是一个不确定的前景，这个前景由两种可能的状态组成，即 y 和 z，并且出现 y 的概率是 π，而出现 z 的概率是 $1-\pi$。如果存在另外两种不确定前景，前一个前景由 x 和 z 两个可能事件组成，发生的概率分别是 $\hat{\pi}_1$ 和 $1-\hat{\pi}_1$；后一个前景由 y 和 z 两种可能事件组成，它们发生的概率分别是 π，$\hat{\pi}_1$ 和 $1-\pi\hat{\pi}_1$，那么消费者对于这

3　See Kenneth J. Arrow, "*The Role of Securities in the Optimal Allocation of risk bearing*", *Review of Economic Studies*, 31：91-96, 1964.

两种不确定前景具有相同的偏好。这条公理指出消费者对于不确定的前景的偏好只依赖于所收到的各种价格的可能性，而不依赖于这些可能性形成的方式。但是，如果消费者喜欢不确定，那么，这条公理就不能成立。

3. 连续性。如果 x 偏好于 y，且 y 偏好于 z，那么存在一个概率值 π，使消费者对于 y 的偏好，与对于一个不确定性前景的偏好相同。这个不确定前景由两种可能事件组成，它们分别是由 x 和 z，它们发生的概率分别是 π 和 $1-\pi$。当然，连续性公理也并不总是成立。例如当 x 是 2 美元，y 是 1 美元而 z 是死亡时，连续性公理就可能成立了。另一方面，人们为了节省几分钟总喜欢横穿马路。

4. 无关替换物之间的互相独立性。如果 x 偏好于 y，那么对于任意给定的 z，如果存在两个不确定前景，前者是由 x 和 z 两个事件组成，它们发生的概率分别是 π 和 $1-\pi$；后者由 y 和 z 两个事件组成，它们发生的概率分别是 π 和 $1-\pi$。那么，消费者对于前者的偏好总是强于后者。在确定性条件下，互相独立性公理是很强的公理，因为消费者同时或先后消费两种商品时，在这两种商品之间存在着各种各样的补偿和替代关系。但是，在不确定的前景中，个人不可能同时得到 x 和 y，或 y 和 z 两种商品。因此，z 的存在不可能影响消费者对于 x 和 y 的偏好。

我们已经证明了这样的假定，即我们可以用期望效用来表示消费者对于不确定前景的偏好。[4] 如果一个前景由 W_1 和 W_2 组成，其发生的概率分别是 π_1 和 π_2，那么，我们可以用如下方式定义一个效用函数 $u(\cdot)$，即：

$$U(W_1, W_2; \pi_1, \pi_2) = \pi u(W_1) + \pi_2 u(W_2)$$

该效用函数 $u(\cdot)$ 常被称为冯纽曼—摩根斯坦(Von Neumann－Morgenstern)效用函数，因为他们在决策论中进行了开拓性的工作。[5] 注意，现在用效用函数的期望值来表示偏好。这种偏好的表达形式是由于效用对于 W_1 和 W_2 而言是可加和可分的，而且是 π_1 和 π_2 的线性函数。可分性是公理 4 的结果，而线性性是公理 2 的结果。如果偏好并不是依赖于状态的但是其他公理仍然成立，那么效用可以表示成：$U = \pi_1 u^1(W_1) + \pi_2 u^2(W_2)$，其中 u^1 和 u^2 是微分方程。

基数和序数效用

和在确定性情况一样，对于不确定前景的效用函数也是一种偏好表示的便利方式。$U(x) \geqslant U(y)$ 时，如果前景 x 总是偏好于或无差异于前景，那么 $U(\cdot)$ 是一个有效的效用函数。因为对于任何一个单调递增转换 F，$U(x) \geqslant U(y)$ 意味着 $F(U(x)) \geqslant F(U(y))$，因此

4 See R. D. Luce and H. Raiffa, Games and Decisions, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.

5 See J. Von Neumann and, Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944.

$F(U(\cdot))$也是一个有效的效用函数。也就是说，在分析不确定下的行为时，效用仍然是一个序数概念。

例 1. 令 x 是一个由 w_1 和 w_2 组成的不确定前景，两事件发生的概率分别是 π_1 和 π_2，如果偏好可以用以下效用函数来表示，即：

$$U(x)=\pi_1\log W_1+\pi_2\log W_2 \tag{13-6}$$

那么：

$$V(x)=e^{U(x)}=W_1^{\pi_1}+W_2^{\pi_2} \tag{13-7}$$

也是一个有效的效用函数。

但是，在这个例子中，在(13-6)和(13-7)之间存在重大的差异。如果 $u(W)=\log W$，那么等式(13-6)满足期望效用函数性质，但是不可能用效用函数的期望值来表述(13-7)。一般而言，对于效用函数进行随意的单调转换后，期望效用的性质一般不会再有了。为了保证期望效用性质，对效用函数的转换必须是线性的，我们可以很容易证明这条结论。假设 $U=\pi_1 u(W_1)+\pi_2 u(W_2)$，并且我们对它进行线性转换 $V=a+bU$(其中 $b>0$)。由于 $\pi_1+\pi_2=1$，因此我们可以得到：

$$\begin{aligned} V &= a+b(\pi_1 u(W_1)+\pi_2 u(W_2)) \\ &= \pi_1(a+bu(W_1))+\pi_2(a+bu(W_2)) \end{aligned} \tag{13-8}$$

等式(13-8)满足期望效用性质，其冯纽曼—摩根斯坦效用函数等于 $a+bu(\cdot)$。我们需要很清晰地区分不确定前景的效用函数 $U(x)$和冯·纽曼—摩根斯坦效用函数，前者代表了消费者对于一个不确定前景的偏好。但是，对于 U 的任何单调转换形式还是一个有效的效用函数，并且代表了同一个不确定前景的偏好，而对于 u 的任一随意的单调转换形式并不一定代表同样偏好的冯纽曼—摩根斯坦效用函数，因为冯纽曼—摩根斯坦效用函数是独一无二的，并且只适合线性转换。

例 2. 假设偏好是由例 1 中等式(13-6)表示，并且冯·纽曼-摩根斯坦效用函数是 $u(W)=\log W$，如果我们把 u 进行单调转换 $v=e^u$，并且把它当成是冯·纽曼—摩根斯坦效用函数，那么，对于不确定前景的偏好是：

$$V=\pi_1 W_1+\pi_2 W_2$$

这与(13-6)或(13-7)的偏好结构有明显的不同。

对于正的线性转换而言，具有惟一性的偏好指数有时也称作基数指数。一旦最初的指数以及中间增加的部分确定，那么基数指数也被独一无二地确定下来。温度是基数尺度的一个例子，所以也是冯·纽曼—摩根斯坦效用。对于某一函数而言，对其进行线性变换得到的函数具有这样的性质，即其二阶导数的符号不会发生变化。假设 W 代表财富，而 $u(W)$ 是负的，这说明财富的边际效用递减。因为：

$$\frac{d^2}{dW^2}(a+bu(W))=bu''(W)$$

所以，任何 W 的递增线性转换形式还将保证财富边际效用递减的性质。正如我们将在下一

节所要看到的那样，冯纽曼—摩根斯坦效用函数是否具有递增或递减的边际效用对于消费者处理风险行为有重大的含义。但是，由于冯纽曼—摩根斯坦效用函数只是表示消费者偏好的一种便利方法，因此，我们没有办法对消费者主观满足程度上的变化进行比较。

13.3 风险厌恶者

在确定性的情况下，偏好的凸性隐含着对多样化的偏好。图 13-1 画出了某一消费者的无差异曲线，该消费者在(a)两个苹果和零个橘子；(b)零个苹果和两个橘子之间是无差异的。由于该无差异曲线是凸向原点，那么由一个苹果和一个桔子组成的商品组合要严格偏好于(a)或(b)的情形。类似地，在跨期消费理论中，无差异曲线的凸性意味着跨区间平滑的消费路径要偏好于无规律的消费路径。当我们用状态偏好方法来分析不确定情况下的消费者行为时，可以画出状态权变消费的无差异曲线。如果我们用“状态 1 的收入”和“状态 2 的收入”来重新标签图13-1的两个轴，那么该图说明，在两种状态下，分别得到收入 1 美元的组合要偏好于在一种状态下可得到 2 美元而出现另一种状态得到零美元的不确定前景。换句话说，这里无差异曲线的凸线隐含着消费者是风险厌恶者。

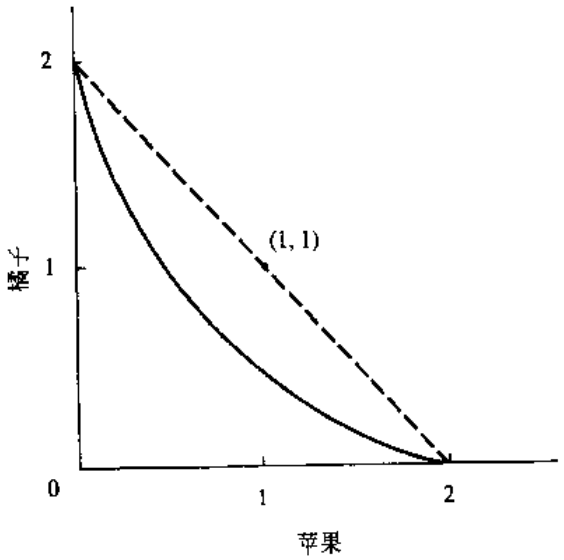

图 13-1 风险厌恶者。当冯·纽曼—摩根斯坦效用函数是凹性时，收入的边际效用是递减的。具有这种效用函数的个人是风险厌恶者，因为他们拒绝公平的赌博。这种行为等同于状态权变商品凸的无差异曲线。

现在让我们来考察无差异曲线的凸线和冯纽曼—摩根斯坦效用函数之间的联系。沿着一条无差异曲线移动，期望效用是固定的。因此，无差异曲线可以定义为：

$$\pi_1 u(W_1) + \pi_2 u(W_2) \equiv U^0 \tag{13-9}$$

把(13-9)两边对 W_1 求导，得出无差异曲线斜率：

$$\frac{dW_2}{dW_1} = -\frac{\pi_1 u'(W_1)}{\pi_2 u'(W_2)}$$

如果在任何一点上无差异曲线都是凸的，那么其二阶偏导是：

$$\frac{d^2W_2}{dW_1^2}=\frac{\pi_1u''(W_1)(\pi_2u'(W_2))^2+\pi_2u''(W_2)(\pi_1u'(W_1))^2}{(\pi_2u'(W_2))^3}$$

并且该二阶导数对于所有 W_1 和 W_2 而言都是正的。尤其当 $W_1=W_2=W$ 时，二阶偏导是：

$$\frac{d^2W_2}{dW_1^2}=\frac{\pi_1\pi_2(\pi_1+\pi_2)u''(W)u'(W)^2}{(\pi_2u'(W))^3}=-\frac{\pi_1u''(W)}{\pi_2^2u'(W)} \tag{13-10}$$

当且仅当 $u(W)$ 是负数时，表达式(13-10)才是正的。无差异曲线在每一点上都凸向原点的假设，与冯纽曼—摩根斯坦效用函数是凹的假设是一样的。

当冯·纽曼—摩根斯坦效用函数是凹的时候，收入的边际效用是递减的。如果凹效用函数的个人有一次机会，即 50%可能性会赢 1 美元，而 50%可能性会输 1 美元，那么我们预测这个人不会进行这场赌博。尽管我们不能对于效用水平变化在心理上的重要性加以比较，但是，粗略地说，这个人从赢得 1 美元所得到的效用少于失去这场赌博所遭失的效用损失。一般而言，对于任何一个具有凹效用函数的个人而言，一个单件的收入前景总是偏好于具有同样期望值的不确定收入前景。这是杰森(Jensen)不等式的一个结果，即对于任何一个随机变量 W 和任何一个严格凸函数 $u(W)$ 而言，总有：

$$E[u(W)]<u(E[W])$$

图 13-2 画出了杰森不等式。期望效用是通过 $E[W]$ 的弦的高度来给出的，但是，期望的财富量是由通过 $E[W]$ 点的弧的高度来给出的。另一方面，如果效用函数是凸的，那么弦线将位于弧线的上方，个人就是风险爱好者了。当且仅当效用函数是收入的线性函数，个人才是风险中立者。

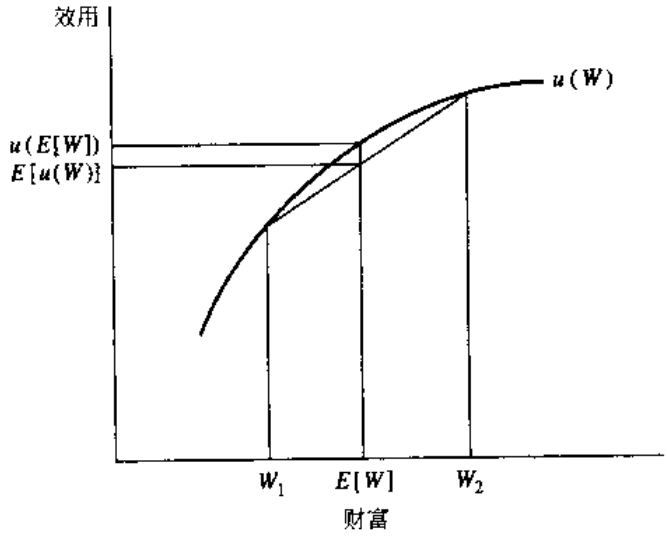

图 13-2　杰森不等式。对于任意凸的效用函数 $u(W)$，$E[u(W)]\leqslant u[E(W)]$，凸函数总是位于连接两点的弦上或弦中。例如，随机变量 W_1 和 W_2 之间变化，那么函数的均值 $E[W]$ 一定大于或等于效用的期望值，该期望值位于 $u(W_1)$ 和 $u(W_2)$ 连线之上。

例 1. 假设个人的效用函数是 $u(W)=\log W$。因为 $u''(W)=-1/W^2<0$，所以这个人是风险厌恶者。我们已经在 13.1 节中指出皮特斯博格赌博的期望值是无限的。但是，当一个人是风险厌恶者时，这种赌博的期望效用是有限的。

$$\begin{aligned}E[u(W)] &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \log 2^{n-1}\\ &= \log 2 \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \log 2\left[\sum_{2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{4}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots\right]\\ &= \log 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)\\ &= \log 2\end{aligned}$$

也就是说，如果一个人从没有初始财富开始，皮特斯博格赌博的确定情况对应物的期望值是 2 美元。

风险规避程度的测量

我们已经发现凸无差异曲线隐含着风险厌恶者的行为假设。因此，对于风险厌恶程度的一个自然的测量方法是无差异曲线的凸的程度。在等式(13-10)中，沿着 45°确定线上的无差异曲线的二阶导数的大小与 $-u''(W)/u'(W)$ 成比例。我们称该值是绝对风险规避系数或者绝对风险规避的阿罗—帕特(Arrow-Pratt)测量，这是因为这二位经济学家在这方面做出了贡献。[6] 绝对风险规避系数说明了个人愿意接受风险的程度。假设一个人拥有初始财富是 w，如果他是个风险厌恶者，那么他不会愿意参加只有 50%把握的赌博。用一个人愿意为了避免只有 50%把握的赌博 x 而支付的费用来定义风险溢金 $P_x(W)$。所谓公平赌博，即其均值为 0 而方差是 σ_x^2。数学上，我们可写成：

$$u(W-P_x(W))\equiv E[u(W+x)]$$

对于等式左边用一阶泰勒序列近似，右边用二阶泰勒序列近似，我们可以得到：

$$\begin{aligned}u(W)-P_x(W)u'(W) &\approx E\left[u(W)+xu'(W)+\frac{1}{2}x^2u''(W)\right]\\ &\approx u(W)+\frac{1}{2}\sigma_x^2u''(W)\end{aligned}$$

因此：

$$P_x(W)\approx\frac{1}{2}\sigma_x^2\,\frac{-u''(W)}{u'(W)} \qquad (13\text{-}11)$$

---

6 See Kenneth J. Arrow, Aspects of the Theory of Risk Bearing, Yrjo Jahnssonin Saatio, Helsinki, 1965; and John W. Pratt, "Risk Aversion in the Small and in the Large", Econometrica, 32：122-136, 1964.

这样，绝对风险规避系数越大，个人愿意支付的风险溢金也就越高。

风险厌恶的另一个相关的测量是相对风险规避系数，$-Wu''(W)/u'(W)$。令 $\hat{P}x(W)$是对应于某一比例风险 x(0 均值和 σ_x^2 方差)的比例风险溢金。那么，$\hat{P}_x(W)$可以用以下关系来定义：

$$u(W-W\hat{P}_x(W))\equiv E[u(W+Wx)]$$

对等式两边进行泰勒近似，得到：

$$u(W)-W\hat{P}_x(W)u'(W)\approx E\left[u(W)+Wxu'(W)+\frac{1}{2}W^2x^2u''(W)\right]$$

因此得到：

$$\hat{P}_x(W)\approx\frac{1}{2}\sigma_x^2\frac{-Wu''(W)}{u'(W)}$$

所以，得出了类似的结论，即相对风险规避系数越高，相对风险溢金也就越高。

均值——方差效用函数

期望效用假设说明，对于不确定性前景的偏好可以用冯纽曼—摩根斯坦效用函数的期望值 $E[u(W)]$来表示，其中 W 是一个随机变量，它表示在不确定前景下得到的收入。一般而言，期望效用依赖于函数 $u(.)$和 W 的分布。假设我们能够用参数来彻底地描述 W 的分布，尤其令 W 是分布在具有概率密度函数 $f(W;\alpha)$的实线，那么：

$$E[u(W)]=\int_{-\infty}^{\infty}u(W)f(W;\alpha)\mathrm{d}W$$

等式右边的积分是一个关于 α 的函数。[7] 如果我们用 $U(\alpha)$来代表该积分函数，那么 $U(\alpha)=E[u(W)]$是偏好的有效表达式。

不确定经济学中的许多问题都和权衡有关，即平均的收入水平和其风险之间的权衡。由于均值是对平均的测量，而方差是对风险的综合性测量，因此，用收入分布的均值和方差的函数来表示偏好，是一种很便捷的方法。不幸的是，因为一般而言，均值和方差并不能完全决定一个随机变量的分布，所以这种方法并不总是可行。有许多具有同样均值和方差的收入流，但是它们具有不同的概率分布，和这些收入相关的期望效用也是不同的。尽管 $U(\alpha)$是偏好的一个有效表述方式，但是向量 α 一般包含两个以上的参变量。因此，一个只依赖于均值和方差的效用函数可以被看成是期望效用的近似。

但是，当依赖于收入分布的均值和方差的函数可被用来表示偏好时，就会出现一些特例。例如，假设某一不确定收入前景 W 是正态分布，其均值是 m，方差是 v。它的概率密度函数是：

7　这并不是一个关于 W 的函数，因为 W 只是积分变量。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-(1/2v)(W-m)^2}$$

由于 m 和 v 值完全决定了这一函数，在此期望效用可以写成 $U(m,v)$。

如果冯纽曼—摩根斯坦效用函数是这种形式：$u(W)=-e^{-rW}$，那么还可以进一步简化。因为绝对风险规避程度等于 r 这一定量，所以该函数说明了固定绝对风险规避的性质，即：

$$u(W)=-e^{-rW}$$

该式显示了固定绝对风险规避，因为绝对风险规避好像是个固定值，即：

$$\frac{-u''(W)}{u'(W)}=\frac{r^2e^{-rW}}{re^{-rW}}=r$$

当效用函数是固定绝对风险厌恶，并且收入前景是正态分布时，其期望效用是：

$$U(m,v)=\int_{-\infty}^{\infty}-e^{-rW}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-(W-m)^2/2v}dW$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-(1/2v)[(W-m)^2+2rvW]}dW$$

由于方括号中的项又等于：

$$\begin{aligned}(W-m)^2+2rvW&=[(W-m)^2+(rv)^2+2rv(W-m)]\\&\quad-(rv)^2-2rv(W-m)+2rvW\\&=[(W-m)+rv]^2+2rvm-r^2v^2\\&=[W-(m-rv)]^2+2rvm-r^2v^2\end{aligned}$$

因此：

$$U(m,v)=\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-(1/2v)[W-(m-rv)]^2}e^{-(1/2v)(2rvm-r^2v^2)}dW$$

$$=-e^{(rm-r^2v/2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e-(1/2v)[(W-(m-rv)]^2dW$$

上述最后一项积分就是均值为 $m-rv$，方差是 v 的正态概率密度函数的积分。由于概率密度函数的积分总是等于 1，我们可得出：

$$U(m,v)=-e^{-(rm-r^2v/2)}$$

$v(m,v)$ 的单调转换形式：

$$V(m,v)=m-\frac{r}{2}v$$

那么 $U=-e^{-rV}$。注意 $dU/dV=re^{-rV}$，因此，函数 $V(m,v)$ 是一个偏好的有效表示函数。由于均值—方差期望函数比较简单，是均值和方差的线性函数，因此，它得到较普遍应用。而且，期望收入和风险之间的边际替代率是个固定值，即：

$$\frac{-V_v}{V_m}=\frac{r}{2}$$

所以，绝对风险规避越高，为了减少风险，一个人所愿意放弃的期望收入也就越多。

赌博，保险和多样化

在缺乏对效用函数形态进行约束的情况下，期望效用假设与冒险行为和风险规避行为都是一致的。弗里德曼和赛弗里(Friedman-Savage)[8] 指出，如果效用函数的形态如图 13-3 所示，那么，个人可能同时购买保险和彩票。但是，认为赌博是效用函数非凹性结果的理论存在两个问题：

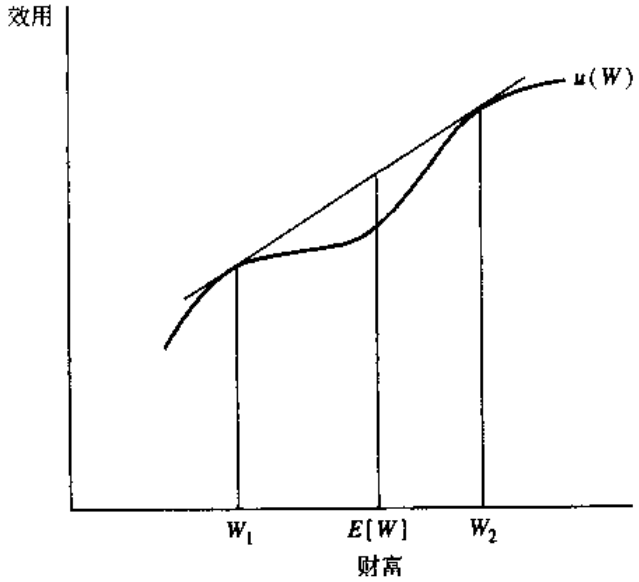

图 13-3　弗里德曼—佛赛佛希(Friedman-Savage)定理。1948 年，密尔顿弗里德曼和赛佛希提出，只有凸部的效用函数来解释为什么个人同时买保险和买彩票。但是，这样的个人会让大赌徒离开凸部分而成为风险厌恶者。赌徒可以用其具有娱乐价值来解释，这与日常观察到的行为是一致的，即人们把注分散压到小赌上。

1. 由于对赌博施加影响比较容易而且成本很小。因此，当个人初始财富落到效用函数的非凹区间时，个人会把赌博移到该区间以外。如图 13-3 所示，某个人当其初始财富是 $E[W]$时，他会进行多种赌博，并且都到 W_1 点、或 W_2 点终止。尽管，个人进行多种赌博并不常见，但是当个人采用这种赌博方式时，他的行为就像是一个风险厌恶者。

8　See Milton Friedman and L. J. Savage, "*The Utility Analysis of Choices Involving Risk*," *Journal of Political Economy*, 56: 279-304, 1948.

2. 许多赌博具有比公平竞争更坏的奇怪性质。如果赌博是为了追求财富的期望效用最大，那么最优的策略是把所有注都压在一次赌博之上。不过，日常观察的现象是，许多人把他们的赌资分成许多小份然后再下注。这种现象和认为赌博具有娱乐价值的理论是一致的。

当个人具有凹效用函数时，他们会采取措施来减少他们面对风险的程度。一个方法是购买保险。假设个人具有初始财富 W，并且有可能如被偷而以 π 的概率丢失 x 财富。假设个人对 Q 美元保险项目进行投保时，需要支付 πQ 的保险费用。他或她能够选择保险项目 Q 使期望效用最大，即：

$$\max_{Q} \pi u(W-x-\pi Q+Q)+(1-\pi)u(W-\pi Q)$$

一阶条件是：

$$\pi u'(W-x-\pi Q^*+Q^*)(1-\pi)+(1-\pi)u'(W-\pi Q^*)(-\pi)=0$$

也就是：

$$u'(W-x-\pi Q^*+Q^*)=u'(W-\pi Q^*) \tag{13-12}$$

由于 $u(\cdot)$ 是严格凹函数，因此(13-12)意味着 $W-x-\pi Q+Q^*=W-\pi Q^*$，或者：

$$Q^*=x$$

因此，如果在一个合理的保险费上可以得到全额保险，一个风险厌恶者会购买这种全额保险。但是，更常见的情况是，可能性损失额及其发生的概率都是不确定的。如果个人用以减少损失以及降低其发生概率的努力很难观察到，或只有花费很高成本才能观察到，那么购买保险会降低个人从事类似努力的积极性。这就是所谓的道德危险。[9] 减轻道德危险的方法有联合保险和推理性条款，这些超出了本章的范围。

另一个减少风险的方法是多元化。如果个人投资在一个有风险的项目 X 上，等式(13-11)证明该风险酬金大约是 $(\sigma_x^2 a)/2$，这里是绝对风险规避系数。另一方面，如果个人投资于 n 种不同的项目，每种项目持有 $1/n$ 股，那么每一种项目的风险酬金是 P：

$$u(W-P)\equiv E\left[u\left(W+\frac{1}{n}x\right)\right]$$

两边都用泰勒逼近，得出：

$$P\approx\frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{n^2}a$$

如果 n 个项目的回报率都是互相独立的，那么总风险酬金是：

$$nP\approx\frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{n}a$$

这只是没有进行多元化投资的风险酬金的 $1/n$。

9 道德危险是第 15 章所讨论的委托代理模型中的一种。

13.4　比较静态分析

财富在风险性资产中的分配

大多数决策是在不确定条件下做出的。经济学家假设个人决策是为了达到期望效用最大化的目标。让我们先从关于财富在风险性资产和安全性资产之间的分配问题开始。假设个人拥有的初始财富是 W，这笔财富打算在安全资产如货币和风险资产之间分配。所谓安全资产指其回报率是零的资产，而所谓风险资产是指其回报率是随机变量 R 的资产。如果他或她把 x 美元投资到风险资产上，那么他或她最终的财富是 $(W-x)+x(1+R)=W+xR$。个人选择 x 使财富的期望效用最大，即：

$$\max_x E[u(W+xR)]$$

当效用函数定义良好时，我们可以对期望运算符号内部进行求导，进而得出一阶条件和二阶条件：

$$E[u'(W+xR)R]=0$$

$$E[u''(W+xR)R^2]<0$$

个人是风险厌恶者的假设(也就是说 $u''<0$=确保了二阶条件的满足)。一阶条件用一个初始财富的函数 $x=x^*(W)$ 定义了个人在风险资产上的投资。把 $x^*(W)$ 代替一阶条件中的 x，并两边对 W 求导，得出：

$$E[u''(W+xR)(1+Rx^{*\prime}(W))R]\equiv 0$$

根据期望符号的加法性质，可以得出：

$$E[u''(W+xR)R]+E[u''(W+xR)\ R^2x^{*\prime}(W)]\equiv 0$$

因此：

$$x^{*\prime}(W)=-\frac{E[u''(W+xR)R]}{E[u''(W+xR)R^2]}$$

由于分母是负数，所以 $x^{*\prime}(W)$ 的符号与分子的符号是一样的。所以，如果绝对风险规避系数随着财富的增加而递减，那么分子也是正数。当绝对风险规避系数随着财富的增加而递减时，我们可以得到：

$$\frac{-u''(W+xR)}{u'(W+xR)}\leqslant\frac{-u''(W)}{u'(W)}\qquad \text{对于 } R\geqslant 0$$

$$\frac{-u''(W+xR)}{u'(W+xR)}\geqslant\frac{-u''(W)}{u'(W)}\qquad \text{对于 } R\leqslant 0$$

两边同时乘以 $-u'(W+xR)R$(对于第一个不等式而言，该项是负的；而对于第二个不

等式而言，该项是正的），我们可以得到：

$$u''(W+xR)R \geqslant \frac{u''(W)}{u'(W)}u'(W+xR)R \qquad \text{对于所有的 } R$$

等式两边都求期望，得到：

$$E[u''(W+xR)R] \geqslant \frac{u''(W)}{u'(W)}E[u'(W+xR)R]$$

根据一阶条件，不等式右边项等于零。因此，$x^{*\prime}(W) \geqslant 0$。如果绝对风险规避系数随着财富增加而递减，那么财富的增加会增加个人在风险资产上的投资。

价格不确定下的产出决策

在上述例子中，我们推导出一个非随机性参变量的变化所引起的效果的比较静态结果。但是，在不确定情况下，影响价格变化的外生因素一般总是随机的。在这种情况下，我们研究的不是某个随机变量值的变化是怎样影响选择，而是研究某一随机变量的分解的变化是怎样影响人的行为。我们用在不确定价格下竞争性企业模型来说明这一问题。假设企业是风险厌恶而且价格接受者，并且这家企业必须在产品价格知道以前做出决策。企业的目标是使期望利益最大化，即：

$$\max_{y} E[u(py-c(y))]$$

其中 p 是一随机变量，用来表示的是产品的价格。y 是企业产出，而 $c(y)$ 是企业的成本函数。把目标函数对 y 求导，我们可以得到最大化条件：

$$E[u'(py-c(y))(p-c'(y))]=0$$

$$D=E[u''(py-c(y))(p-c'(y))^2-u'(py-c(y))c''(y)]<0$$

正如上节中的分析思路那样，我们假设对于二阶条件而言，严格不等式总是成立。

我们可以把在价格确定情况下的产出水平和价格不确定下的产出水平相对比。令 $\bar{p}$ 是随机变量 p 的均值，那么一阶条件是：$E[u'(py-c(y))p]=E[u'(py-c(y))c'(y)]$。这样，两边都减去 $E[u'(py-c(y))\bar{p}]$ 我们得到：

$$E[u'(py-c(y))(p-\bar{p})]=E[u'(py-c(y))(c'(y)-\bar{p})] \qquad (13\text{-}13)$$

等式(13-13)左边项是价格和边际效用的协方差。当价格高时，利润上升。由于递减的边际效用，边际效用是降低的。类似地，当价格低的时候，边际效用是高的。因此，协方差项是负的。结果，(13-13)的左边项也是负的，这意味着：

$$c'(y) \leqslant \bar{p}$$

换句话说，不确定下产出的特征之一是其边际成本低于期望价格。如果边际成本随着产出的增加而上升，那么对子同样的期望价格，不确定情况下的产出要比确定情况下的产出要少。

为了推导比较静态结果，我们首先用产出 $y*$ 表示 p 分布的一个函数。由于 p 自身是

一个随机变量，因此，我们不能确知随着 p 的变化 y^* 是怎样变的。为了进行比较静态研究，我们必须使 p 分布的参变量发生变化。例如，由于 p 的均值是 $\bar{p}$，我们可以写成 $p=\bar{p}+e$，这里 e 是一个随机变量并且其均值为零。那么，一阶条件可以写成：

$$E[u'((\bar{p}+e)y^*(\bar{p})-c(y^*(\bar{p})))((\bar{p}+e)-c'(y^*(\bar{p})))]\equiv 0$$

两边对 $\bar{p}$ 求导，我们可以得到：

$$\frac{dy^*}{d\bar{p}}=\frac{yE[u''(py-c(y))(p-c'(y))]}{-D}+\frac{E[u'(py-c(y))]}{-D} \qquad (13\text{-}14)$$

第二项明显是正的，因为它就是替代效应。第一项的符号依赖于绝对风险规避程度。令 x 是利润水平，$p=c'(y)$，显然 x 不是随机数。如果绝对风险规避系数是递减的，那么：

$$\frac{-u''(py-c(y))}{u'(py-c(y))}\leqslant\frac{-u''(x)}{u'(x)} \qquad \text{对于 } p\geqslant c'(y)$$

$$\frac{-u''(py-c(y))}{u'(py-c(y))}\geqslant\frac{-u''(x)}{u'(x)} \qquad \text{对于 } p\leqslant c'(y)$$

两边都乘上 $-u'(py-c(y))(p-c'(y))$，我们可以得到：

$$u''(py-c(y))(p-c'(y))\geqslant\frac{u''(x)}{u'(x)}u'(py-c(y))(p-c'(y)) \quad \text{对所有的 } p \qquad (13\text{-}15)$$

对于等式(13-15)取期望值，从一阶条件可知，右边项的期望值是零。因此，等式(13-14)的第一项是正的，该项代表了财富效应。当期望价格增加了，财富也随着上升了。假设风险规避随着财富的增加而递减，那么，企业愿意通过增加产出来承担更大的风险。财富效应增强了替代效应，使产出对期望价格的反应为正。

风险增加

在不确定情况下决策的模型中，决策变量是随机变量分布的函数。我们已经看到，我们是如何从分布的均值变化中推导出比较静态结果。同样令人感兴趣的问题是，当均值保持不变时，随着分布变得越来越具有风险，个人的行为会发生什么样的变化。我们采用的办法之一是，对分布的范围变量做比较静态分析。例如，如果 z 是一个随机变量，其均值是 $\bar{z}$，标准差是 σ_z。我们可以得到：$z=\bar{z}+\sigma_z e$。这里 e 是一随机变量，其均值为零，并且具有单位方差。

用 $\bar{z}+\sigma_z e$ 代替最大化问题中一阶条件中的 z，并且对于 σ_z 求导，我们可以得到个人对于风险增加的最优反应。范围参变量的增加是增加随机变量分布的风险的一种方法，它使概率分布围绕某一固定均值拉伸得更开。一个更加一般且更加有用的风险增加表述形式“保留均值的扩展”(mean-preserving spreads)。如果随机变量 z 被 $z^+=z+e$ 所代替，其中 e 是一个均值为零的随机变量，那么 z 和 z^+ 具有相同的均值，不过我们会说 z^+ 更有风险。在一个随机变量中加入噪声等同于把一些概率聚集从密度中心区移到尾部。图 13-4 画出了 z^+ 和 z 的概率密度函数。随机变量 z^+ 被称为 z 的均值保留扩展。

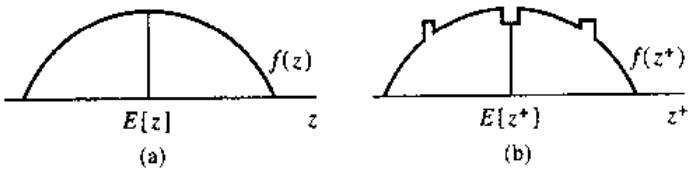

图 13-4 均值保留扩展。对图(a)所展示的密度函数进行均值保留扩展，得到图(b)的形状。两个分布具有相同的均值，但是，在图(b)中，对于远离均值的产出赋予更大的权重。

均值保留扩展的概念很有用，因为，如果 z^+ 是 z 的一个均值保留扩展，那么，对于任何一个凹函数 $u(\cdot)$，都有：

$$E[u(z^+)]\leqslant E[u(z)] \tag{13-16}$$

等式(13-16)是从杰森不等式中得出来的。用迭代期望值的方法，我们可以得到：

$$\begin{aligned} E[u(z+e)] &= E[E[u(z+e)\mid z]] \\ &\leqslant E[u(z+E[e\mid z])] = E[u(z)] \end{aligned}$$

因此，如果当一收入前景变得更加具有风险时，也就是说其概率分布进行了均值保留扩展，那么，对于一个风险厌恶者而言，其期望效用将下降。类似地，对于任何一个凸函数 $u(\cdot)$ 而言，都有 $E[u(z^+)]\geqslant E[u(z)]$，那么，对于风险爱好者而言，他会更喜欢高风险的收入前景。

用均值保留扩展的概念来进行比较静态分析也是很方便的。假设某个人选择 x，使目标函数 $E[f(x,z)]$ 最大，这里 z 是一个随机变量。那么，最大化的充分条件是：

$$E[f_x(x,z)]=0$$

$$E[f_{xx}(x,z)]<0$$

现在，令 α 是代表均值保留扩展到 z 分布的参变量。一阶条件定义了一个选择函数 $x=x^*(\alpha)$ 发生变化将直接影响 x^* 值和 $E[f_x(x,z)]$ 值。把一阶条件对 α 进行差分，我们可知：

$$\frac{\partial x^*}{\partial \alpha}E[f_{xx}(x,z)]+\frac{\partial}{\partial \alpha}E[f_x(x,z)]\equiv 0 \tag{13-17}$$

如果 $f_x(x,z)$ 是一个关于 z 的凹函数，那么当 z 进行均值保留扩展时，$E[f_x(x,z)]$ 会随之减少。这样，(13-17)第二项是负的。因为，根据二阶条件 $E[f_{xx}(x,z)]$ 是负的，所以 $\partial x^*/\partial\alpha<0$。类似地，如果 $f_x(x,z)$ 是关于 z 的凸函数，那么 $\partial x^*/\partial\alpha>0$。

让我们用一个在不确定情况下投资模型来演示这种方法。假设生产函数是 $f(K,L)$，这里 K 是指资本，L 是指劳动力，f 是一阶齐次函数。为了简单，假设资本只延续一个时期，这样我们就不必考虑该问题的动态性。生产者必须在知道产出价格之前决定 K。在选定 K 以后，产出价格也能知道，于是厂商决定和这些资本相配套的劳动力人数。劳动力的工资率是 w，资本成本由凸函数 $c(K)$ 给定。我们假设厂商是风险中立者。对于任何 K，厂

商会选择 L 使利润最大。我们用下面方式来定义间接利润函数，即：

$$v(p,w,K)=\max_{L} pf(K,L)-wL$$

在以前的章节中，我们已经证明间接利润函数对 p 和 w 而言是凸的。如果 f 是一阶齐次，那么它对 K 而言是线性的。这样，我们可以写在：$v(p,w,K)=K\hat{v}(p,w)$。因为厂商是风险中立者，他或她会选择 K 使期望利润最大，即：

$$\max_{K} E[K\hat{v}(p,w)-c(K)]$$

其充分条件是：

$$E[\hat{v}(p,w)]-c'(K)=0$$
$$-c''(K)<0$$

资本的边际成本递减的假设确保了二阶条件的满足。

那么，当产出价格的分布变得更加变化时，投资量会发生什么样的变化呢？令 α 代表均值保留扩展到 p 分布的参变量。把一阶条件对 α 求导，我们可以得到：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}E[\hat{v}(p,w)]-c''(K)\frac{\partial K^*}{\partial\alpha}=0 \tag{13-18}$$

因为 $\hat{v}(p,w)$ 是凸的，所以，均值保留扩展会增加 $E[\hat{v}(p,w)]$ 值。因为(13-18)中的第一项是正的，因此，$\partial K^*/\partial\alpha>0$。如果在已经知道产出价格情况下，劳动力数量并没有得到调整，只要平均价格保持不变，价格分布的变化不会影响期望利润。但是，在这个模型中，当产出价格升高时厂商可以雇佣更多的工人。结果利润的增加将比价格的增加要大。另一方面，当产出价格低的时候，厂商可以减少工人数量。结果使利润下降的幅度比价格下降的幅度小。结果当产出价格变得更加变化时，投资的期望收入会变得更高，因面投资会增加。

习题

1. 证明当对一个效用函数进行线形变换时，绝对风险规避系数保持不变。
2. 令 u 和 v 分别是两个效用函数，并且 $u(W)=f(u(W))$，证明 v 的绝对风险规避系数要大于 u 的绝对风险规避系数。
3. (a) 证明效用函数 $u(W)=W^{1-a}/(1-a)$ 具有固定的相对风险规避系数，并且等于 a。
   (b) 证明效用函数 $u(W)=\log W$ 具有固定的相对风险规避系数，并且等于 1。
4. (a) 假设效用函数是 $u(W)=aW-bW^2$，其中 a 和 b 都是正数，请问这个函数是表现出递增的风险规避还是递减的风险规避？
   (b) 如果某个风险资产的回报率是一随机变量 R，并且其均值是 $\overline{R}>0$，方差是 σ_R^2，如果个人的初始财富是 W，那么个人在风险资产上的最优投资量是多少？
   (c) 证明个人在风险资产上的最优投资额是初始财富的减函数。
5. 如果效用函数是 $u(W)=-e^{-aW}$，这样其绝对风险规避系数是一个常数，证明在这种情况下，个人在风险资产上的最优投资额与初始财富无关。

部分参考文献

Arrow, Kenneth J. : "The Role of Securities in the Optional Allocation of Risk Bearing", Review of Economic Studies. 31 : 91-96, 1964.

——: Aspects of the Theory of Risk Bearing. Yrjo Jahnssonin Saatio, Helsinki, 1965.

Bernoulli. Daniel: "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk" (1738), (trans. by L. Sommer), Economitrica, 22 : 23-36, 1954.

Friedman, Milton, and L. J. Savage: "The Utility Analysis of Choices Invoving Risk", Journal of Political Economy. 56 : 279-304, 1948.

Hartman. Richard: "The Effects of Price and Cost University on Investment". Journal of Economic Theory, 5 : 258-266, 1972.

Luce, R. D. , and H. Raiffa: Games and Decisions, John Wiley & Sons, Inc. , New York, 1957.

Rope. R. D. : "The Generalized Envelope Theorem and Price Uncertainty", International Economic Review, 21 : 75-86, 1980.

Pratt, J. W. : "Risk Aversion in the Small and in the Large", Econometrica, 32 : 122-136, 1964.

Ross, Sheldom: A First Course in Probability, 3ed. , Macmillan, New York, 1989.

Rothschild, Michael, and Joseph E. Stiglitz: "Increasing Risk: I. A Definition", Journal of Economic Review, 61 : 65-73, 1971.

Sandmo, Agnar: "On the Theory of the Competitive Pirm Under Price Uncertaainty", American Econimic Review, 61 : 65-73, 1971.

Savage. L. J. , : The Foundations of Statistics, John Wiley&Sons, Inc. , New York, 1954.

Von Neumann, J. , and O. Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press. Princeton, NJ, 1944.

第 14 章　不等式和非负约束下的最大化

14.1　非负性

在前面的讨论中我们很大程度上忽略了在最大化模型中由于变量的非负性约束导致的问题。比如在关于企业的模型中，我们没有考虑一阶条件方程组的解会导致某种或几种投入为负数的可能性。这样就会使得利润最大化的条件，即工资等于边际产出利润失效。从更一般的意义上讲，有许多生产要素也许企业根本就不用。同样的，消费者也只会消费无数可以获得的消费品中的很小一部分。实际上，用数学语言描述在什么条件下非负性是具有约束力的(即紧约束)是可能的。但值得首先指出的是，由于可证伪的比较静态定理关心的是参数变化时选择变量如何变化，因此未选择的变量的比较静态是相当平凡的。在局部的意义上(选择函数在给定点上的偏导数值)，这些变量仍旧不会被选择；也就是，对这些变量有：$\partial x_i^* / \partial \alpha_j = 0$。在全局意义上，即价格变动有限数量，先前未被选择的要素或商品可能会进入相关选择集合。在这些情形下，需要做出更强的假设以保证得到可证伪的命题。而以前讨论中只分析了严格的局部情形。

考虑第 1 章的垄断例子。需要最大化形如：

$$\pi(x) = R(x) - C(x) \tag{14-1}$$

的利润函数，其中 $R(x)$ 和 $C(x)$ 分别代表给定产出水平 x 时的利润和成本。(我们不考虑模型的税收方面，因为它与讨论没有密切关系。)最大化的一阶条件为：

$$\pi'(x) = R'(x) - C'(x) = 0 \tag{14-2}$$

但是，该条件只适用于(14-2)的解为非负的情形。但若对所有 $x>0$，$R'(x)<C'(x)$，企业会选择零产出。在那时，边际收益低于边际成本，增加产出会降低利润 $\pi(x)$。存在某个正水平 x^* 的产出使得那时利润最大(不必为正的利润，那完全是另一个问题)。相当于预先假定对某个 $0 \leqslant x \leqslant x^*$，$MR > MC$；即 $R'(x) > C(x)$，可以在企业初创时给予补偿。利润最大化在 $x=0$ 时发生的惟一原因是 $MR(0) \leqslant MC(0)$。即如果在 $x=0$ 时，π 最大，那么在 $x=0$ 时，$\pi' = R'(x) - C'(x) \leqslant 0$。反之则不一定成立，事实上它是错误的。如果在 $x=0$ 时，$R'(x) - C'(x) < 0$，这并不意味着不在某个离开原点的 x 上实现内部的最大化。再一次指出，这里仅考察的企业行为的一个方面即获得最大化的利润，而不是企业是否应当存在(可能依赖于 $\pi(x)>0$)。

让我们总结一下一元函数最大化的条件。考虑函数 $y=f(x)$。函数 $f(x)$ 在满足非负约束 $x \geqslant 0$ 下取最大值的一阶条件是：

$$f'(x)\leqslant 0;\text{如果 } f'(x)<0,\text{那么 } x=0 \tag{14-3}$$

也可以表示为：

$$f'(x)\leqslant 0 \tag{14-4a}$$

$$xf'(x)=0 \tag{14-4b}$$

从几何的角度看，这一条件的几何图示见图 14-1。在图 14-1(a)中，描述了通常情况下的内部最大化情形。这个解称为内部最大化解，因为使 $f(x)$最大的 x 不在定义 x 的区域的边界上(这里，相当于非负实轴；它的惟一边界是点 $x=0$)。正实数集合是 x 定义域的内部，所以有这样的术语。在图 14-1(b)和(c)中，表现的是角点解。即在 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$的最大值在 $x=0$ 时取到。(图 14-1(b)中函数正则最大值在 x 为负时取到这一事实是无关的。)当 $x=0$ 时，函数取最大值，那里不可能有 $f'(x)>0$。如果 $f'(x)>0$，x 增加，$f(x)$也会增大，那么 $f(0)$就不会是最大值点。但是，$f'(0)=0$ 是有可能的，如图 14-1(c)所示。那里，非负约束是不起作用的。即 $f(x)$的最大值总会出现在 $x=0$ 处，不管有没有 $x\geqslant 0$ 的限制。这样，如果 $x>0$ 时最大，那么 $f'(x)=0$。如果 $x=0$ 时最大，则必须有 $f'(x)\leqslant 0$。这一条件可表述为关系(14-3)，或等价的(14-4)。

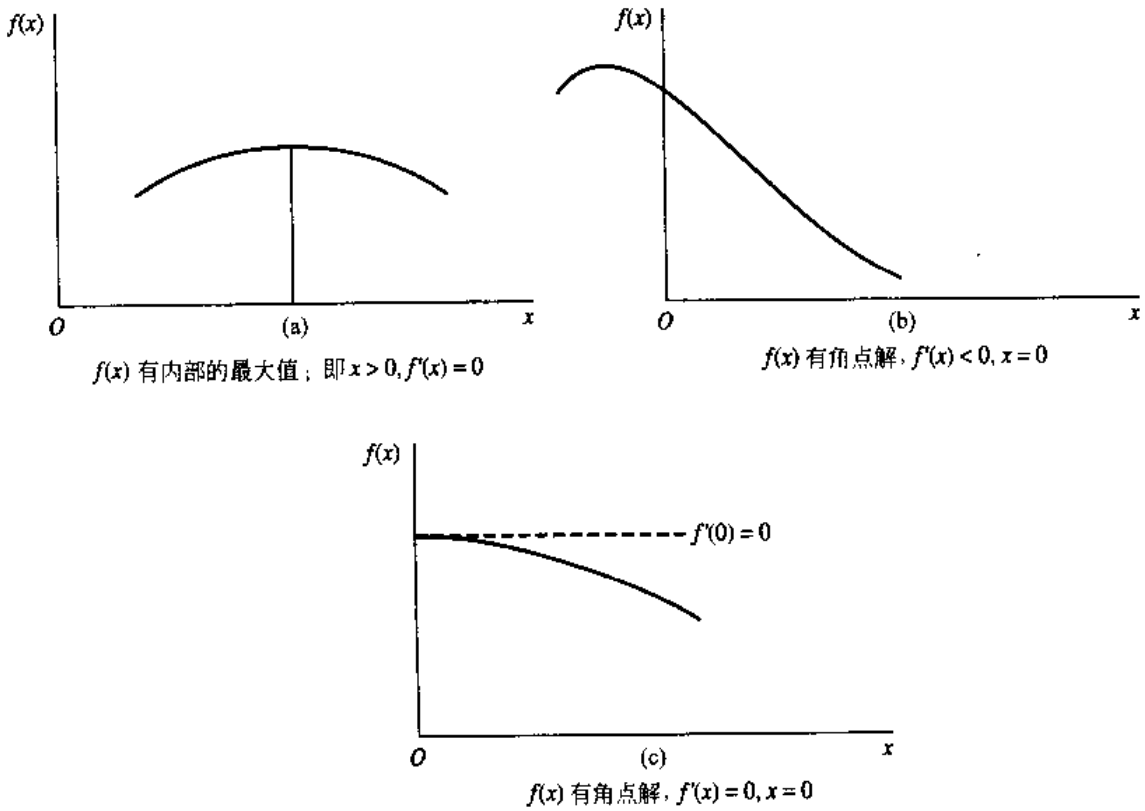

图 14-1 (a) $f(x)$有内部的最大值；即 $x>0$，$f'(x)=0$。(b) $f(x)$有角点解，$f'(x)<0$，$x=0$。(c) $f(x)$有角点解，$f'(x)=0$，$x=0$。

更一般的一阶条件可以通过添加松弛变量的代数方法推导出来。约束 $x\geqslant 0$ 是更为一般形式的不等式约束 $g(x)\geqslant 0$ 的基本形式。通过把不等式约束转化为等式约束，我们就可以应用普通的拉格朗日方法推到一阶条件。

约束 $x\geqslant 0$ 等价于：

$$x-s^2=0 \tag{14-5}$$

其中 s 可取任意实值。当 $s\neq 0$ 时，意味有内点解，因为 $x=s^2>0$。当 $s=0$ 时，得到的为角点解。

现在我们可以这样表述有约束的最大化问题：

最大化

$$y=f(x)$$

满足约束

$$x-s^2=0$$

该问题的拉格朗日函数为：

$$\mathscr{L}=f(x)+\lambda(x-s^2) \tag{14-6}$$

对 $\mathscr{L}$ 求一阶偏导，得到：

$$\mathscr{L}_x=f'(x)+\lambda=0 \tag{14-7a}$$

$$\mathscr{L}_s=-2\lambda s=0 \tag{14-7b}$$

$$\mathscr{L}_\lambda=x-s^2=0 \tag{14-7c}$$

从等式(14-7b)可以看出，如果 $s\neq 0$，即有内点解，那么 $\lambda=0$，所以从(14-7a)可以得到 $f'(x)=0$。这样，正如所预期的，对于非角点解我们得到了一般的 $f'(x)=0$。利用约束最大化的二阶条件，我们可以证明 $\lambda\geqslant 0$。二阶条件是：

$$\mathscr{L}_{xx}h_x^2+2\mathscr{L}_{xs}h_xh_s+\mathscr{L}_{ss}h_s^2\leqslant 0 \tag{14-8}$$

对所有 h_x，h_s 满足：

$$g_xh_x+g_sh_s=0 \tag{14-9}$$

其中 $g(x,s)=x-s^2$，即约束。从(14-6)的拉格朗日函数，有 $L_{xx}=f''(x)$，$L_{xs}=0$，$L_{ss}=-2\lambda$。从约束 $g(x,s)=x-s^2$ 有 $g_x=1$，$g_s=-2s$。所以，(14-8)和(14-9)就可写成：

$$f''(x)h_x^2-2\lambda h_s^2\leqslant 0 \tag{14-10}$$

对所有 h_x，h_s 满足：

$$2h_x-2sh_s=0 \tag{14-11}$$

我们早已从(14-7b)得知，如果 $s\neq 0$，那么 $\lambda=0$。假定现在 $s=0$。那么从(14-11)，有 $h_x=0$，但对 h_s 没有限制。当我们利用 $h_x=0$，$h_s=$任意数时，式(14-10)成了：

$$-2\lambda h_s^2\leqslant 0$$

因为 $h_s^2>0$，意味着：

$$\lambda\geqslant 0 \tag{14-12}$$

现在我们就有了在 $x\geqslant 0$ 时求 $f(x)$ 最大化问题的一阶条件的完整的表述。从(14-7a)，由于

$\lambda \geqslant 0$，

$$f'(x) \leqslant 0 \tag{14-13}$$

如果 $f'(x)<0$，那么 $\lambda>0$。从(14-7b)，$s=0$，故从(14-7c)，$x=0$。所以：

$$f'(x)<0 \quad x=0 \tag{14-14}$$

式(14-13)和(14-14)等价于：

$$f'(x) \leqslant 0 \tag{14-15}$$

$$xf'(x)=0 \tag{14-16}$$

通常记为：

$$f'(x) \leqslant 0, \text{如果} <, x=0$$

注意，如果 $x=0$ 时取最大值，意味着对 $f''(x)$ 没有限制。在图 14-1(b)中，$f(x)$ 可以是凹的(像所画的那样)也可以是凸的，而最大值点仍然在 $x=0$ 处。

这些条件也可以用 $\mathscr{L}$ 的二阶偏导的加边海塞矩阵的行列是条件来导出：

$$|\mathscr{L}| = \begin{vmatrix} \mathscr{L}_{xx} & \mathscr{L}_{xs} & g_x \\ \mathscr{L}_{sx} & \mathscr{L}_{ss} & g_s \\ g_x & g_s & 0 \end{vmatrix} > 0$$

利用前面计算的偏导数的值，我们有：

$$|L| = \begin{vmatrix} f''(x) & 0 & 1 \\ 0 & -2\lambda & -2s \\ 1 & -2s & 0 \end{vmatrix} = -4s^2 f''(x) + 2\lambda > 0 \tag{14-17}$$

从(14-17)，如果 $s=0$(角点解)，那么 $2\lambda \geqslant 0$；所以 $\lambda \geqslant 0$。这样，从(14-7a)，$f'(x) \leqslant 0$。

在满足 $x \geqslant 0$ 时求 $f(x)$ 的最小值问题的一阶条件可以同样获得。可以很容易证明这些条件是：

$$f'(x) \geqslant 0, \text{如果} >, x=0 \tag{14-18}$$

即如果在 $x=0$ 处取最小值，那么 $f(x)$ 在 $x=0$ 处一定在上升或水平。否则，若函数在 $x=0$ 处是下降的，则 x 变为正数时 $f(x)$ 值会下降，导致 $f(x)$ 不可能在 $x=0$ 处取最小值。

二元或多元函数

刚才所叙述的一元函数最大化原则可以按照一种很显然的方式推广到二元或多元函数。考虑下述问题：

最大化

$$z=f(x_1, x_2)$$

满足约束

$$x_1 \geqslant 0 \qquad x_2 \geqslant 0$$

现在我们像第一个例子一样加入松弛变量 s_1^2, s_2^2。于是问题就成了等式约束下的最大化问题：

最大化

$$y=f(x_1,x_2)$$

满足约束

$$g^1(x_1,s_1)=x_1-s_1^2=0$$

$$g^2(x_2,s_2)=x_2-s_2^2=0$$

该问题的拉格朗日函数是：

$$\mathcal{L}=f(x_1,x_2)+\lambda_1(x_1-s_1^2)+\lambda_2(x_2-s_2^2)$$

最大化的一阶条件是：

$$\mathcal{L}_{x_1}=f_1+\lambda_1=0 \tag{14-19a}$$

$$\mathcal{L}_{x_2}=f_2+\lambda_2=0 \tag{14-19b}$$

$$\mathcal{L}_{s_1}=-2\lambda_1 s_1=0 \tag{14-19c}$$

$$\mathcal{L}_{s_2}=-2\lambda_2 s_2=0 \tag{14-19d}$$

$$\mathcal{L}_{\lambda_1=x_1-s_1^2}=0 \tag{14-19e}$$

$$\mathcal{L}_{\lambda_2=x_2-s_2^2}=0 \tag{14-19f}$$

从式(14-19c)和(14-19d)，如果两个约束都不起作用，也就是如果 $s_1\neq 0$ 或 $s_2\neq 0$，那么，分别有 $\lambda_1=0,\lambda_2=0$。在那种情形($x_1>0,x_2>0$)下，可以得到普通的一阶条件 $f_1=0,f_2=0$。

我们可以通过利用二阶条件证明 $\lambda_1\geqslant 0,\lambda_2\geqslant 0$。对于约束最大化：

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\mathcal{L}_{x_ix_j}h_ih_j+2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\mathcal{L}_{x_is_j}h_ik_j+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}L_{s_is_j}k_ik_j\leqslant 0 \tag{14-20}$$

对于所有的 h_1,h_2,k_1,k_2 使得：

$$g_{x_1}^1h_1+g_{s_1}^1k_1=0 \tag{14-21a}$$

$$g_{x_2}^2h_2+g_{s_2}^2k_2=0 \tag{14-21a}$$

考虑拉格朗日函数(或式子(14-19))的具体形式，我们有：

$$\mathcal{L}_{x_ix_j}=f_{ij}\qquad i,j=1,2$$

$$\mathcal{L}_{x_is_j}=0\qquad i,j=1,2$$

$$\mathcal{L}_{s_is_j}=\begin{cases}-2\lambda_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$g_{x_j}^i=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$g^i_{s_j}=\begin{cases}-2s_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

关系式(14-20)和(14-21)于是可以写成：

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}f_{ij}h_ih_j-2\lambda_1k_1^2-2\lambda_2k_2^2\leqslant 0 \tag{14-22}$$

对所有的 h_1,h_2,k_1,k_2 使得

$$h_1-2s_1k_1=0 \tag{14-23a}$$

$$h_2-2s_2k_2=0 \tag{14-23b}$$

我们已经知道，如果 $s_i\neq 0$，那么 $\lambda_i=0$。因此假定 $s_i=0$。那么由(14-23)，有 $h_i=0$。于是(14-22)可写成：

$$-2\lambda_1k_1^2-2\lambda_2k_2^2\leqslant 0$$

这对所有的 k_1,k_2 都必须成立。依次令 $k_1=0,k_2=0$，可以得到：

$$\lambda_1\geqslant 0 \tag{14-24a}$$

$$\lambda_2\geqslant 0 \tag{14-24b}$$

由拉格朗日乘子的非负性，式于(14-19a)和(14-19b)成为：

$$f_1\leqslant 0 \qquad f_2\leqslant 0$$

而且如果 $f_i<0$(意味着 $\lambda_i>0$)，那么从(14-19c)和(14-19d)可知，$s_i=0$，所以 $x_i=0$。这样非负约束下的最大化一阶条件就是：

$$f_i\leqslant 0 \text{ 如果}<, x_i=0 \quad i=1,2 \tag{14-25}$$

这一推导过程可直接推广到具有 n 个变量的函数，得到类似的结果。下述问题：

最大化

$$z=f(x_1,\cdots,x_n)$$

满足约束

$$x_i\geqslant 0 \text{ 对于 } i=1,\cdots,n \text{ 中的部分或全部}$$

的一阶条件是：

$$f_i\leqslant 0 \text{ 如果}<, x_i=0 \tag{14-26}$$

对所有具有非负约束的变量，而：

$$f_i=0$$

对没有约束的变量。

让我们看一看这些条件对利润最大化的企业意味着什么。我们前面考虑了这样的模型：

$$\pi=pf(x_1,x_2)-w_1x_1-w_2x_2$$

现在我们明确指定要素 x_1 和 x_2 的使用量必须为正值，正像现实中的那样。[1] 当 $x_1, x_2 \geqslant 0$ 时，利润最大化的一阶条件是：

$$\begin{aligned} \pi_1 &= pf_1 - w_1 \leqslant 0 \quad \text{如果} <, x_1 = 0 \\ \pi_2 &= pf_2 - w_2 \leqslant 0 \quad \text{如果} <, x_2 = 0 \end{aligned} \tag{14-27}$$

式子(14-27)表明如果利润最大化在某个要素的投入为零时出现，那么那个要素的边际产出价值低于其工资。这与直觉一致。如果最初的边际产出价值高于某个要素的工资，那么企业可以通过使用正的数量的那种要素来提高利润。

仔细注意式子(14-26)及企业(14-27)所蕴含的应用方向。这些关系并没有说如果最初的，即 $x_i = 0$ 处的边际产出价值小于某一要素的工资，则那个要素就不会被使用。我们最初可能会发现 $pf_i < w_i$，但当 x_i 增加时，f_i 可能会先增加再下降，并在某个正的有限的 x_i 值上使得 $pf_i = w_i$。事实上通常所说的边际收益递减的“法则”是允许这种可能性的；通常认为 f_i 会在 x_i 的使用水平超出一定水平后递减(其他要素使用量恒定)。前面的一阶方程组仅仅说明，如果最大化的利润(或其他什么)是在 $pf_i < w_i$ 时可以观测到的，那么必然没有使用那种投入要素，即 $x_i = 0$。前面的分析并没有表明逆命题是成立的，事实上它通常是错误的。这些是最大化处附近的严格局部条件。

为形象说明这一要点，考虑一个农场主，他要决定购买两种拖拉机中的一种：一个是大型的 x_L，另一个是小的 x_s。单独使用哪一个都可以有正的利润，而且刚开始时的边际产出价值高于租金。但是这一特定的农场主如果同时使用两种拖拉机，他就没有利润。这就证明仅使用小型的拖拉机可以获得最多的利润。在另一拖拉机的投入水平为零(或很低)时，任一拖拉机的边际产出价值高于租金。但在利润最大处，$x_s > 0, x_L = 0$。在那一点处，$pf_{sL} < w_L$。但未使用某一要素并不意味着该要素的边际产出价值总是低于其工资。

一般化的一阶条件，只是提供了最大化条件的概念上的推广，对于实际中的寻求最大值并没有多大用处。如前文所述，这些条件描述了找到最大值后的最大化位置处的情况。它们没有事先告诉我们哪一个变量会在最大值处等于零。比如考虑企业通常只使用成千上百的可获得的生产要素中的很少一些。企业通常为了用某种机器面拒绝使用另一类型的机器，给雇员设立最低熟练程度，等等，完全不使用某些要素。前面的一阶条件只是说明对于那些不使用的要素，边际产出价值必须低于其工资，即使在零产出水平上也是如此。但它却没有进一步准确预测哪些要素会被使用，而哪些不会使用。

更重要的，如前面所提到的，惟一令人感兴趣的可证伪的比较静态关系是那些能够预测随着参数变化选择变量变化的方向(如果可能的话，或是变化量)的。那些没有选择的变量的比较静态是相当基本的：根据定义，$\partial x_i^* / \partial \alpha_j = 0$，对于所有没有选择的 x_i。所以，和数学

1　某些一般化的对企业的数学处理中将投入作为负的产出。这种类型的企业理论黑箱处理方式会得到数学上的对称性，在某些分析中是很便利的。在更为复杂的包含某些投入的物理库存的企业模型中，减少某些这样的库存(减少投资)可以认为是负积累但仍然可能有那种存货的正的服务流。

建模一起出现的有意义的结果实际上将从经典的最大化条件一阶方程组导出。包含非负约束(或其他不等式约束)的模型通常需要一种求解的算法。也就是,如果某些约束确实起作用,我们需要某种不断试错的迭代过程。在第 17 章的线性规划中,会给出一个这种算法的例子。

14.2 不等式约束

现在让我们来看,在原来的具有非负约束的两变量模型中加入不等式约束 $g(x_1,x_2)\geqslant 0$ 后,问题如何变化。即:

最大化

$$z=f(x_1,x_2)$$

满足约束

$$g(x_1,x_2)\geqslant 0 \text{ 和 } x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$$

(把约束写成$\geqslant 0$ 并不是没有一般性;在约束两边同乘以 -1 可以改变符号。)再一次地,我们首先把不等式变成等式,得到以下的约束最大化问题:

最大化

$$z=f(x_1,x_2)$$

满足约束

$$g(x_1,x_2)-x_3^2=0$$

$$g^1(x_1,s_1)=x_1-s_1^2=0 \qquad g^2(x_2,s_2)=x_2-s_2^2=0$$

这里的松弛变量是 x_3,s_1 和 s_2。拉格朗日函数是:

$$\mathcal{L}=f(x_1,x_2)+\lambda(g(x_1,x_2)-x_3^2)+\lambda_1(x_1-s_1^2)+\lambda_2)(x_2-s_2^2) \tag{14-28}$$

最大化的一阶条件就是:

$$\mathcal{L}_{x_1}=f_1+\lambda g_1+\lambda_1=0 \tag{14-29a}$$

$$\mathcal{L}_{x_2}=f_2+\lambda g_2+\lambda_2=0 \tag{14-29b}$$

$$\mathcal{L}_{x_3}=-2\lambda x_3=0 \tag{14-30a}$$

$$\mathcal{L}_{s_1}=-2\lambda s_1=0 \tag{14-30b}$$

$$\mathcal{L}_{s_2}=-2\lambda s_2=0 \tag{14-30c}$$

以及约束:

$$\mathcal{L}_\lambda=g(x_1,x_2)-x_3^2=0 \tag{14-31a}$$

$$\mathscr{L}_{\lambda_1} = x_1 - s_1^2 = 0 \tag{14-31b}$$

$$\mathscr{L}_{\lambda_2} = x_2 - s_2^2 = 0 \tag{14-31c}$$

和前面的理由一样，注意到(14-30)中，如果任一约束都不是紧的(即是严格的不等式)，那么对应的拉格朗日乘子为 0。假定在最大值处，$x_1, x_2 > 0$，$g(x_1, x_2) > 0$；那么可以证明所有这些约束都是完全无关的。从式子(14-30)，可知 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$，子是(14-29)就成了普通的无约束最大化的等式，$f_1 = f_2 = 0$。如果事实上 $g(x_1, x_2) = 0$，即约束是紧的，而且 $x_1, x_2 > 0$，那么(14-29)给出了一般的约束最大化的一阶条件，$L_1 = f_1 + \lambda g_1 = 0$，$L_2 = f_2 + \lambda g_2 = 0$。

也必须有 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$。约束最大化的二阶条件是：

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \mathscr{L}_{x_i x_j} h_i h_j + 2\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \mathscr{L}_{x_i s_j} h_i k_j + \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \mathscr{L}_{s_i s_j} k_i k_j \leqslant 0 \tag{14-32}$$

对所有 h_1, h_2, h_3, k_1, k_2 满足：

$$g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 = 0 \tag{14-33a}$$

$$g^1_{x_1} h_1 + g^1_{s_1} k_1 = 0 \tag{14-33b}$$

$$g^2_{x_2} h_2 + g^2_{s_2} k_2 = 0 \tag{14-33c}$$

现在：

$$\mathscr{L}_{x_i x_j} = f_{ij} + \lambda g_{ij} = \mathscr{L}_{ij} \quad \mathscr{L}_{x_i s_j} = 0 \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2$$

$$\mathscr{L}_{x_3 x_3} = -2\lambda \quad \mathscr{L}_{x_1 x_3} = 0 \quad \text{如果 } i \neq 3$$

$$L_{s_i s_j} = \begin{cases} -2\lambda_i & \text{如果} \quad i = j \\ 0 & \text{如果} \quad i \neq j \end{cases}$$

子是，关系(14-32)和(14-33)成为：

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \mathscr{L}_{ij} h_i h_j - 2\lambda h_3^2 - 2\lambda_1 k_1^2 - 2\lambda_2 h_2^2 \leqslant 0 \tag{14-34}$$

对所有 h_1, h_2, h_3, k_1, k_2 使得：

$$g_1 h_1 + g_2 h_2 - 2x_3 h_3 = 0 \tag{14-35a}$$

$$h_1 - 2s_1 k_1 = 0 \tag{14-35b}$$

$$h_2 - 2s_2 k_2 = 0 \tag{14-35c}$$

因为已经知道如果 $s_1, s_2 \neq 0$，那么分别有 $\lambda_1, \lambda_2 = 0$。面且从(14-30a)如果 $x_3 \neq 0$，那么 $\lambda = 0$。所以，假定 $s_1, s_2 = 0$。那么，和前面一样，从(14-35b)和(14-35c)，有 $h_1 = h_2 = 0$。然后，(14-34)变为：

$$-2\lambda h_3^2 - 2\lambda_1 k_1^2 - 2\lambda_2 h_2^2 \leqslant 0$$

令 h_3, k_1 和 k_2 中的任意两个为零(这是有意义的，因为(14-34)对所有 h_i 和 k_i 都成立)，得到：

$$\lambda \geqslant 0 \quad \lambda_1 \geqslant 0 \quad \lambda_2 \geqslant 0$$

一阶条件(14-29)至(14-31)因此可以表述成：

$$\mathscr{L}_{x_i}=f_i+\lambda g_i\leqslant 0 \quad \text{如果}<,x_i=0 \tag{14-36}$$

$$\mathscr{L}_{\lambda}=g(x_1,x_2)\geqslant 0 \quad \text{如果}>,\lambda=0 \tag{14-37}$$

注意到 $\lambda\geqslant 0$。

这些条件可以直接推广到 n 个变量和 m 个不等式约束的情形。通常，考虑：

最大化

$$z=f(x_1,\cdots,x_n)$$

满足约束

$$\begin{aligned} g^1(x_1,\cdots,x_n)&\geqslant 0\\ &\vdots\\ g^m(x_1,\cdots,x_n)&\geqslant 0\\ x_1,\cdots,x_n&\geqslant 0 \end{aligned}$$

事先没有必要限制 m 要小于 n(和等式约束情形一样)，因为这些约束中的一些(或全部)可能是不起作用的。

定义拉格朗日函数：

$$\mathscr{L}=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g^j(x_1,\cdots,x_n)$$

最大化的一阶条件是：

$$\mathscr{L}_{x_i}=f_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_i^j\leqslant 0 \qquad \text{如果}<,x_i=0 \tag{14-38}$$

$$\mathscr{L}_{\lambda_j}=g^j\geqslant 0 \qquad \text{如果}>,\lambda_j=0 \tag{14-39}$$

这些关系即熟知的不等式约束最大化的库恩-塔克条件。[2] 再次指出，这些条件对于寻找这类问题的真实解并不十分有用。它们仅仅是找到之后描述最大值处的情况的。如果恰好最大值处 $f_i+\lambda g_i<0$，那么 $x_i=0$。仅此而已。

同样可以导出约束最小化问题的条件。考虑问题：

最大化

$$z=f(x_1,\cdots,x_n)$$

满足约束

$$\begin{aligned} g^j(x_1,\cdots,x_n)&\leqslant 0 \qquad j=1,\cdots,m\\ x_i&\geqslant 0 \qquad i=1,\cdots,n \end{aligned}$$

约束写成≤形式是为了保持对称性。不是一般性的；对任意约束乘以 -1 就可以改变约束的符号。同前，拉格朗日函数是：

---

2 最初的论文是 Kuhn, H. W., and A. W. Tuker: "Nonlinear Programming" in J. Neyman (ed.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probobility*, University of California Press, Berkeley, 1951。

$$\mathscr{L}=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g^j(x_1,\cdots,x_n)$$

一阶条件是：

$$\mathscr{L}_{x_i}=f_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_i^j\geqslant 0 \qquad \text{如果}>,x_i=0 \qquad i=1,\cdots,n$$

$$\mathscr{L}_{\lambda_j}=g^j\geqslant 0 \qquad \text{如果}>,\lambda_j=0, \qquad j=1,\cdots,m$$

把约束写成 $g^j\geqslant 0$ 保证了 $\lambda_j\geqslant 0$。

让我们用预算约束下的消费者效用 $U(x_1,x_2)$ 最大化模型来说明库恩—塔克条件。现在假定消费者不需要花掉他所有的货币收入。模型于是成为：

最大化

$$U(x_1,x_2)$$

满足约束

$$p_1x_1+p_2x_2\leqslant M \qquad x_1,x_2\geqslant 0$$

问题的拉格朗日函数是：

$$\mathscr{L}=U(x_1,x_2)+\lambda(M-p_1x_1-p_2x_2)$$

约束以 $M-p_1x_1-p_2x_2\geqslant 0$ 的形式引入拉格朗日函数，以便与前面的分析一致。

所以一阶条件是：

$$\mathscr{L}_1=U_1-\lambda p_1\leqslant 0 \qquad \text{如果}<,x_1=0 \tag{14-40a}$$

$$\mathscr{L}_2=U_2-\lambda p_2\leqslant 0 \qquad \text{如果}<,x_2=0 \tag{14-40b}$$

$$\mathscr{L}_\lambda=M-p_1x_1-p_2x_2\geqslant 0 \qquad \text{如果}>,\lambda=0 \tag{14-40c}$$

拉格朗日乘子 λ 代表了消费者的货币收入的边际效用。简单的说，假定 $x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$。那么，$U_1=\lambda p_1,U_2=\lambda p_2$，

$$\lambda=\frac{U_1}{p_1}=\frac{U_2}{p_2}$$

U_1/p_1 代表花费在 x_1 上的每元钱的边际效用。同样，U_2/p_2 代表花费在 x_2 上的每元钱的边际效用。在约束最大值处，这两个比率是相等的，就等于货币收入的边际效用。

考虑最后一个条件(14-40c)。现在这可以解释为，假如预算约束不起作用即 $p_1x_1+p_2x_2\leqslant M$ 时(消费者没有花费完所有的收入)，那么 λ，货币收入的边际效用，必须为 0。消费者已经对所有商品都感到厌腻了。这可以通过(14-40a)和(14-40b)确定。如果 $\lambda=0$，那么 $U_1=U_2=0$；即两种商品的边际效用都为 0。所以，消费者不会进一步消费这些商品，即使它们是完全免费的。此时，消费者处于极乐状态。

现在考虑 $\lambda>0$ 的情况(消费者偏好于有更多的收入),并且 $x^2=x_2^*>0$ 但在最大值点,$U_1-\lambda p_1<0$,所以 $x_1=x_1^*=0$。假定价格为正,我们在 $x_1^*=0, x_2^*>0$ 处有:

$$\lambda=\frac{U_2}{p_2}>\frac{U_1}{p_1}$$

重新组织有:

$$\frac{U_1}{U_2}<\frac{p_1}{p_2}$$

如图 14-2 所示。在任意点上,消费者为消费额外一单位的 x_1 而愿意放弃的 x_2 来衡量的 x_1 的主观边际评价就是 U_1/U_2,边际效用的比例。这就是无差异曲线在任意点处的(负的)斜率。如果消费者在效用最大化点根本没有选择 x_1,那么消费者的主观边际评价必须低于 x_1 的市场价值。市场中用 x_2 交换 x_1 的比例是 p_1/p_2。比如,如果 $p_1=6$ 美元,$p_2=2$ 美元,那么市场中将用 3 个单位的 x_2 来换取一个单位的 x_1。在 x_1 的消费为 0 时,对 x_1 的估价只有两个单位的 x_2 的消费者在效用最大时根本不会购买任何 x_1。在图 14-2 中,这一情形用预算线以陡峭于无差异曲线 $U(x_1,x_2)=U^0$(U^0 为可能达到的最大效用)的斜率与 x_2 轴相交来表示。也就是,在 $x_1^*=0, x_2^*>0$ 处,$U_1/U_2<p_1/p_2$。

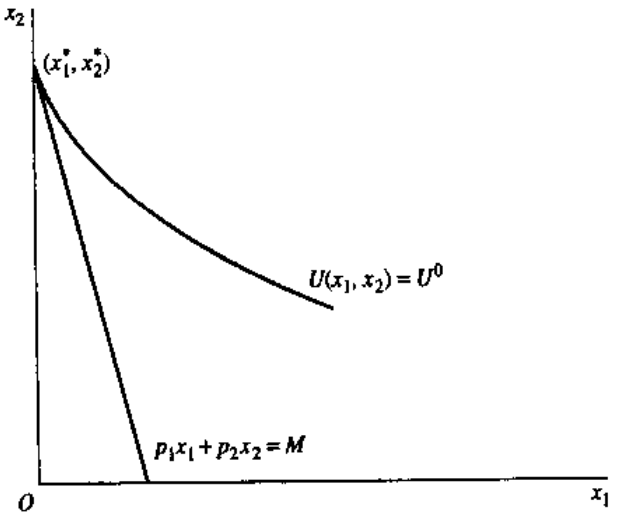

图 14-2 在角点处最大化效用。消费者在 $x_1^*=0, x_2^*>0$ 时效用最大。x_1 的消费为 0,因为 $U_1-\lambda p_1<0$。假定价格为正,不等式等价于 $\lambda>U_1/p_1$,因为 x_2 的消费为正。也就是说,对于 x_2,收入的边际效用就是花在 x_2 上的每元钱的边际效用。但是,在效用最大的地方,花在 x_1 上的每元钱的边际效用低于花在 x_2 上的每元钱的边际效用,所以 $x_1=0$。把这两个关系结合在一起,得到 $U_2/p_2>U_1/p_1$ 或 $U_1/U_2<p_1/p_2$,正如图中所示,U_1/U_2 代表无差异曲线的斜率(消费者对 x_1 的边际评价),p_1/p_2 代表市场对 x_1 的评价。正像图中所画的,由于凸性,沿着无差异曲线 $U_1/U_2<p_1/p_2$。这个消费者,不管消费的 x_1 多么少,对 x_1 的估价总是低于市场价值。所以,x_1 的消费为 0。

14.3　鞍点定理

让我们重新回到问题：

最大化

$$z=f(x_1,\cdots,x_n)$$

满足约束

$$\begin{aligned} g^1(x_1,\cdots,x_n)&\geqslant 0\\ &\vdots\\ g^m(x_1,\cdots,x_n)&\geqslant 0\\ x_1,\cdots,x_n&\geqslant 0 \end{aligned}$$

的一阶条件。拉格朗日函数为：

$$\mathscr{L}=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g^j(x_1,\cdots,x_n)$$

库恩-塔克条件是：

$$\mathscr{L}_{x_i}=f_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_i^j\leqslant 0 \qquad \text{如果}<,x_i=0 \tag{14-38}$$

$$\mathscr{L}_{\lambda_j}=g^j\geqslant 0 \qquad \text{如果}>,\lambda_j=0 \tag{14-39}$$

注意到不等式的方向，我们发现这些条件表明拉格朗日函数 $L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ 在 x 方向上取最大值，而在 λ 方向上取最小值。即把上述拉格朗日函数考虑为 x_i 和 λ_j 某个函数。如果 L 对于 x_i 取最大值，那么一阶条件将是(14-38)。同样，如果 L 对于 λ_j 取最小值，那么一阶必要条件就正好是(14-39)。

一个函数上的某一个点，如果在某些方向是最大值，而在其他方向上是最小值，那么它就称为该函数的鞍点。这个术语是受马鞍的形状的启发而得来的：在沿着马背的方向，马鞍中心代表最低点，但从马的一面到另一面时，马鞍中心代表的是最大值。

考虑函数，$f(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$，或简写为 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$。点(x^0,y^0)称为 $f(x,y)$的鞍点，如果：

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^0)\leqslant f(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0)\leqslant f(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y})$$

现在我们把这一概念应用于上面的拉格朗日函数上。如果拉格朗日函数 $\mathscr{L}=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g^j(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $x_i=x_i^*$，$i=1,\cdots,n;\lambda_j=\lambda_j^*$，$j=1,\cdots,m$(简记为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$，$\lambda=\lambda^*$)处是鞍点，那么，必然会导出关系(14-38)和(14-39)。即，如果：

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}^*)\leqslant\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)\leqslant\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda}) \tag{14-41}$$

那么，可以断言 $\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$在 x 方向有最大值，在 λ 方向有最小值。$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$极值存在的一阶条

件是：

$$\mathcal{L}_{x_i} \leqslant 0 \quad \text{如果} <, x_i = 0$$
$$\mathcal{L}_{\lambda_j} \geqslant 0 \quad \text{如果} >, \lambda_j = 0$$

但是，仅有的事实即两种情形（$f(x_1, \cdots, x_n)$的约束最大值和 $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$的鞍点）都可以推出同样的条件（式子(14-38)和(14-39)）并不意味着两种情形是等价的，或其中特定某一个能推出另一个。不过，在相当一般化的数学条件下，确实如此：鞍点准则隐含着 $f(x)$具有约束最大值。但反过来是不对的，除非添加了更强的条件。如果还假定，(1) $f(\boldsymbol{x})$和 $g^j(\boldsymbol{x})$都是凹函数，(2)存在点 $\boldsymbol{x}^0 > 0$ 使得 $g^j(\boldsymbol{x}^0) > 0, j = 1, \cdots, m$（这一条件就是所知的 Slater's 约束限定 constrain qualification），那么如果$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$是约束最大化问题的解，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$也是拉格朗日函数的鞍点。

这一定理就是库恩-塔克鞍点定理（实际上它有很多变形）。部分证明参见本章附录。向量记号将贯穿始终。

假设$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$确实是 $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$的鞍点。那么，根据定义，对于 $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\lambda} \geqslant \boldsymbol{0}$，

$$f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^* \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^* \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) \tag{14-42}$$
$$f(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^* \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) \tag{14-43}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$表示 $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j(\boldsymbol{x})$，向量 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g^1(\boldsymbol{x}), \cdots, g^m(\boldsymbol{x}))$。从(14-43)，两边消去 $f(x^*)$后有：

$$(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*) \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) \geqslant 0 \tag{14-44}$$

因为根据假设(14-44)对任意 $\boldsymbol{\lambda}$ 都成立，那么对于充分大的 $\boldsymbol{\lambda}$，$(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*) \geqslant \boldsymbol{0}$，所以：

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) \geqslant 0 \tag{14-45}$$

这样我们就证明了 $\boldsymbol{x}^*$ 是可行的；即它满足最大化问题的约束条件。而且，我们可以在(14-44)中设 $\boldsymbol{\lambda} = 0$（因为这对所有 $\boldsymbol{\lambda}$ 都成立），乘以 -1 后得到：

$$\boldsymbol{\lambda}^* \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) \leqslant 0 \tag{14-46}$$

但是，$\boldsymbol{\lambda}^* \geqslant 0, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) \leqslant 0$。所以，为满足(14-46)，必须有：

$$\boldsymbol{\lambda}^* \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = 0 \tag{14-47}$$

现在考虑第一个不等式，(14-42)，表示的是 $\boldsymbol{x}$ 方向的最大值。利用(14-47)，(14-42)成为：

$$f(\boldsymbol{x}^*) \geqslant f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^* \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{14-48}$$

但是，$\boldsymbol{\lambda}^* \geqslant \boldsymbol{0}$，而且对任意可行的 $\boldsymbol{x}$，即满足约束 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geqslant \boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{x}$。所以，$\boldsymbol{\lambda}^* \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$，因此：

$$f(\boldsymbol{x}^*) \geqslant f(\boldsymbol{x}) \tag{14-49}$$

对任意可行的 $\boldsymbol{x}$。所以，在满足约束 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geqslant \boldsymbol{0}$ 时 $\boldsymbol{x}^*$ 使 $f(\boldsymbol{x})$最大化。我们证明了鞍点条件暗含了约束最大值的存在。

重复说明，上述命题的逆命题通常是不成立的。如果加入条件 1 和 2，也就是 $f(\boldsymbol{x})$和 $g^j(\boldsymbol{x}), j = 1, \cdots, m$ 都是凹函数，并存在点 $\boldsymbol{x}^0 > 0$ 使得 $g^j(\boldsymbol{x}^0) > 0, j = 1, \cdots, m$，那么“逆命题”成立。不幸的是这一性质的证明需要用到更高的有关凸集的线性代数方法。我们将在附录

里进行讨论。不过要注意，鞍点不等式的右边部分是直接从约束最大化的假设中导出的。如果 $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*$ 是在 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 时最大化 $f(\boldsymbol{x})$ 的，那么：

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = f(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^* g(\boldsymbol{x}^*)$$

但是由一阶条件，$\boldsymbol{\lambda}^* \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = 0$。所以：

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = f(\boldsymbol{x}^*)$$

根据定义：

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*)$$

但 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) \geqslant 0$，以及假设 $\boldsymbol{\lambda} \geqslant 0$；故：

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = f(\boldsymbol{x}^*) \leqslant f(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = \mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda})$$

即关系式(14-41)的右边部分。

例　我们将用一个例子说明达到约束最大化并不一定意味着拉格朗日函数有鞍点。考虑一个消费者，在满足约束 $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant M$ 时最大化效用 $U = x_1 x_2$。因为效用函数的无差异曲线 $x_1 x_2 = U^0$ 不可能与轴相交，而且对于所有正的 $x, U_1 > 0, U_2 > 0$，消费者实际上会花光所有的收入；即 $M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$。这样，问题可以通过构建：

$$\mathscr{L} = x_1 x_2 + \lambda(M - p_1 x_1 - p_2 x_2) \tag{14-50}$$

及一阶条件等式：

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_1 &= x_2 - \lambda p_1 = 0 \\ \mathscr{L}_2 &= x_1 - \lambda p_2 = 0 \\ \mathscr{L}_\lambda &= M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{aligned} \tag{14-51}$$

首先消掉 λ 可求得消费者的需求函数：

$$x_2 = \lambda p_1 \qquad x_1 = \lambda p_2$$

这样：

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

或：

$$p_1 x_1 = p_2 x_2$$

把这个关系带入预算约束($\mathscr{L}_\lambda = 0$)给出：

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

所以：

$$x_1^* = \frac{M}{2p_1} \tag{14-52a}$$

$$x_2^* = \frac{M}{2p_2} \tag{14-52b}$$

还有：

$$\lambda^* = \frac{x_2^*}{p_1} = \frac{x_1^*}{p_2} = \frac{M}{2p_1p_2} \tag{14-53}$$

因此我们发现：

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) = x_1^* x_2^* + \lambda^*(M - p_1 x_1^* - p_2 x_2^*) \tag{14-54}$$

但是，x_1^*, x_2^* 满足预算约束，这样就有：

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) = \frac{M}{2p_1}\frac{M}{2p_2} = \frac{M^2}{4p_1p_2} = U(x_1^*, x_2^*)$$

根据定义：

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda) = U(x_1^*, x_2^*) + \lambda(M - p_1 x_1^* - p_2 x_2^*)$$

因为在 x_1^*, x_2^* 处预算约束是紧的：

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda) = U(x_1^*, x_2^*) = \frac{M^2}{4p_1p_2} = L(x^*, \lambda^*)$$

所以，鞍点的右边是以等式的形式满足的：

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) = \mathscr{L}(x^*, \lambda) \tag{14-55}$$

但是，鞍点条件的左边是不满足的：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x, \lambda^*) &= U(x_1, x_2) + \lambda^*(M - p_1 x_1 - p_2 x_2) \\ &= x_1 x_2 + \frac{M}{2p_1p_2}(M - p_1 x_1 - p_2 x_2)\end{aligned}$$

如果我们令 $x_1 = x_2 = 0$，

$$\mathscr{L}(x, \lambda^*) = \frac{M^2}{2p_1p_2} > \frac{M^2}{4p_1p_2} = \mathscr{L}(x^*, \lambda^*)$$

鞍点条件于是不再成立，因为尽管 $U = x_1 x_2$ 对于 x_1 和 x_2 而言是拟凹的，它不是凹的。这样，仅仅得到约束最大值不能保证拉格朗日函数在最大值点为鞍点。

14.4 非线性规划

在不等式约束和非负约束下求函数最大值的这类问题一般称为非线性规划问题。形式为：

最大化

$$y = f(x_1, \cdots, x_n)$$

满足约束

$$g^1(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0$$

$$\vdots$$

$$g^m(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0$$
$$x_1,\cdots,x_n\geqslant 0$$

的这些问题没有包含特定的足够的结构，可以用来对问题的解进行描述。准确确定哪些约束将是紧的。哪些是不紧的使得这类问题比经典的没有非负约束的等式约束下函数最大化问题复杂得多。一旦说明哪些约束是紧的，前面的问题就简化成了经典的最大化问题，可以通过标准的拉格朗日技术求解(原则上的——方程组可能不存在容易用表达式表示的解)。

非线性规划问题的解可以通过某种迭代步骤，即一种一步一步接近最大值的算法实现。一般而言，这种算法任意选择某个可行的初始点，即 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 满足所有约束，包括非负性。然后在那一点的邻域内评估 $f(\boldsymbol{x})$ 是如何上升的，例如，减少某些 x_i 而增加其他的。当到达新的一点时，重复前面的评估。成功的算法就是那些可以在有限(但不是天文数字般巨大的)步里达到最大值的方法。

人们已经发展出了一些算法，在对函数 f 和 g^j 的结构作不同的假设之下。最著名的是单纯性算法，是 George Dantzig 在 1947 年为解线性规划问题而提出的。[3] 当 f 和 g^j 都是线性函数时我们就遇到这种类型的问题：

最大化

$$y=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$$

满足约束

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\qquad i=1,\cdots,m$$
$$x_j\geqslant 0\qquad j=1,\cdots,n$$

我们将在第 17 章讨论现行一般均衡模型时分析这类问题。

不存在对所有非线性规划问题广泛适用的算法。目前有的一些特定的解某类非线性规划问题的算法并不是大多数经济学家所关心的中心问题，而且也超出了本书的范围。我们仅仅将简要说明在哪些结构下哪些算法能比较成功。

在非线性规划中遇到的中心问题是确定局部解是否是真实的全局解。也就是，假定对所有在 $\boldsymbol{x}^*$ 某个邻域内的所有点 $\boldsymbol{x}$ 都有 $f(\boldsymbol{x}^*)\geqslant f(\boldsymbol{x})$，那么 $\boldsymbol{x}^*$ 是一个局部极大值点。我们如何才能保证 $\boldsymbol{x}^*$ 也是全局的最优解呢，即对所有可行的 $\boldsymbol{x}$，都有 $f(\boldsymbol{x}^*)\geqslant f(\boldsymbol{x})$？当然，在一般情况下，人们是不能确定的。但在特定的结构下局部最优解就是全局最优解。让我们来看一看这些情况。

观察图 14-3，消费者要使其效用函数 $U(x_1,x_2)$ 最大化，U^1 和 U^2 是无差异曲线。假定，与通常的假设相反，预算约束不是线性形式的，$p_1x_1+p_2x_2\leqslant M$，而是被曲线 MM' 包围的有

3　Dantzig, G. B.: "Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities," in T. C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, *Cowles Commission Monograph* 13, John Wiley & Sons, Inc., NeW York, 1951.

界区域。给定该情形，存在两个约束极大值：x^* 和 x^{**}。在 x^*，$U(x^*)>U(x)$ 对 x^* 的某个邻域内的所有点 x。如果邻域足够大，可以找到某些 x 使得 $U(x)>U(x^*)$，那么在这个问题中会得出 x^* 为解的迭代步骤可能是不够有效的。在这个例子中，x^{**} 是全局最优解，因为很明显，对于预算集里所有的其他 x，都有 $U(x^{**})>U(x)$。

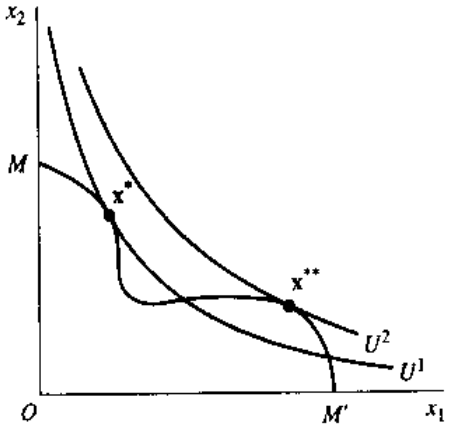

图 14-3 非线性预算下的效用最大化，x^*，x^{**} 都是 $U(x_1,x_2)$ 的局部最大值。但是，x^{**} 是全局最大值点。非线性预算约束 MM' 产生的可行集合是非凸的。这种情况下，以及非凹的目标函数，会导致非全局的局部最大值。如果可行集是凸的，目标函数是凹的，那么局部最大值也是全局最大值。此时求解算法的有效性会大大提高。

出现非全局极大值的原因是连接 x^* 和 x^{**} 的线在可行区域的外部，即所有可行的 x 的集合。也就是说，将 x^* 和 x^{**} 连起来的直线中包含有在模型条件下不可行的点。所以在分析非线性规划问题中一个很重要的构件就是凸集。

定义 一个集合 S 称为凸集，如果对于所有的 $x^1\in S, x^2\in S$（符号"$\in$"表示"属于"或"是其中的一个元素"），点 $x=kx^1+(1-k)x^2$ 属于 S，对于所有的 $0\leqslant k\leqslant 1$。

从几何意义角度看，凸集就是连接集合内任意两点的直线上的所有点都属于该集合的集合。集合中任何两点的连线从不会离开集合。所有的正方形，三角形，圆，球体和平行四边形都是凸集；但是像图 14-3 中的由轴和曲线 MM' 包围的区域就不是凸的。正如上面所讨论的，关于局部最优和全局最优的主要结果是下面的定理。

定理 令 $f(x)$，$x=(x_1,\cdots,x_n)$ 为定义在某个凸集 S 上的拟凹函数。那么如果 $f(x^*)$ 是 S 上的惟一的局部最大值，那么实际上它就是全局最大值。

证明：假设存在 x^{**} 使得 $f(x^{**})>f(x^*)$。那么，由拟凹性，

$$f(kx^*+(1-k)x^{**})\geqslant f(x^*) \qquad 0\leqslant k\leqslant 1$$

选择 k 使得它任意接近 1，可以使 $kx^*+(1-k)x^{**}$ 任意接近 x^*；但是函数值仍然大于或等于 x^* 处的函数值，惟一的局部最大值。矛盾，所以原命题成立。

有启发性的，如果 x^* 和 x^{**} 是两个有限分离的局部最大值点，连接两点的弦必定在凸集 S 内。沿着弦的函数值则至少和 $f(x^*)$，$f(x^{**})$ 中的最小值一样大。如果 $f(x^*)>f(x^{**})$，那么任意接近点 x^{**} 的 x 必定满足 $f(x)>f(x^{**})$，与假设的 x^{**} 为局部最大值矛盾。如果 $f(x^*)=f(x^{**})$，函数在弦 x^*x^{**} 上为常数。所以可以推出，如果局部最大值是惟一的，那它就是个凸集 S 上的全局最大值。

在什么情况下给定的最大化问题的变量集合是凸的？也就是，在什么情况下非线性规

划的可行区域是凸集？容易证明，如果所有约束都是凹函数，那么可行区域就是凸的。

考虑集合 S，定义为满足 $g(\boldsymbol{x})\geqslant a$ 的 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 集合，其中 a 是任意实数。那么 S 是凸的；对任意的 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2$ 满足 $g(\boldsymbol{x}^1)\geqslant a, g(\boldsymbol{x}^2)\geqslant a$，则由凹性：

$$g(k\boldsymbol{x}^1+(1-k)\boldsymbol{x}^2)\geqslant kg(\boldsymbol{x}^1)+(1-k)g(\boldsymbol{x}^2)\geqslant ka+(1-k)a=a \qquad 0\leqslant k\leqslant 1$$

所以点 $k\boldsymbol{x}^1+(1-k)\boldsymbol{x}^2$ 在集合中，所以 S 是凸的。如果 $g^1(\boldsymbol{x}),\cdots,g^m(\boldsymbol{x})$ 都是凹的，那么同时满足：

$$\begin{aligned} g^1(\boldsymbol{x})&\geqslant a_1\\ &\vdots\\ g^m(\boldsymbol{x})&\geqslant a_m \end{aligned}$$

点 x 集合显然构成一个凸集，如果加入非负约束也是如此。（凸集的交也是凸集。）所以，如果规划问题的所有约束都是凹的，那么可行区域一定是凸集。如果目标函数也是凹的，我们可以保证模型的局部最优解一定是全局最大值。

上述定理的主要应用将在下一章中讨论，即应用于当 $f(\boldsymbol{x}),g^1(\boldsymbol{x}),\cdots,g^m(\boldsymbol{x})$ 都是线性函数时的线性规划问题。此时，可行域是凸的，也有有效的求解算法。

14.5　加总定理

许多经济模型都有这样的一般化的结构：

最大化

$$y=f(x_1,\cdots,x_n)$$

满足约束

$$\begin{aligned} g^1(x_1,\cdots,x_n)&\leqslant b1\\ &\vdots\\ g^m(x_1,\cdots,x_n)&\leqslant b_m \qquad x_1,\cdots,x_n\geqslant 0 \end{aligned}$$

现在假设 $f,g^1,\cdots,g^m$ 都是 r 次齐次的。并假定问题有可通过库恩—塔克技术找到解。拉格朗日函数是：

$$\mathscr{L}=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*(b_j-g^j(x_1,\cdots,x_n)) \tag{14-56}$$

因此一阶条件是：

$$f_i\leqslant\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_i^j \qquad \text{如果}<,x_j=0 \tag{14-57}$$

和

$$b_j-g^j\geqslant 0 \qquad \text{如果}>,\lambda_j=0 \tag{14-58}$$

或者写成：

$$f_i x_i^* = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_i^j x_i^* \tag{14-59}$$

和

$$b_j \lambda_j^* = g^j \lambda_j^* \tag{14-60}$$

现在在(14-59)中对 i 求和，在(14-60)中对 j 求和。得到：

$$\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^* = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \sum_{i=1}^{n} g_i^j x_i^* \tag{14-61}$$

和

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \lambda_j^* = \sum_{j=1}^{m} g^j \lambda_j^* \tag{14-62}$$

应用欧拉定理。因为 $f, g^1, \cdots, g^m$ 都是 r 次齐次的，所以 $\sum f_i x_i \equiv rf$，$\sum g_i^j x_i \equiv r g^j$，根据(14-61)，令 $y^* = f(x^*)$，我们有：

$$ry^* = rf(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* r g^j(x^*) = r \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* b_j$$

或

$$y^* = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* b_j \tag{14-63}$$

从推广的包络角度考虑：

$$\lambda_j^* = \frac{\partial y^*}{\partial b_j}$$

如果约束 $g^j(x) \leqslant b_j$ 被认为是资源约束，其中 b_j 代表经济中使用的某种资源的数量，$\lambda_j^* = \partial y^* / \partial b_j$ 代表以 y 为单位计算的资源的归因租金，或影子价格。换言之，$\lambda_j^* b_j$ 可以认为是与某种资源配置相关的某要素的全要素成本。式(14-63)于是说明在这些假设之下，最大化的产出可以恰好全部分配给各个资源。这种类型的加总，或产品完全分配定理曾经在关于产出和成本的章节中出现过，当生产函数是线性齐次时。前面的结果是那些结果的推广。而且，考虑间接目标函数：

$$\phi(b_1, \cdots, b_m) = f(x_1^*, \cdots, x_n^*) = y^*$$

因为 $y^* \equiv \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* b_j$ 和 $\lambda_j^* = \partial y^* / \partial b_j = \partial \phi / \partial b_j$，

$$\phi(b_1, \cdots, b_m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \phi}{\partial b_j} b_j \tag{14-64}$$

所以，在这些情况下，从欧拉定理的逆定理知，间接目标函数是参数 $b_1, \cdots, b_m$ 的一次齐次函数。

习题

1. 说明下面陈述中的错误：对于利润最大化的企业，如果最初使用时边际产出价值低于其工资，那么该要素将不会被使用。试改正之。
2. 考虑约束最小化问题：

   最小化

   $$z=f(x_1,x_2)$$

   满足约束

   $$g(x_1,x_2)\leqslant 0 \qquad x_1,x_2\geqslant 0$$

   试给出最小化的库恩—塔克一阶条件。
3. 考虑成本最小化问题：

   最小化

   $$C=w_1x_1+w_2x_2$$

   满足约束

   $$f(x_1,x_2)\geqslant y \qquad x_1,x_2\geqslant 0$$

   推导并解释最小化的一阶条件。对生产函数添加什么条件可以使得拉格朗日函数在成本最小化解处有鞍点？
4. 考虑一个消费者，要在预算约束下最大化效用 $U=x_2e^{x_1}$。利用库恩—塔克条件描述隐含需求的特征，即说明什么时候对哪种商品的需求为正，等等。
5. 考虑二次效用函数 $U=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2$。讨论 a,b,c 取不同值时该效用所预示的消费者选择特征。
6. 求解下面的非线性规划问题：

   最大化

   $$y=x_1x_2$$

   满足约束

   $$x_1+x_2\leqslant 10 \qquad x_1+2x_2\leqslant 18 \qquad x_1,x_2\geqslant 0$$

7. 考虑下面的非线性规划问题：

   最大化

   $$y=x_1x_2$$

   满足约束

   $$x_1+x_2\leqslant 10 \qquad x_2\leqslant k \qquad x_1,x_2\geqslant 0$$

8. 求解：

   最小化

   $$y=x_1+2x_2$$

   满足约束

   $$x_1x_2\geqslant 8 \qquad x_1\geqslant 5 \qquad x_1,x_2\geqslant 0$$

9. 用 $x_1\leqslant 5$ 代替 $x_1\geqslant 5$，求解问题 8。

10. 一个人两时期消费的效用函数是 $U=x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}$。其中 x_1=现期消费，x_2=下一年的消费。个人的初始资本为\$10，它可以沿着"投资可能性前沿"$2x_1^2+x_2^2=200$ 提供消费。消费者也可以市场利率 r 借贷来组织消费。
   (a) 解释为什么效用最大化首先要求财富 W 最大化，其中 $W=x_1+x_2/(1+r)$。也就是，解释为什么 W 没有最大化时，$U(x_1,x_2)$也不能最大化。
   (b) 假定消费者可以 $r=30\%$进行借贷。给出效用最大化的消费选择。消费者是借款人还是贷款人。
   (c) 假定消费者只能以 20%的利率贷款给别人，而以 40%的利率向别人借钱。什么样的消费计划可以最大化效用，消费的现值为多少？

附录

证明如果 $f(\boldsymbol{x}),g^1(\boldsymbol{x}),\cdots,g^m(\boldsymbol{x})$都是凹函数，那么：

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}^*)\leqslant\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)=f(\boldsymbol{x}^*)$$

其中 x^* 是最大化问题的解，是以凸分析的著名定理为基础的。考虑两个不相交的凸集 S_1 和 S_2。从几何上看很直观，虽然证明起来很麻烦，有一个超平面(对二维空间的直线，三维空间的平面等的推广)可以在 S_1 和 S_2 之间穿过。这一性质称为分离超平面定理。如果两个集合相切于一点，定理也成立。

观察图 14-4，S_1 和 S_2 是不相交的两个凸集。因此直线 $p_1x_1+p_2x_2=k$，或用向量形式表示，$\boldsymbol{px}=k$，可以从两者之间穿过。图 14-5 说明为什么集合非凸时命题不成立。

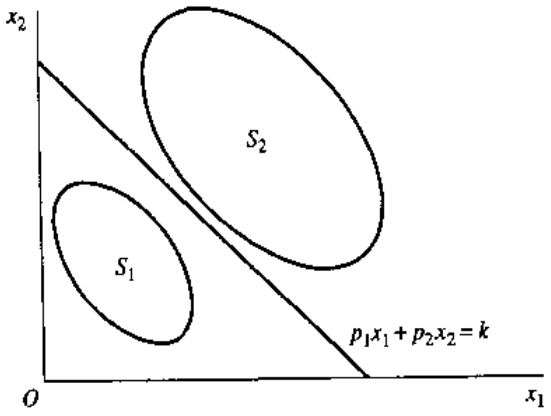

图 14-4 分离超平面。集合 S_1,S_2 都是凸集，并且互不相交；即没有共同点。在这些情况下，总可以找到一个超平面从两者间穿过(二维时，是个直线)。因为 S_2 在平面上方，对于 S_2 中的 x_1^2，x_2^2，$p_1x_1^2+p_2x_2^2\geqslant k$。同样，对于 S_1 中的 x_1^1，x_2^1，$p_1x_1^1+p_2x_2^1\leqslant k$。所以，分离超平面定理说如果 S_1,S_2 都是 n 维空间的不相交凸集，那么存在不全为 0 的数 $p_1,\cdots,p_n$，使得 $\sum_i^n p_ix_i^1\leqslant\sum_{i=1}^n p_ix_i^2$，对于所有 S_1 中的 x^1 和 S_2 中的 x^2。如果两个集合只交于一点，即 S_1,S_2 相切，那么定理也成立。

因为所有的 S_2 中的点都在超平面的上方，对于所有 $\boldsymbol{x}^2\in S_2$，$\boldsymbol{px}^2\geqslant k$。(因为超平面可以相切于 S_2，所以这里用的是弱不等号。)同样，因为 S_1 在超平面下面，对所有 $\boldsymbol{x}_1\in S_1$，$\boldsymbol{px}^1\leqslant k$。所以，对于任意不交的凸集 S_1 和 S_2，存在不是都为 0 的数 p_1,p_2 使得：

$$\boldsymbol{px}^1\leqslant\boldsymbol{px}^2$$

不等式的方向实际上可以是任意的。改变 p_1, p_2 的符号就可以改变不等式的方向。定理可以推广到 n 维的情形。如果 S_1 和 S_2 是 n 维欧几里得空间的两个不相交的凸集，对于任意 $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2$，存在不全为 0 的数 $p_1, \cdots p_n$，使得：

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 \qquad (14A\text{-}1)$$

现在我们讨论鞍点定理。我们假定满足约束 $g^j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, j=1, \cdots, m, x \geqslant 0$ 时 $\boldsymbol{x}^*$ 使 $f(x)$ 最大化。我们也假定 Slater 约束限定，即存在点 $\boldsymbol{x}^0 > 0$ 使得 $g^j(\boldsymbol{x}^0) > 0, j=1, \cdots, m$。对任意给定的 $\boldsymbol{x}$，存在 $m+1$ 个值 $f(\boldsymbol{x}), g^1(\boldsymbol{x}), \cdots, g^m(\boldsymbol{x})$，一个 $(m+1)$ 维的向量。

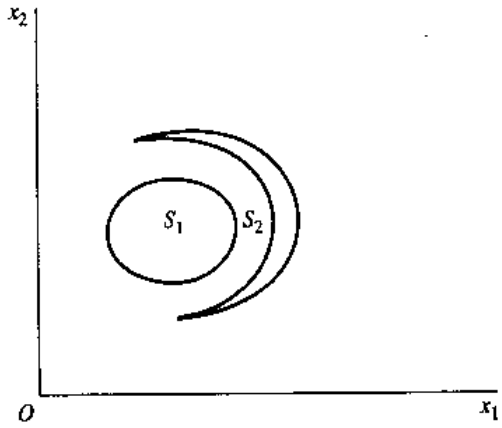

图 14-5　非凸集。用超平面并不总能分离非凸的集合。

1. 定义 S_1 为对所有可行的 x 满足 $U_0 \leqslant f(\boldsymbol{x}), U_j \leqslant g^j(x), j=1, \cdots, m$ 的向量 $\boldsymbol{U}=(U_0, U_1, \cdots, U_m)$ 的集合。

2. 定义 S_2 为定义满足 $V_0 > f(\boldsymbol{x}^*), V_j > 0, j=1, \cdots, m$ 的向量 $\boldsymbol{V}=(V_0, V_1, \cdots, V_m)$ 的集合。集合 S_1 和 S_2 是凸的，而且不相交。S_1 是凸的，因为 $f, g^1, \cdots, g^m$ 都是凹函数。第 14.4 部分结尾处的结果说明了 S_1 的凸性；S_2 是凸的，因为 S_2 实质上就是 $m+1$ 维空间的正象限，除了第一个坐标，V_0 是从 $f(\boldsymbol{x}^*)$ 开始的。最后，因为 $f(\boldsymbol{x}^*) \geqslant f(\boldsymbol{x}), V_0 > f(\boldsymbol{x}^*)$，所以在 S_1 中不存在 $\boldsymbol{V}$ 向量。第一个坐标 V_0，与 S_1 的定义相违背。

既然 S_1 和 S_2 是不相交的凸函数，有分离超平面定理，存在数 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$，使得：

$$\sum_{j=1}^{m} U_j \lambda_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} V_j \lambda_j \qquad (14\text{-}A2)$$

对所有 $\boldsymbol{U} \in S_1, \boldsymbol{V} \in S_2$。而且，尽管点 $(f(\boldsymbol{x}^*), 0, \cdots, 0)$ 不在 S_2 内部，它在 S_2 的边界上，所以定理也适用于这些点。点 $(f(\boldsymbol{x}), g^1(\boldsymbol{x}), \cdots, g^m(\boldsymbol{x}))$ 在 S_1 内部。所以，应用(14-A2)，有：

$$\lambda_0 f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j(\boldsymbol{x}) \leqslant \lambda_0 f(\boldsymbol{x}^*) \qquad (14\text{-}A3)$$

可以从(14-A2)看出 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 都是非负的。向量 U 包括了 $m+1$ 维空间全部的负“象限”。任意 U_j 可以变得负的任意大。注意到 $V_1, \cdots, V_m$ 都大于 0。如果任意一个 $\lambda_j, j=1, \cdots, m$ 为负，使得负的足够多的 U_j 能够违反不等式(14-A2)。最后，因为 $f(x^*) \geqslant f(x)$，且因为 x^* 使 $f(x)$ 最大化，本质上基于同样的理由 $\lambda_0 \geqslant 0$。

所以，(14-A3)中的所有 λ 都是非负的。而且，给定约束限定，$\lambda_0 > 0$；比如假定 $\lambda_0 = 0$，那么(14-A3)说明：

$$\sum \lambda_j g^j(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$$

但是，因为分离超平面定理说 λ_j 是不全为 0 的，约束限定说 $g^j(\boldsymbol{x}^0) > 0, j=1, \cdots, m$，所以一

定有在 x^0 处：

$$\sum \lambda_j g^j(x^0) > 0$$

与前面矛盾。所以，$\lambda_0 > 0$。因此我们可以在(14-A3)中除以 λ_0，如果我们定义：

$$\lambda_j^* = \frac{\lambda_j}{\lambda_0} \qquad j = 1, \cdots, m$$

(14-A3)就成了：

$$f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g^j(x) \leqslant f(x^*) \tag{14-A4}$$

当 $x = x^*$ 时，由(14-A4)得到：

$$\sum \lambda_j^* g^j(x^*) \leqslant 0$$

但因为 $\lambda_j^* \geqslant 0, g^j(x^*) \geqslant 0, j = 1, \cdots, m$，

$$\sum \lambda_j^* g^j(x^*) = 0$$

定义拉格朗日函数：

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j(x)$$

我们发现，$x \geqslant 0, \lambda \geqslant 0$ 时，

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) = f(x^*)$$

所以：

$$\mathscr{L}(x, \lambda^*) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g^j(x) \leqslant f(x^*) = \mathscr{L}(x^*, \lambda^*) \tag{14-A5}$$

满足鞍点条件。我们在这一章曾证明：

$$\mathscr{L}(x^*, \lambda^*) \leqslant \mathscr{L}(x^*, \lambda)$$

所以，如果 $f(x), g^1(x), \cdots, g^m(x)$ 都是凹函数，并存在一个 x^0 使得 $g^j(x) > 0, j = 1, \cdots, m$，那么解约束最大化问题就意味着满足鞍点条件。

部分参考文献

阅读下列文章和书籍需要经过高等的数学训练。

Arrow, K. J., and A. C. Enthoven: "Quasi-Concave programming," *Econometrica* 29: 779-800, 1961.

_____, _____, L. Hurwicz, and H. Uzawa (eds.): *Studies in Linear and Nonlinear Programming*, Stanford University Press, Stanford, CA 1958.

Dantzig, G. B.: "Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities," in T. C.

Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, *Cowles Commission Monograph 13*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

El Hodiri, M.: "Constrained Extrema: Introduction to Differentiable Case, with Economic Application," *Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems*, vol. 56, Springer, 1970.

_____: "The Math-Econ Trick.", *Manifold*, 17: 8-15, Autumn 1975.

John, F.: "Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions," in *Studies and Essays*, *Courant Anniversary Volume*, Interscience, New York, 1948.

Kuhn, H. W., and A. W. Tuker: "Nonlinear Programming" in J. Neyman (ed.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probobility*, University of California Press, Berkeley, 1951. The seminal work.

Rochafellar, R. T.: *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

Valentine, F.: "The Problem of Lagrange with Differential Inequalities as Side Conditions," in *Contributions to the Calculus of Variations, 1933-1937*, University of Chicago Press, Chicago, 1937.

第 15 章　合同与激励

15.1　生产的组织

标准的生产者理论关心价格如何决定最优的投入、产出。但是，投入与产出的选择仅仅是生产决策的一个方面，各种生产要素的所有者都必须受到激励而在生产过程中以不同的方式做出贡献。在没有信息成本的世界里，每个投入贡献的维度都能被准确衡量，而有效的生产组织也能通过一个价格体系而实现。当获取信息有成本时，其他组织模式可能比价格体系更经济。比如，经理只需要告诉秘书做什么，而不必为她接的每一个电话，打的每一页纸支付一定的报酬[1]。因为个人都关心自我利益，任何一种组织生产的模式最终必须依赖于各种激励。被告知做什么的秘书并非盲目听从命令，她可能是因为有升迁的前景或解雇的威胁才这样做。在组织生产过程中使用的激励方式有时候会在合同中明确表述，有时候又是不清楚的。本章就考察这些清晰或不清晰的合同是如何影响人们的行为以及人们是如何选择他们使用的合同的。

在我们详细讨论特定的模型之前，先考虑在典型的合同情形中可能产生的潜在问题是很有用的。假定 x 单位的投入要花费成本 $C(x)$ 元，而产生总收入 $B(x)$ 元，目标是净收益 $B(x)-C(x)$ 的价值最大，最优的投入数量用 x^0 表示，满足一阶条件 $B'(x^0)-C'(x^0)=0$。

假如投入成本是由一个人支出的，而收益归另一个人所有，那么可令投入价格为 P^0，其中 $P^0=B'(x^0)=C'(x^0)$。在这一价格上，投入的提供者会选择 x 使 $P^0x-C(x)$ 最大，一阶条件 $P^0-C'(x)=0$ 的解是 $x=x^0$。同一价格上，投入的购买者会选择 x 使 $B(x)-P^0x$ 最大。一阶条件 $B'(x)-P^0=0$ 的解也是 $x=x^0$。这样，最优的投入水平可以通过分权化的价格体系实现。然而，利用价格体系并非毫无问题。尽管我们假定投入数量 x 为一个数，但一般来说，在一个典型的生产中，投入的许多属性对产出都有贡献。精确测定每一属性是十分昂贵的，而且，确定正确的价格 P^0 需要知道收入及成本函数的形式，但是交易各方可能会拥有他们自己的私人信息而不愿披露。

正因为利用价格有成本，有时也采用其他形式的合同。如不按投入数量 x 支付给投入提供者，而是以总收入 $B(x)$ 或投入成本 $C(x)$ 为基础支付报酬。通常，即使成本收益是难以衡量的，支付也必须以某些业绩替代指标为基础。这些其他的激励系统常常和直接控制——对表现好的升迁，不好的罚以解职——相联系。实际上在组织经济活动中存在着大量

1　本章我们一般使用中性术语，但为了避免过多的语言混乱，我们随意假定委托人为男士，其客户为女士。

的合同契约形式。这一章仅讨论一小部分。

15.2　委托代理模型

当一个人采取行动(代理人)而另一个人承担行动的后果时(委托人),委托代理关系就产生了。委托代理模型通常称为隐行为模型,因为采取的行动常常是委托人无法观测到的,当代理人的行为无法观测并没有在合同中直接设定时,她可能不愿意为委托人做出正确的行动。这一类的问题即所熟知的道德风险。这种说法起源于保险行业,当一个人不能够付出努力以降低投保损失发生的概率时,道德风险就产生了。在这个用法中,投保的个人是代理人,而保险公司是委托人。今天,道德风险这个词广泛应用于经济学中,它被用来指当某个人施行生产活动时,却不能被另一个人观测到或不能被第三方验证时产生的激励问题。

通过一个简单的框架可以对委托代理模型有个基本的认识。其中代理人只有两种选择的行为:高成本(对于代理人而言)的行为 $x=x_H$,和低成本的行为 $x=x_L$,成本分别为 $C(x_H)$和 $C(x_L)$,$C(x_H)>C(x_L)$。问题是当代理人的行为并不能直接观测到时,如何刺激她采取高成本的行为。

令 $B(x)$代表采取行动 x 时产出的价值。如果产出是代理人行动的一对一函数,那么观察到 $B(x)$等同于观察到 x,就没有必要克服信息问题了。我们进行不同的假定,即产出除了依赖于 x,也依赖于随机因素。特别地,假定产出可以取 n 个不同的值,$b_1,\cdots,b_n$,令 $x=x_H$时,产出等于 b_i 的概率由 $\pi_H(b_i)$给出;当 $x=x_L$ 时,概率为 $\pi_L(b_i)$。

尽管对代理人的支付不可能是行动 x(无法观测到)的函数,但它可以以观测到的产出为依据。令 w_i 为观察到 b_i 时给代理人的转移支付。若委托人希望实施行动 x_L,他可以简单的支付给代理人一个固定工资,因为代理人毫无理由选择其他成本高于低成本的行动。仅仅当委托人想采取成本较高的行动 x_H 时,问题才变得有意义。当选择的行为是 x_H、相关的各种产出的概率函数是 $\pi_H(\cdot)$时,委托人选择工资支付为 $w_1,\cdots,w_n$,对应于不同的可能观测到的产出价值,使其预期的净收益最大化问题可以表述为:

$$\text{最大化} \qquad \sum_i \pi_H(b_i)(b_i-w_i)$$

$$\text{使得:} \qquad \sum_i \pi_H(b_i)\ u(w_i)-C(x_H)\geqslant u_0$$

$$\sum_i \pi_H(b_i)u(w_i)-C(x_H)\geqslant \sum_i \pi_L(b_i)\ u(w_i)-C(x_L)$$

其中,$u(\cdot)$是代理人冯·纽曼—摩根斯坦恩效用函数,u_0 是其保留效用水平。

我们假设代理人是严格风险厌恶的,为简单起见,假设委托人是风险中性的。上述第一个不等式是参与约束,它说明代理人为委托人工作而得到的期望效用必须超过她的保留效用。第二个不等式是激励相容约束,因为委托人无法观察到代理人的行为,他必须设计契

约，以使代理人自愿的执行应当采取的行动。所以，如果委托人想采取行动 x_H，选择 x_H 必须给予代理人高于选择另一可行行为 x_L 时带来的期望效用，这样代理人必定更愿意工作而不是躲避。更一般的，激励相容约束还要求委托人想要达到的行为必须是给定合同条款时效用最大化问题的解。

最优化问题的拉格朗日函数是：

$$\mathcal{L}=\sum_i \pi_H(b_i)(b_i-w_i)+\lambda_1\left(\sum \pi_H(b_i)u(w_i)-C(x_H)-u_0\right)$$
$$+\lambda_2\left(\sum[(\pi_H(b_i)-\pi_L(b_i)]u(w_i)-[C(x_H)-C(x_L)]\right)$$

其中 λ_1，λ_2 是分别对应于参与约束和激励相容约束的拉格朗日乘子。最优化问题的一阶条件是：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i}=-\pi_H(b_i)+\lambda_1\pi_H(b_i)u'(w_i)+\lambda_2(\pi_H(b_i)u'(w_i)-\pi_L(b_i)u'(w_i))=0$$

对任意 $i=1,\cdots,n$。上述表达式可以改写为：

$$\frac{1}{u'(w_i)}=\lambda_1+\lambda_2\left(1-\frac{1}{\pi_H(b_i)/\pi_L(b_i)}\right) \tag{15-1}$$

要解释这个一阶条件，首先假定 $\lambda_2=0$。式子(15-1)说明，对所有 i，$1/u'(w_i)=\lambda_1$，对任意两个可实现的产出水平 b_i 和 b_j，给代理人的支付分别为 w_i 和 w_j。因效用函数是严格凹的，当且仅当 $w_i=w_j$ 时，$1/u'(w_i)$和 $1/u'(w_j)$都等于同一 λ_1。换句话说，如果 $\lambda_2=0$，那么工资支付不随产出而波动。$\lambda_2=0$ 意味着激励相容约束是不起作用的，当不需要为代理人选择成本高的行为提供激励时，选择支付方案时的惟一考虑是如何分担风险。因为委托人是风险中性的，最优的协议是让他通过固定工资为代理人提供全部保险。但是，如果代理人得到的工资不变，她永远都会选择成本低的行为 x_L，换句话说，第二个不等式遭到破坏。所以，我们下结论说 λ_2 必须是正的，$\lambda_2>0$，代理人的支付 w_i 会随着产出 b_i 变化，在风险分担收益和激励条款间进行权衡。

给代理人的最低支付会随着似然率 $\pi_H(b_i)/\pi_L(b_i)$的值上升，如果比率很高，一阶条件(15-1)要求 $1/u'(w_i)$很大。因为 $u''<0$，这意味着 w_i 很大。这样的支付结构反映了统计推断的逻辑，尽管严格地讲，委托人早就知道了他的支付安排将会引导代理人选择 X_H。观察到的产出 b_i 包含了代理人的行为信息。$\pi_H(b_i)/\pi_L(b_i)$取值大，证明了符合假设(采取行动 X_H 而非 X_L)。这样，只要似然比率高时，代理人得到的是较高的报酬 w_i。

尽管上面的模型假定 w_i 仅依赖于产出，更精细的模型可允许 w_i 同样依赖于其他的信号。根据显示偏好理论，利用附加的信号会改进委托人的净回报，只要这些信号对似然比率值有着独立的影响。举例而言，如果观察到一个代理人产出较高，而在相似条件下其他代理人也同样有高产出，这就可能暗示任务比较简单或整个经济形势不错。个人产出的高水平本身并不一定是推翻工作偷懒的有力证据。而在另一方面，如果代理人产出很高，而其他人在同样形势下产出很低，这就是说明代理人努力工作而非消极怠工的有力证据。在这一更精细的模型中，结合相对产出的信息，通常能提高推断的质量。(似然比率是个人产出及相

对产出的函数。)这样,模型预测在最优合同中代理人的工资将同时依赖于绝对和相对的业绩表现。

在这样的一般性水平上,模型几乎未涉及在最优合同中工资如何同产出相联系的问题。对代理人的支付不必随着产出的提高而增加,因为高的 b_i 不一定与高的似然率 $\pi_H(b_i)/\pi_L(b_i)$ 相联系。为得到确定性的预测,我们还需要一个附加的假设。我们假定产出满足单调似然比性质,即 $\pi_H(b_i)/\pi_L(b_i)$ 是 b_i 的增函数。给定这一假设,最优支付 w_i 确实随着产出 b_i 的增加而增加。

比较静态分析

对于最优合同模型,分两步分析问题是有益的。第一步,我们假定合同是固定的,并研究给定合同时,效用最大化的个人行为。第二步,我们导出最优合同的形式,同时考虑到这个合同将影响步骤一中的行为这一事实。于是,就有两种形式的比较静态结果。第一步的比较静态分析合同中参数的变化如何影响行为,而第二步的比较静态考察其他约束的变化如何影响最优合同的参数。

为说明委托代理模型中的比较静态结果,我们重点分析这样一个模型,代理人得到的报酬是产出的线性函数:

$$w=\alpha+\beta b$$

这样的支付安排可以认为报酬由两部分组成:固定工资 α 和激励报酬 βb,β 的大小衡量了激励的强度。同时也假定产出是投入的一个连续函数加上一个随机噪声:

$$b=B(x)+e$$

其中,e 均值为 0,方差为 σ^2。进一步令代理人的效用(即来自不确定的收入流 y 的效用)可用均值-方差形式表示:

$$U=E(y)-r\mathrm{Var}(y)$$

其中,r 是他的风险厌恶程度。

给定线性支付安排,代理人选择投入水平 x 的净收入为:

$$y=w-C(x)=\alpha+\beta B(x)-C(x)+\beta e$$

因此期望收入是 $E(y)=\alpha+\beta B(x)-C(x)$,方差 $\mathrm{var}(y)=\beta^2\sigma^2$,在均值-方差效用函数下,代理人选择 x 以使:

$$\alpha+\beta B(x)-C(x)-r\beta^2\sigma^2$$

最大,效用最大化的一阶条件是:

$$\beta B'(x)-C'(x)=0 \tag{15-2}$$

等式(15-2)隐含定义了代理人的投入是激励强度的一个函数,即 $x=x^*(\beta)$。注意到除非 $\beta=1$,代理人提供的投入数量将不会是最优的,从标准的比较静态分析可知:

$$\frac{\partial x^*}{\partial \beta}=\frac{-B'}{\beta B''-C''}>0 \tag{15-3}$$

因为投人 x 对于委托人而言是观测不到的，它不能在合同中直接指定。但是，委托人通过改变激励强度能间接影响投人。假定委托人是风险中性，最优合同将确定 β，使得在满足参与约束和激励相容约束的情况下，他得到的期望产出：

$$-\alpha+(1-\beta)B(x)$$

最大化

$$\alpha+\beta B(x)-C(x)-r\beta^2\sigma^2=u_0$$

$$x=x^*(\beta)$$

代人这两个约束后，委托人问题可写成：

最大化 $\quad B(x^*(\beta))-C(x^*(\beta))-r\beta^2\sigma^2-u_0$

这个问题的一阶条件是：

$$(B'(x^*)-C'(x^*))\frac{\partial x^*}{\partial \beta}-2r\beta\sigma^2=0 \tag{15-4}$$

其中$\partial x^*/\partial\beta$由(15-3)给出，一旦最优激励数 β^* 由(15-4)式决定，固定工资 α^* 就可由参与约束确定。

等式(15-4)中的第一项是提高 β 带来的边际收益，第二项是边际成本。$\beta<1$ 时，等式(15-2)表明提供的投人低于完全有效的水平。所以，通过提高 β 来增加投人水平 x 能带来更大的效益。另一方面，具有更高激励报酬的合同风险也更大，并有降低代理人期望效用的趋势。如果代理人是风险中性的($r=0$)，提高 β 的边际成本为 0，所以边际收益也一定是 0。等式(15-2)$B'(x^*)-C'(x^*)=0$ 意味着 $\beta=1$，换言之，如果没有必要分担风险时，最优合同将使代理人拥有对产出的全部剩余索取权(代理人拥有 100%的边际产出)，当 $r>0$ 时，$B'(x^*)-C'(x^*)>0$，β 也将小于 1，激励水平的减弱将为代理人减少风险暴露，而代理人提供的投人数量也将少于完全有效的水平。(15-4)式两边对 r 微分，并利用最大化的二阶充分条件，可以证明$\partial\beta^*/\partial r<0$。$\partial\beta^*/\partial r<0$ 这些比较静态结果说明最优合同中的激励强度是代理人风险厌恶程度的递减函数，也是产出变化程度的递减函数。推导过程留作练习。

例 令 $B(x)=px$，$C(x)=cx^2$，那么，代理人将最大化 $\alpha+\beta px-cx^2-r\beta^2\sigma^2$。

解是 $x^*(\beta)=\beta p/2c$，把 x 值代入委托人的目标函数，可知：

最大化 $\quad p\left(\frac{\beta p}{2c}\right)-c\left(\frac{\beta p}{2c}\right)^2-r\beta^2\sigma^2-u_0$

β^* 的解为 $\beta^*=p^2/(p^2+4cr\sigma^2)$。

除了通常的 r 和 σ^2 的比较静态结果，这个例子导出了 P 和 C 的比较静态结果。直接微分，说明$\partial\beta^*/\partial p>0$，较高的 p 值说明投人的边际产出较高。在这种情况下，投入不足(消极工作)的相对成本比较高。这样，提供激励比提供保险更重要，委托人将选择一个大的 β^*。也可直接证明$\partial\beta^*/\partial c<0$，$c$ 值大，说明边际成本曲线很陡。当边际成本曲线很陡时，β 的大量增加将只能引起 x 相对较小的增加，所以，提高激励强度的边际收益不大，合同中将确定

一个较低的 β^* 以换取更多的保险。

多任务代理

考虑委托代理模型的扩展，其中代理人执行多个任务，而非一个。令产出为 $B(x_1+x_2)=p_1x_1+p_2x_2+e$，成本由凸函数 $C(x_1,x_2)$ 给出，假定产出并不能直接观测到（e 的方差无限大），委托人观测到的是在两项任务中付出努力的不完全信号。特别地，这两个信号是 $t_1=x_1+E_1$，$t_2=x_2+E_2$，其中 E_1 和 E_2 是均值为 0 的独立随机变量，令 E_1，E_2 的方差分别为 σ_1^2 和 σ_2^2，支付给代理人的报酬假定是信号的线性函数：$w=\alpha+\beta_1t_1+\beta_2t_2$。

假定代理人的期望效用具有均值-方差形式，所以他会选择 x_1，x_2 使：

最大化　　$\alpha+\beta_1x_1+\beta_2x_2-C(x_1,x_2)-r(\beta_1^2\sigma_1^2+\beta_2^2\sigma_2^2)$

一阶条件是：

$$\begin{aligned}\beta_1-C_1&=0\\ \beta_2-C_2&=0\end{aligned}\tag{15-5}$$

等式(15-5)暗含说明了代理人的最优努力水平在两项任务中是合同参数的函数。特别地，假定二阶充分条件成立 $H_1=\begin{vmatrix}-C_{11} & -C_{12}\\ -C_{12} & -C_{22}\end{vmatrix}>0$

进行标准的比较静态分析得到：$\partial x_1^*/\partial\beta_1=C_{22}/H_1>0$，$\partial x_2^*/\partial\beta_2=C_{11}/H_1>0$，$\partial x_1^*/\partial\beta_2=\partial x_2^*/\partial\beta_1=-C_{12}/H_1$。注意，最后一个比较静态结果的符号依赖于两项任务是互补的还是互相替代的。如果 $C_{12}>0$，那么任务是相互替代型的（在某项任务中更加努力会提高另一项任务的成本），提高某项任务的报酬会降低另一项任务的激励。

在分析的第二步，我们假定委托人是风险中性的。他在满足参与约束和激励相容约束的条件下，选择合同的各项参数，以使产出的期望价值减去工资支付为最大。这一问题等价于：

最大化　　$p_1x_1^*+p_2x_2^*-C(x_2^*,x_2^*)-r(\beta_1^2\sigma_1^2+\beta_2^2\sigma_2^2)-u_0$

其中，x_1^*，x_2^* 满足代理人期望效用最大化的一阶条件。

这个最大化问题选择的变量是 β_1 和 β_2，一阶条件是：

$$(p_1-C_1)\frac{\partial x_1^*}{\partial\beta_1}+(p_2-C_2)\frac{\partial x_2^*}{\partial\beta_1}-2r\beta_1\sigma_1^2=0$$

$$(p_1-C_1)\frac{\partial x_1^*}{\partial\beta_2}+(p_2-C_2)\frac{\partial x_2^*}{\partial\beta_2}-2r\beta_2\sigma_2^2=0$$

利用等式(15-5)和以前导出的比较静态结果，这些条件可重新写为：

$$\begin{aligned}(p_1-\beta_1)\frac{C_{22}}{H_1}+(p_2-\beta_2)\frac{-C_{12}}{H_1}-2r\beta_1\sigma_1^2&=0\\ (p_1-\beta_1)\frac{-C_{12}}{H_1}+(p_2-\beta_2)\frac{C_{11}}{H_1}-2r\beta_2\sigma_2^2&=0\end{aligned}\tag{15-6}$$

(15-6)式形成了导出最优合同参数的比较静态结果的基础，如果 $C(x_1,x_2)$ 是 x_1,x_2 的二次函数，或者它能由一个二次函数紧密逼近，那么 C_{11},C_{12} 和 C_{22} 并不依赖于 x_1 和 x_2。在这样的简化下，二阶导数的海赛矩阵行列式为：

$$H_2=\begin{vmatrix}\dfrac{-C_{22}}{H_1}-2r\sigma_1^2 & \dfrac{C_{12}}{H_1}\\ \dfrac{C_{12}}{H_1} & \dfrac{-C_{11}}{H_1}-2r\sigma_2^2\end{vmatrix}>\begin{vmatrix}\dfrac{-C_{22}}{H_1} & \dfrac{C_{12}}{H_1}\\ \dfrac{C_{12}}{H_1} & \dfrac{-C_{11}}{H_1}\end{vmatrix}=\frac{C_{11}C_{22}-C_{12}^2}{H_1^2}=\frac{1}{H_1}=0$$

因为 $H_2>0$，且海赛矩阵的对角元素非负，因此满足最大化的二阶充分条件。

对 σ_1^2 进行比较静态分析。利用克莱姆法则，一阶条件系统(15-6)式对该参数进行微分，得到：

$$\frac{\partial\beta_1^*}{\partial\sigma_1^2}=\frac{1}{H_2}\left[(2r\beta_1)\left(\frac{-C_{11}}{H_1}-2r\sigma_2^2\right)\right]<0$$

这个结论很惊人。像在单一任务代理模型中一样，当任务的信号变的嘈杂时，对第一项任务努力的最优激励要降低，以换取更多的保险。我们也能导出增加 σ_1^2 对 β_2^* 的影响：

$$\frac{\partial\beta_2^*}{2\sigma_1^2}=\frac{1}{H_2}\left[-(2r\beta_1)\frac{C_{12}}{H_1}\right]$$

如果 $C_{12}>0$，该导数是负的。原因是 σ_1^2 的增加减少了 β_1^*。而当 β_2^* 降低时，x_2^* 将会上升，因为任务 1 和 2 是互相替代的。由于在任务 2 中有更高的努力水平，相比之下，附加的保险提供更多的激励变得不重要了，所以委托人的反应是降低任务 2 努力的激励强度。解释这一结果的另外一种途径是：当任务互相替代时，有两种方法可以导致对任务 1 付出更多的努力：提高 β_1 或降低 β_2。当 σ_1^2 增加时，通过提升 β_1 使在任务 1 中努力变得成本更高，因为与信号噪声相联系的风险加大了。所以，委托人会选择降低竞争任务 2 的激励来为任务 1 提供激励。

考察当其中一项任务相比另一项变得更为重要时对最优合同的影响。这可以通过提高边际产出来实现，比如，任务 1 的边际产出来表示。进行比较静态分析得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta_1^*}{\partial p_1}&=\frac{1}{H_2}\left[\left(\frac{-C_{22}}{H_1}\right)\left(\frac{-C_{11}}{H_1}-2r\sigma_2^2\right)-\left(\frac{C_{12}}{H_1}\right)\left(\frac{C_{12}}{H_1}\right)\right]\\&=\frac{1}{H_2}\left[\frac{C_{11}C_{22}-C_{12}^2}{H_1^2}+\left(\frac{C_{22}}{H_1}\right)(2r\sigma_2^2)\right]\\&=\frac{1}{H_2}\left(\frac{1+2r\sigma_2^2C_{22}}{H_1}\right)>0\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta_2^*}{\partial p_1}&=\frac{1}{H_1}\left[\left(\frac{C_{12}}{H_1}\right)\left(\frac{-C_{22}}{H_1}-2r\sigma_1^2\right)-\left(\frac{-C_{22}}{H_1}\right)\left(\frac{C_{12}}{H_1}\right)\right]\\&=\frac{1}{H_2}\left[\left(\frac{C_{12}}{H_1}\right)(-2r\sigma_2^2)\right]\end{aligned}$$

p_1 的增加会提高 β_1^*，它对 β_2^* 的影响依赖于 C_{12} 的符号。如果 $C_{12}>0$，两项任务是相互替代

的，那么$\partial\beta_2^* / \partial p_1 < 0$。通过降低对任务 2 的激励，委托人能够引导代理人在任务 1 上花费更多的努力，因为$\partial x_1^* / \partial \beta_2 < 0$。这样，当另一项任务的产出效率变得更高时，降低任务 2 的激励就变得更有吸引力。

15.3　业绩衡量

上面描述的模型都假定了产出是可以测量的，并可以作为奖励投人提供的基础。但是，生产过程中的产出，就像投人一样，常常是多维的并且很难测量。耕作可以收成粮食，但它也影响了土地的肥力并造成工具的折旧。销售为企业带来利润，但它们也可能影响了企业的声誉。当委托人的目标不能在激励合同中直接确定时，必须使用不完全的业绩衡量标准。其他业绩衡量的选择，同给定这些衡量后最优合同的设计一样，也是代理理论的一个中心问题。

令委托人的目标函数是 $B(x,e)$，x 代表代理人的行为，e 是随机因素的集合，表示世界的各种状态。与上述讨论的委托代理模型相比，我们没有给出简单假设：产出对 x，e 是分离可加的。将目标函数写成 $B(x,e)$的形式可以允许考虑 x 的边际产出依赖于 e，这也意味着通常而言最优行为是依赖于对世界状态的认识。

在业绩衡量模型中，委托人的目标是不能在合同中表示的，用业绩指标 $M(x,e)$替代激励合同中的目标。同样，$M(x,e)$不必是分离可加的，这样的设定允许 x 对业绩指标的边际影响依赖于 e，所以代理人执行高成本行动的激励会随着对世界状态的认识而改变。

模型的一个重要假设是关于信息结构的，不像前面部分描述的委托代理模型，我们假定代理人对世界状态的信息了解是不对称的。在签约前，委托人及代理人都不知道状态 e；但当代理人选择行动前，她知道状态 e。因为 x 的边际产出可能依赖 e，委托人不会知道代理人的行为是否最优，即使她的行为是可以观测的。事实上，即使行为 x 是无成本的，也必须提供激励以在合适情形下引导正确的行动。

给定线性的激励报酬结构，代理人的报酬为：

$$a+\beta M(x,e)-C(x)$$

她在观测到 e 后，选择 x 使回报最大。最大化的一阶条件是：

$$\beta M_x(x,e)-C'(x)=0 \tag{15-7}$$

等式定义了投人选择函数 $x=x^*(\beta,e)$，(15-7)式对 β 微分得到：

$$\frac{\partial x^*}{\partial \beta}=\frac{-M_x}{\beta M_{xx}-C''}>0 \tag{15-8}$$

为简化起见，假定委托人和代理人都是风险中性的。在设计合同时，委托人将选择 β，使产出减去给代理人的支付后所得的期望价值最大。问题可表述为：

最大化　　$E[B(x,e)-a-\beta M(x,e)]$

$$E[BM(x,e)+\alpha-C(x)]=u_0$$

使：

$$x=x^*(\beta,e)$$

将两个约束代人目标函数，问题成为：

最大化 $E[B(x^*(\beta,e),e)-C(x^*(\beta,e))-u_0]$

一阶条件为：

$$E\left[(B_x(x^*,e)-C'(x^*))\frac{\partial x^*}{\partial\beta}\right]=0 \tag{15-9}$$

利用等式(15-7)和(15-8)，(15-9)可重新写成：

$$E\left[(B_x-\beta M_x)\frac{-M_x}{\beta M_{xx}-C''}\right]=0$$

如果我们用二阶 Taylor 展开逼近 $M(x,e)$ 和 $C(x)$，那么项 $1/(BM_{xx}-C'')$ 可以提出期望算子，因为它与 e 是独立的。于是，β 的解为：

$$\beta^*=\frac{E[B_xM_x]}{E[M_x^2]}=\frac{E[B_x]E[M_x]+\mathrm{cov}[B_x,M_x]}{E[M_x]^2+\mathrm{var}[M_x]} \tag{15-10}$$

例 1. 假定真实的产出是非随机的，但测量有噪声存在。特别地，可令 $M(x,e)=B(x)+ex$，e 均值为 0，方差为 σ^2。那么 β^* 的公式简化为：

$$\beta^*=\frac{E[B_x]^2}{E[B_x]^2+\sigma^2}<1$$

因为委托人的目标是非随机的，最优的投人水平不应该随着 e 变化，给定不完全的业绩测度，但是，当 e 高时，代理人会增加投人，而当 e 低时，代理人会减少投人。这样的行为是浪费的，而最优合同通过降低激励强度来约束它。

例 2. 假定投人的边际产出随状态变化，但这样的依存关系并不反应在业绩衡量中。特别的，令 $B(x,e)=M(x)+ex$，其中 e 的期望值为 0，那么等式(15-10)意味着 $\beta^*=1$，此时，代理人会选择投人使得平均而言边际产出等于边际成本，但是平均而言选择正确的投人水平意味着 e 较小时 x 太高，而 e 高时 x 太低。尽管并没有系统性的缺少努力的供给，合同仍然无法达到充分有效。

在业绩衡量模型中，充分有效的投人 x 必须满足：

$$B_x(x,e)-C'(x)=0 \tag{15-11}$$

比较式(15-11)和(15-7)，很明显要达到完全有效的结果，要求 $\beta^*M_x=B_x$，对于所有实现的 e 而言。实际上，即使投人是可以观测到的，除非 M_x 和 B_x 完全相关，否则是不可能实现完全的有效产出。进一步注意到代理人在最优合同中的投入水平并不总是低于充分有效的水平。模型非有效性的产生不是因为没有充分的激励使代理人努力工作，而是因为业绩指标不能够与委托人的真实目标完全一致。

选择业绩测度

当有多个业绩指标可供选择时，而且在合同中使用所有指标的成本太高时，设计最优的合同就不仅包括参数 β 的选择，也包括业绩指标的选择。为分析这个问题，一种方法是以充分有效的产出为基准。令 $x^0(e)$ 为没有信息问题时的最优行为，那么利用不完全的业绩测度带来的效率损失为：

$$\begin{aligned}\Delta(e)&=[B(x^0(e)e)-C(x^0(e))]-[B(x^*(\beta^*,e),e)-C(x^*(\beta^*,e))]\\&\approx(x^0-x^*)(B_x-C')+\frac{1}{2}(x^0-x^*)^2(B_{xx}-C'')\end{aligned}\tag{15-12}$$

因在 $x=x^0$ 处 $B_x-C'=0$，等式(15-12)的第一项就没有了。为了进一步简化表达式，我们利用渐近表达式：

$$[B_x(x^0,e)-C'(x^0)]-[B_x(x^*,e)-C'(x^*)]\approx(x^0-x^*)(B_{xx}-C'')$$

从(15-11)式知上式括号中的第一项为 0。由(15-7)式知上式括号中的第二项等于 $B_x-\beta^* M_x$。这样：

$$x^0-x^*=\frac{-(B_x-\beta^* M_x)}{B_{xx}-C''}\tag{15-13}$$

把(15-13)代入(15-12)，并求期望，期望的效率损失为：

$$E[\Delta(e)]=\frac{E[(B_x-\beta^* M_x)^2]}{2(B_{xx}-C'')}=\frac{E[B_x^2]-2\beta^* E[B_xM_x]+\beta^{*2}E[M_x^2]}{2(B_{xx}-C'')}$$

从等式(15-10)知 $\beta^*=E[B_xM_x]/E[M_x^2]$，我们可以从 $E[\Delta(e)]$ 的表达式的分子中消去 $E[B_xM_x]$ 并得到：

$$E[\Delta(e)]=\frac{E[B_x^2]+\mathrm{var}[B_x]-\beta^{*2}(E[M_x]^2+\mathrm{var}[M_x])}{2(B_{xx}-C'')}\tag{15-14}$$

也可以从分子中消去 $E[M_x^2]$ 得到：

$$E[\Delta(e)]=\frac{E[B_x^2]+\mathrm{var}[B_x]-\beta^*(E[B_x]E[M_x]+\mathrm{cov}[B_x,M_x])}{2(B_{xx}-C'')}\tag{15-15}$$

当 $\mathrm{var}[M_x]$ 为常数时，大的 $\mathrm{cov}[B_x,M_x]$ 值使 β^* 上升，从而从(15-14)可知降低了期望损失。若 $\mathrm{cov}[B_x,M_x]$ 为常数，利用式(15-15)知，$\mathrm{var}[M_x]$ 值越高，β^* 越小，从而增加了期望损失。这样，委托人将倾向于选择与他的目标函数高度相关且个体噪声很小的业绩测度。

15.4　高成本监控和效率工资

当投入或产出不可观测时，就可能产生代理问题。但是，可观测性极少是一个要么是全有，要么是全无的事情。通常，观测问题可通过在测量及监控方面的努力而得到改善。除了

通过提供报酬引导代理人正确行动之外，另一选择是直接监控他的行为。两种方法都是昂贵的，委托人的问题是寻找到成本最小的两种方法的结合。

考虑一个雇主，他想引导工作者提供 x 单位的努力。不努力的工人将以概率 π 被发现。合同包括标准工资 w 和惩罚性工资 w_0。如果工人不偷懒或偷懒未被发现，他的补偿为 w。如果偷懒被雇主发现，将被支付 w_0（w_0 可以为负）。对充分低的 w_0，偷懒的期望成本会很高，雇主因此能够使工人提供所需水平的努力，而发现偷懒的概率可以充分趋于 0。这是熟知的强制合同。但是，强制合同并不总是可行的，仅仅是因为有对 w_0 的低限。比如，偷懒带来最大的惩罚就是解雇，对应于 $w_0=0$。即使当工人被发现偷懒时要求赔偿雇主，赔偿额也不能超过工人的财富。

令 $K(\pi)$ 为期望监控成本，我们假定这些成本是 π 的递增函数。假定雇主和工人都是风险中性的。为引致努力水平 x，雇主选择 π，w 和 w_0 使总（工资和监控）成本最小。问题可表示为：

最小化 $$w+K(\pi)$$

使得： $$w-C(x)\geqslant u_0 \tag{15-16}$$

$$w-C(x)\geqslant \pi w_0+(1-\pi)w \tag{15-17}$$

$$w_0\geqslant 0 \tag{15-18}$$

第一个不等式是参与约束，它说明工资减去努力的成本必须至少与工人的保留效用一样大。第二个不等式是激励相容约束。如果工人偷懒提供 0 单位的努力，期望的报酬是 $\pi w_0+(1-\pi)w$，而成本 $C(0)=0$。这一约束说明工人必须更愿意提供 x 单位的努力而不是丝毫不提供，第三个不等式给惩罚工资指定了下限，通常我们为方便起见，设其为 0。

注意到不等式(15-17)可改写成 $\pi(w-w_0)\geqslant C(x)$，我们可以下结论监控概率 π 必须严格为正，进而，标准工资 w 也必须严格大于惩罚工资 w_0。

最小化问题的拉格朗日函数为：

$$\mathscr{L}=w+K(\pi)-\lambda_1(w-C(x)-u_0)-\lambda_2(w-C(x)-\pi w_0-(1-\pi)w)-\lambda_3 w_0$$

w_0 和 π 的一阶条件分别是：

$$\mathscr{L}_w=1-\lambda_1-\lambda_2\pi=0 \tag{15-19}$$

$$\mathscr{L}_{w_0}=\lambda_2\pi-\lambda_3=0 \tag{15-20}$$

$$\mathscr{L}_\pi=K'(\pi)-\lambda_2(w-w_0)=0 \tag{15-21}$$

不等式约束在补充的松弛性下也成立。

从式(15-21)，$\lambda_2=K'/(w-w_0)>0$。所以，激励相容约束(15-17)是紧的，进而，因 $\lambda_2>0$，$\pi>0$，从等式(15-20)说明 $\lambda_3>0$，所以，对惩罚工资数量的限制(15-18)也是紧的，我们有结论：

$$w_0=0$$

和

$$\pi=\frac{C(x)}{w}$$

注意，最优的 w_0 包含了最大可能的惩罚。同样注意，π 和 w 是互相替代的。如果支付更高的工资，需要引致工人提供努力的监控力度就可减弱。

把 $\pi=C(x)/w$ 代入目标函数。雇主的问题就成了在满足(15-6)的约束下，选择 w 使：

$$k(w,x)=w+K(C(x)/w) \tag{15-22}$$

最小。可以证明 $k(w,x)$ 是 w 的凸函数。这样，若在(15-16)约束的边界处 $\partial k/\partial w>0$，那么最优工资为角点解，即：

$$w=u_0+C(x)$$

否则，最优工资由一阶条件：

$$1-K'C/w^2=0 \tag{15-23}$$

确定。在后一情形下，将工资提高至超出保留水平 $u_0+C(x)$ 将是令人满意的，因为根据激励相容约束，提高 w 可以降低 π。只要监控成本充分高，直接工资成本的提高会被监控成本的降低所抵消，而工人的参与约束(15-16)仍是松的。这样的一种工资政策，即雇主给予工人高于保留工资的报酬，就是所谓的效率工资政策。当参与约束在成本最小化的解中仍然松弛时，工人确实愿意选择次优工作，但工资不会下降，因为降低工资必然导致高得多的监控成本。所以效率工资带出了一系列与劳动力市场非出清有关的论题，这是劳动经济学和宏观经济学研究领域的热点课题。

监控成本的存在也可应用于投入的供给方面，令 $k^*(x)$ 为成本最小化问题(15-22)的解，对于雇主而言，投入成本为 $k^*(x)$，收益为 $B(x)$。首先假设参与约束是松的。从(15-22)我们可以用包络定理得到：

$$\frac{\mathrm{d}k^*(x)}{\mathrm{d}x}=C'(x)\frac{K'}{w}$$

注意，一阶条件(15-23)意味着 $K'/w=w/C$。而且，因 $\pi=C/w$，这说明 $K'/w=1/\pi$。因此，$\mathrm{d}k^*(x)/\mathrm{d}x=C'(x)/\pi>C'(x)$。下面考虑参与约束紧时的情形。我们将 $w=u_0+C(x)$ 代入(15-22)的目标函数得到：

$$k^*(x)=u_0+C(x)+K\left(\frac{C(x)}{u_0+C(x)}\right)$$

对 x 求导数，有：

$$\frac{\mathrm{d}k^*(x)}{\mathrm{d}x}=C'(x)+\frac{K'C'u_0}{(u_0+C)^2}$$

显然，上式第二项为正。因此，无论参与约束是否紧，我们有 $\mathrm{d}k^*(x)/\mathrm{d}x>C'(x)$。追求 $B(x)-k^*(x)$ 最大化雇主选择的 x^* 将低于 $B(x)-C(x)$ 最大时的 x。监控成本高不仅是因为它直接消费了资源，还因为它导致了低于充分有效水平的投入选择。

15.5 团队生产

更常见的情况是，生产中通常是由几个投入所有者合作完成的。诊所是由医生和护士一同运作的，律师事务所是由律师和助手组成的。新古典经济学中，是医生雇佣护士还是护士雇佣医生并不重要。但是我们仍然常常发现是生产率更高的工作者（医生，律师）雇佣了生产率低的人（护士，秘书）。是什么决定了这样一种管理相互合作的投入所有者之间的关系的合同呢？

我们用团队生产这个词来指代投入由多个人提供的生产活动。组队生产带来的好处可能来自于专业化，并且我们假设任何合同中的问题都不至于严重到会使每个人重新回到自给自足的状态。团队产出是每位团队成员提供的投入水平的函数。如果 B 是产出，x_1 和 x_2 是二人团队中的投入水平，那么 $B=B(x_1,x_2)$。投入成本是各自产生的，由 $C_1(x_1)$ 和 $C_2(x_2)$ 给出，分别代表个人 1 和个人 2 的成本。我们假设投入是观测不到的，而且不能在合同中商定。

在单个代理人的模型中，如果代理人是风险中性的，或者产出是确定的，给予代理人完全的产出剩余索取权可以达到充分有效。当生产由一个团队完成时，由于产出必须在不同成员间分享，使每个有贡献的代理人都拥有完全的剩余索取权是不可能的。既然代理人只能获得他们对产出贡献的一部分，她们提供投入的激励就没有了。事实上，没有办法可以将整个产出做出完全的分配，使得最终形成的均衡是完全有效的。为说明这一点，用 $s_1(b)$ 和 $s_2(b)$ 代表 1 和 2 在产出中的分享数量。对于各种水平的产出 b，有预算平衡：

$$s_1(b)+s_2(b)=b \tag{15-24}$$

给个人 $i(1,2)$ 的回报是 $s_i[B(x_1,x_2)]-C_i(x_i)$，一阶条件是：

$$s_i'B_i-C_i'=0 \tag{15-25}$$

而另一方面，完全有效意味着：

$$B_i-C_i'=0 \tag{15-26}$$

(15-25)和(15-26)的一致性要求 $s_1'=s_2'=1$，但这与预算平衡矛盾，因为对(15-24)式求微分，有 $s_1'+s_2'=1$。

尽管当投入不能写入合同时不能达到完全有效，偷懒带来的损失仍可以通过选择正确的合同使其最小化。考虑一个线性的分配准则，其中个人 1 可以得到 $\alpha+\beta B(x_1,x_2)$，个人 2 得到 $-\alpha+(1-\beta)B(x_1,x_2)$。每个人都使个人产出减去投入成本后所得的利润最大化。于是，x_1,x_2 的一阶条件是：

$$\begin{aligned}\beta B_1(x_1,x_2)-C_1'(x_1)&=0\\(1-\beta)B_2(x_1,x_2)-C_2'(x_2)&=0\end{aligned} \tag{15-27}$$

这两个等式说明存在双重的道德风险问题。对任一 $0<\beta<1$，每个人都将提供少于使边际

收益等于边际成本的投入。等式(15-27)确定了均衡的投入 x_1^*，x_2^* 是分配参数 β 的函数。在该系统中对 β 微分，得到下式：

$$\begin{pmatrix} \beta B_{11}-C_1'' & \beta B_{12} \\ (1-\beta)B_{12} & (1-\beta)B_{22}-C_2'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial \beta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

令 H 为上述方阵的行列式。那么，因假定 $B(x_1,x_2)$ 为凹：

$$\begin{aligned} H &=[\beta B_{11}-C_1'']\,[(1-\beta)B_{22}-C_2'']-\beta(1-\beta)B_{12}^2 \\ &>[\beta B_{11}]\,[(1-\beta)B_{22}]-\beta(1-\beta)B_{12}^2 \\ &=\beta(1-\beta)(B_{11}B_{22}-B_{12}^2) \\ &>0 \end{aligned}$$

根据克莱姆法则解之有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1^*}{\partial \beta} &= \frac{-B_1((1-\beta)B_{22}-C_2'')-\beta B_2 B_{12}}{H} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial \beta} &= \frac{B_2(\beta B_{11}-C_1'')+(1-\beta)B_1 B_{12}}{H} \end{aligned} \tag{15-28}$$

当 $B_{12}\leqslant 0$，比较静态结果是清楚的。在这种情况下，从(15-28)式可以推出 $\partial x_1^*/\partial\beta>0$，$\partial x_2^*/\partial\beta<0$。即增加给予个人 1 的产出享有比例会增加个人 1 的投入供给，但降低个人 2 的投入。在两个团队成员的偷懒之间存在一定的权衡。

最优的分配法则应该通过权衡一个成员偷懒的成本和另一个成员偷懒的成本使得产出的净价值最大，令：

$$V(\beta)=B(x_1^*(\beta),x_2^*(\beta))-C_1(x_1^*(\beta))-C_2(x_2^*(\beta))$$

那么最优分享的条件应满足：

$$(B_1-C_1')\frac{\partial x_1^*}{\partial \beta}+(B_2-C_2')\frac{\partial x_2^*}{\partial \beta}=0 \tag{15-29}$$

(15-29)中的第一项可以解释为提高 β 的边际收益。高的 β 会提高 x_1^*。因为 x_1^* 低于完全有效的水平(即 $B_1-C_1'>0$)，高一些的 x_1 会提高效率。(15-29)中的第二项是提高 β 的边际成本，因为高的 β 会降低 x_2^*，从而导致低效率。

利用等式(15-27)和(15-28)，(15-29)可以改写成：

$$\frac{1}{H}[-(1-\beta)B_1^2((1-\beta)B_{22}-C_2'')+\beta B_2^2(\beta B_{11}-C_1'')]=0 \tag{15-30}$$

为导出比较静态结果，假定 $B(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)+p_1x_1$，并考虑 p_1 增加的效应。等式(15-30)定义了 $\beta=\beta^*(p_1)$，对 p_1 微分，我们得到：

$$V''(\beta)\frac{\partial \beta^*}{\partial p_1}+\frac{1}{H}[-2B_1(1-\beta)((1-\beta)B_{22}-C_2'')]=0$$

因为由 β 的二阶条件知 $V''(\beta)<0$，由 x_2 的二阶条件知 $(1-\beta)B_{22}-C_2''>0$，我们有 $\partial\beta^*/\partial p_1>0$。对此可以直观地进行解释。当 x_1 的边际产出增加时，个人 1 偷懒的成本相比个人 2

偷懒更高。所以，最优合同会分配给个人 1 更大的产出边际份额，以给予他更大的激励，而另一成员得到较少的边际分配比例。这个模型预测，在一个团队中，生产效率相对较低的（边际生产率较低的）成员将面对相对固定的收入。代理人的收入与生产的联系较少；团队产出的价值变化大部分来自团队员生产效率更高的成员。这样，给生产率低的成员的收入结构就类似于雇员的收入结构，而给效率高的成员的收入结构就类似于剩余索取权的收入结构。

15.6 不完全合同

生产关系通常是十分复杂的。合作投入包括了大量难以测度的属性。投入所有者可能采取的行动范围也是难以想象的。而且，不同的状态要求采取不同的行为。如果要在合同中事先规定在每种可能状态下人们如何行动，订立合同的成本将昂贵的让人不敢问津。基于这些理由，合同中就有许多空子和不明确之处。当合同不完全时，所有权会起作用。资产的所有者能确定如何处置资产，只要它不与习惯或法律相抵触。部分控制权可以通过合同转移到另一方。但当合同中未声明时，所有者仍然保留剩余控制权。因此，所有关系是一种权力，它可以增强谈判力量，因此增加了在特定资产的投资激励。Sanford Grossman，Oliver Hart 和 John Moore[2] 基于这些想法发展了产权理论。

考察一模型，其中有两个人，1 和 2，使用资产 A 合作生产。事前，每个人都在关系特定的人力资本上进行投资。事后，每个人决定是否合作。但是，由于不确定性和合同的不完全性，合作的形式（比如他们如何利用资产、转移支付的数量等）也不能在作投资决策时事先确定。这样，当不确定性消除之后，双方必须重新协商。用 x,y 代表个人 1 和 2 的人力资本投资水平，并用 $B_1(x)$，$B_2(y)$ 代表两人合作时的个人收益（在转移支付之前）。如果合作中止，实物资产的所有者将单独决定如何处理这些资产。因此，每个人的净回报将依赖于谁拥有资产 A。当没有合作时，令 $b_1(x;O)$ 为给个人 1 的支付，如果他拥有资产 A。令 $b_1(x;N)$ 为没有所有权时的净收入。同样可定义 $b_2(y;O)$ 和 $b_2(y;N)$，我们假定资产 A 和人力资本是互补的，所以在生产关系中资产（人力或其他）越多，人力资本投资的边际回报越大。举例而言，当 x 和 A 共同使用时，x 的边际产出高于 x 单独使用时的边际产出。而且当 x 和 A，y 共同使用时，x 的边际产出更高。换句话说，对 $i=1,2$ 有：

$$\frac{\partial B_i(x)}{\partial x}\geqslant\frac{\partial b_i(x;O)}{\partial x}\geqslant\frac{\partial b_i(x;N)}{\partial x} \tag{15-31}$$

且假定所有的收益函数都为凹。

2 参见 Sanford Grossman and Oliver Hart, "The Costs and Benefits of Ownership: A Theory of Vertica and Lateral Integration", *Journal of Political Economy*, 94:691-719, 1986; Oliver Hart and John Moore, "Property Rights and the Nature of the Firm", *Journal of Political Economy*, 98:1119-1158, 1990; and Oliver Hard, *Firms, Contracts, and Financial Structure*, Oxford University Press, New York, 1995。

因为人力资本投资是关系特定的，存在合作时它们比没有合作时更有价值。我们假设事后的协商是有效的，所以合作总会接连发生。虽然如此，所有权仍然重要。因为它影响到合作剩余的分割。假设个人 1 拥有资产，那么给予 1 和 2 的默认回报是 $b_1(x;O)$ 和 $b_2(y;N)$。合作剩余由下式给出：

$$S=B_1(x)+B_2(y)-b_1(x;O)-b_2(y;N)$$

如何在合作双方间分割剩余是谈判理论的研究课题。在 20 世纪 50 年代早期，数学家 John Nash 提出了一个巧妙的解答。在一定的公理条件下，Nash 证明了合作剩余将在合作双方间平等分配。[3] 这个结果就是 Nash 谈判解。后来 Nash 谈判解在不同方向得到了改进，不过他的基本结果今日仍在广泛应用。[4]

如果我们采纳 Nash 谈判解作为谈判过程的成果，合作剩余将在个人 1，2 间平等分割。每个人最终的报酬等于他的默认回报（即合作中止将产生的回报）加上合作带来收益的一半，0.5S。当实物资产归个人 1 所有时，令 $U_1(O)$ 为给个人 1 的回报，$U_2(N)$ 为给个人 2 的最终回报。那么：

$$\begin{aligned}U_1(O)&=b_1(x;O)+0.5[B_1(x)+B_2(y)-b_1(x;O)-b_2(y;N)]\\&=0.5[B_1(x)+B_2(y)+b_1(x;O)-b_2(y;N)]\end{aligned}\tag{15-32}$$

$$\begin{aligned}U_2(N)&=b_2(y;N)+0.5[B_1(x)+B_2(y)-b_1(x;O)-b_2(y;N)]\\&=0.5[B_1(x)+B_2(y)-b_1(x;O)+b_2(y;N)]\end{aligned}\tag{15-33}$$

同样，当个人 2 拥有资产时，回报分别是：

$$U_1(N)=0.5[B_1(x)+B_2(y)+b_1(x;N)-b_2(y;O)]$$

$$U_2(O)=0.5[B_1(x)+B_2(y)-b_1(x;N)+b_2(y;O)]$$

选择投资水平，使得每个人各自的回报减去投资成本后所得的利润最大。令 x_1 和 y_1 分别为当个人 1 拥有资产时使每个人的净回报最大的投资水平。即 x_1 使 $U_1(O)-x$ 最大，y_1 使 $U_2(N)-y$ 最大，其中 $U_1(O)$ 和 $U_2(N)$ 由等式(15-32)和(15-33)给出，这些投资水平满足一阶条件：

$$0.5\left[\frac{\partial B_1(x_1)}{\partial x}+\frac{\partial b_1(x_1;O)}{\partial x}\right]-1=0$$

$$0.5\left[\frac{\partial B_2(y_1)}{\partial y}+\frac{\partial b_2(y_1;N)}{\partial y}\right]-1=0$$

相似的，如果 x_2，y_2 是当个人 2 为资产所有人时使净回报最大化的投资水平，它们满足：

3　这些公理的正式陈述和证明超出了本书的范畴，参见 John Nash, "Two-Person Cooperative Games", *Econometrica*, 21:286-295, 1953; or chap 2. of Martin Osborne and Ariel Rubinstein, *Bargaining and Markets*, Academic Press, San Diego, 1990。

4　John Nash 的基本结论可以推广到非对称的纳什谈判解。在非对称解中，一方得到剩余的 α，另一方得到剩余的 $1-\alpha$，其中，α 是谈判模型的一个固定参数。如果我们用非对称纳什谈判解来模拟剩余的分配，模型的定性结论不会受到影响。

$$0.5\left[\frac{\partial B_1(x_2)}{\partial x}+\frac{\partial b_1(x_2;N)}{\partial x}\right]-1=0$$

$$0.5\left[\frac{\partial B_2(y_2)}{\partial y}+\frac{\partial b_2(y_2;O)}{\partial y}\right]-1=0$$

相比之下，完全有效的投资水平将满足$\partial B_1(x^0)/\partial x-1=0$和$\partial B_2(y^0)/\partial y-1=0$，利用(15-31)式中所作的假定，这些条件意味着：

$$x^0\geqslant x_1\geqslant x_2$$

$$y^0\geqslant y_2\geqslant y_1$$

可以看出在任一种所有关系结构中，都存在投资不足的问题。人力资本投资成本是沉没成本。一旦关系特定的投资实施后，他们处于合作关系之外将不如在合作关系之内有价值。在谈判解中，部分剩余将被另一方占有。结果是，投资于特定的人力资本的激励消失了。

也可以观察到，对于非互补的实物资产的所有者，人力资本的投资不足更为严重。有实物资产比起没有实物资产，人力资本投资变得更有价值。这样，没有实物资产的个人将在谈判中处于弱势地位，并且容易在剩余分配中受到伤害。如果个人1拥有资产，那么比起个人1而言，个人2的投资不足问题更重要。反之亦然。

影响所有权结构的因素

最优的所有权结构将使次优投资导致的总损失最小。我们考虑在其他所有权结构下影响损失相对规模的一些参数。

假设$B_2(y)=\theta f(y)+(1-\theta)y$，$b_2(y;O)=\theta g(y;O)+(1-\theta)y$，$b_2(y;N)=\theta g(y;N)+(1-\theta)y$。如果参数$\theta>0$很小，我们说个人2的投资是没有生产能力的。[5] 在这个例子中，最优投资水平y^0将使$B_2(y)-y=\theta(f(y)-y)$最大。这样y^0就独立于θ。如果个人1拥有资产，个人2选择投资水平y_1，使净回报$U_2(N)-y$最大。在等式(15-33)中代入相关的函数，我们有

$$\begin{aligned}U_2(N)-y&=0.5[\theta f(y)+(1-\theta)y+\theta g(y;N)+(1-\theta)y+B_1(x)-b_1(x;O)]-y\\&=0.5[\theta(f(y)+g(y;N)-2y)+B_1(x)-b_1(x;O)]\end{aligned}$$

y的最优选择的一阶条件中没有包括θ。这样y_1就独立于θ。同样的，如果个人2拥有资产，个人2选择投资水平y_2，最大化：

$$U_2(O)-y=0.5[\theta(f(y)+g(y;O)-2y)+B_1(x)-b_1(x;N)]$$

这一投资水平y_2也独立于θ。尽管投资水平独立于θ，投资不足导致的成本却并非如此。当个人$i(i=1,2)$拥有资产时，在y上投资不足的损失是：

$$[\theta f(y^0)+(1-\theta)y^0-y^0]-[\theta f(y_i)+(1-\theta)y_i-y_i]=\theta[(f(y^0)-y^0)-(f(y_i)-y_i)]$$

5 投资的净回报$B_2(y)-y=\theta(f(y)-y)$对θ是递增的。因此，θ的很小取值意味着投资没有生产能力。

随着 θ 的下降，损失也下降。随着个人 2 的投资变得越来越没有生产能力（θ 趋于 0），在 y 上投资不足形成的损失也变得毫不重要。另一面，x 上的投资不足的损失保持不变。故由个人 1 拥有资产为最优。将资产所有权分配给更有生产力的个人（个人 1）必然会带来因没有生产力的人力资本 y 投资不足的少量成本，但它使更有生产能力的人力资本 x 的投资不足造成的成本最小。

其他影响所有权结构的因素是来自关系特定的投资的可分配剩余的数量。要模拟该因素，令 $b_1(x;N)=b_1(x;O)-ax$，参数 a 可解释为人力资本专业化（对实物资产而言）的程度。大的 a 值暗示：如果人力资本不与资产 A 共同使用，就会变得更没有生产力。为观察这个参数如何影响最优的所有权模式，令 $w_2=B_1(x_2)+B_2(y_2)-x_2-y_2$ 为个人 2 拥有资产 A 时合作的净价值。那么因为 $B_1'(x_2)-1>0$ 和 $\partial X_2/\partial a<0$，

$$\frac{\partial W_2}{\partial a}=[B_1'(x_2)-1]\frac{\partial X_2}{\partial a}<0$$

而另一方面，如果个人 1 拥有资产，那么 $\partial W_1/\partial a=0$，因为 x_1 和 y_1 都不受 a 影响。于是有 $\partial(W_1-W_2)/\partial a>0$。若 a 较大而个人 1 不拥有实物资产，他就变得更易受剩余分配的伤害，而他投资人力资本的激励也会降低。所以高的 a 值趋向于支持由个人 1 拥有实物资产以缓和投资不足的问题。

最后，令 $b_1(x;N)=f(x)$，$b_1(x;O)=f(x)+ax$，$B(x)=f(x)+ax+px$。$f(x)$ 保持不变，p 的增加对应于个人 1 在合作关系内投资有更高的边际生产能力。将 $\partial b_1(x_i;N)/\partial x=f'$，$\partial b_1(x_i;O)/\partial x=f'+a$，$\partial B_1(x)/\partial x=f'+a+p$，代入 x_1，x_2 的一阶条件，并对 p 进行微分，我们有：

$$\frac{\partial p_i}{\partial p}=\frac{0.5}{-f''(x_i)}\quad i=1,2$$

对 $f(x)$ 取二阶泰勒展开；二阶导数 f'' 将独立于 x，所以 $\partial x_1/\partial p\approx\partial x_2/\partial p$，令 w_i 代表当个人 $i(i=1,2)$ 拥有实物资产时合作的净价值，那么：

$$\frac{\partial W_i}{\partial p}=x_i+[B_1'(x_i)-1]\frac{\partial x_i}{\partial p}$$

这样：

$$\begin{aligned}\frac{\partial(W_1-W_2)}{\partial p}&\approx(x_1-x_2)+[B_1'(x_1)-B_1'(x_2)]\frac{\partial x_1}{\partial p}\\&\approx(x_1-x_2)-f''(x_1-x_2)\frac{0.5}{f''}\\&=0.5(x_1-x_2)>0\end{aligned}$$

投资水平愈高，人力资本生产能力的提高就越有价值。因为将实物资产的所有权给予个人 1 将鼓励他更多的投资人力资本，有助于从生产力水平增长中达到收益最大化。这样，如果个人 1 相对个人 2 的人力资本投资的生产能力上升了，相比其他所有权模式，由个人 1 拥有

实物资产要更有利。这就补充了我们前面的结论：如果个人 2 的投资缺乏生产力，个人 2 的所有权就不会吸引人。

习题

1. 在本章讨论的委托代理模型中，利用式(15-4)，证明：$\partial\beta^*/\partial r<0$，$\partial\beta^*/\partial\sigma^2<0$。
2. 在业绩衡量模型中，假定代理人的行动 x 和业绩指标 $M(x,e)$ 能直接观测。令代理人的回报为 $\alpha+\beta M(x,e)+rx$，试导出 β,r 的最优值。委托人总能够引导出完全有效的结果吗？
3. 监控成本函数可以表示为 $K(\pi)=f(\pi)+k\pi$，并假定参与约束是不紧的。证明由雇主支付的最优工资随监控成本的上升而上升，即证明 $\partial w^*/\partial k>0$。
4. 在组队生产最优分配法则的模型中，个人 1 的成本函数用 $C_1(x_1)=Cx_1^2$ 来表示。证明给个人 1 的产出分配(即 β^*)随 C 的上升而下降，并解释你的结果。
5. 考虑下面一个有监控的雇员工作模型。工作努力度由范围在 0,1 之间的指数 e 进行测度：0 值说明完全偷懒，而 1 对应于充分有效率的工作。工人的 Von Neumann-Morgenstern 效用函数具有可加形式 $u(c,e)=f(c)-g(e)$，其中，c 为消费。$f'(c)>0$，$f''(c)<0$，$g'(e)>0$，$g''(e)>0$。消费等于个人工作的收入。如果雇员的工作没有经过监管员的检查，假定雇员以最高强度工作，工资为 w。如果工作要经过检查，e 就显示于监管人员的面前，工人所得为 ew，工人被检查的概率为 π。这个概率独立于工人本人的行为。

   (a) 建立工人的最优化问题，并确定工作的最佳努力水平。

   (b) 检查概率上升会提升工作的努力程度吗？高工资会使工作更努力吗？

   (c) 已有的假定排除了风险喜好行为吗？风险喜好行为将如何影响(b)问中的定性答案？解释其中的原因。

部分参考文献

Baker, George p.: "Inventive Contracts and Performance Measurement", Journal of Political Economy, 100:598-614, 1992.

Eaton, Curtis, and William D. White: "The Economy of High Wages: An Agency Problem", Economica, 50:175-181, 1983.

Grossman, Sanford, and Oliver Hart: "The Costs and Benefits of Ownership: A Theory of Vertical and Lateral Integration", Journal of Political Economy, 94:691-719, 1986.

Hart, Oliver: Firms, Contracts, and Financial Structure, Oxford University Press, New York, 1995.

_____, and John Moore: "Property Rights and the Nature of the Firm", Journal of Political Economy, 98:1119-1158, 1990.

Holmstrom, Bengt: "Moral Hazard and Observability", Bell Journal of Economics, 10:74-91, 1979.

_____: "Moral Hazard in Teams", Bell Journal of Economics, 13:324-340, 1982.

_____, and Paul Milgrom: "Multitask Principal-Agent Analysis: Incentive Contracts, Asset Ownership, and Job Design", Journal of Law, Economics, and Organization, 7:24-52.1991.

John: "Two-Person Cooperative Games", Econometrica, 21:286-295, 1953.

Osborne, Martin, and Ariel Rubinstein: Bargaining and Markets, Academic Press, San Diego, 1990.

第 16 章　不完全信息下的市场

16.1　制定决策时信息的价值

人们为什么需要信息。对一些人来说，知识的终极目标是知识本身。人们可以把知识看成为一种商品而引入效用函数。但寻求信息的目的更多的是因为其工具性价值。研究中发现的新信息可能会改变生产函数；上市公司的内幕消息可以带来投机收益；而关于不确定环境的更好的信息通常能帮助人们制定更好的决策。因为信息是有价值的，人们就愿意花费资源来得到它。但因为获得信息是有成本的，信息仍然是不完全的。信息的产生和利用、对付不完全信息的策略以及它们在市场运作中的应用是本章的主题。

考虑一种最简单的情况，一个人的目标函数为 $f(x,\alpha)$。假定他不知道参数 x 的值，那么风险中性的人会选择 x 使 $E[f(x,\alpha)]$最大。将 x 的最优选择记为 $\bar{x}$，它依赖于 α 的概率分布，而不是未知的 α 值本身。

如果个人能够买到关于 α 真实值的信息服务或能够自行投资以获取信息，他会在知道 α 后再选择 x。因此，这个人将选择 x 使 $f(x,\alpha)$ 最大，并用它来替代最大化目标函数的期望值。最优的选择函数 $x=x^*(\alpha)$通常会依赖参数值 α。通过最优选择函数的定义，我们必然有 $f(x^*(\alpha),\alpha)\geqslant f(\bar{x},\alpha)$。换言之，拥有关于参数真实值的信息会增加目标函数的最大值。当然，确切收益的大小依赖于 α 的真实值，这是个人事先未知的。尽管如此，因为个人知道 α 的分布，收益的期望值是可以计算的。如果有信息服务传达关于 α 的精确信息，人们最多愿意为解决 α 的不确定而支付的数量为：

$$E[f(x^*(\alpha),\alpha)-f(\bar{x},\alpha)]$$

这个数量总是非负的，因为 $f(x^*(\alpha),\alpha)-f(\bar{x},\alpha)$对于所有 α 都非负。

在包括不止一个决策制定者的环境中，对有关不完全信息论题的分析是相当复杂的。不仅获取信息有成本，不对称信息的情形也会出现。这是有些人知道一些事而另外的人不知道的情形。比方说，在具有不完全业绩衡量的委托代理模型中，代理人知道环境的一些状况，而委托人无法直接观察到。前一章讨论了人们如何设计最优合同使得产生自不完全信息的激励问题最小。而在本章，我们讨论对其他类型的不完全信息或不对称信息情况的行为和市场反应。

16.2　搜寻模型

在信息无成本的世界里，一价定律成立：如果一个企业的售价高于其他企业，它将无法找到顾客来出售其产品。然而信息并不是白给的，寻找最低的价格需要时间和费用。因为有些买者可能希望获取价格信息的成本最经济，所以，售价高于市场最低价的企业不会失去所有的顾客。实际上，即使在同质商品的市场上，价格散乱也是很普遍的。在一篇开创性的论文中，George Stigler[1] 研究了面对各种各样的卖价时买主的搜寻行为，以及工人面对各种工资水平时的搜寻行为。他的分析为此后模型的进一步精细化和扩展成一类称为搜寻理论的模型作了准备。搜寻理论在产业组织理论、劳动经济学和宏观经济学中也有很多的应用。

Stigler 把搜寻问题明确地表述为最优样本规模的选择。通过查看更多的报价来扩大样本规模是需要成本的，但也会提高发现好东西的可能性。考察一个市场，出售人的报价为非退化的分布。令 $F(p)$ 代表报价的累积概率函数，$f(p)$ 代表概率密度函数。购买者知道价格的分布，但他在搜寻前不知道哪个卖方出多少价。如果他调查了 n 个出售者，那么他也就仅知道这几个人的报价。当然，他可以在这几个卖主里选择价钱最低的进行购买。调查一个卖主的成本为 c 美元。买主是风险中性的，他打算购买 β 单位商品。

买方会选择样本规模 n 使期望成本最小：

最小化　　$$\beta E[P_{\min}(n)]+cn$$

其中 $P_{\min}(n)$ 是 n 个样本报价 $P_1,\cdots,P_n$ 中的最低价。为分析这个问题，必须导出 $P_{\min}(n)$ 的分布。令 $P_{\min}(n)$ 的累积分布函数和密度函数分别为 $G(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$，那么：

$$\begin{aligned}G(p)&=1-\Pr[P_{\min}(n)>p]\\&=1-\Pr[P_1>p,\cdots,P_n>p]=1-[1-F(p)]^n\end{aligned}$$

利用分部积分公式，$P_{\min}(n)$ 的期望为：

$$\begin{aligned}E[P_{\min}(n)]&=\int_0^\infty pg(p)\mathrm{d}p=-p[1-G(p)]\Big|_0^\infty+\int_0^\infty[1-G(p)]\mathrm{d}p\\&=\int_0^\infty[1-G(p)]\mathrm{d}p\\&=\int_0^\infty[1-F(p)]^n\mathrm{d}p\end{aligned}$$

因此把样本规模从 $n-1$ 增加到 n 的边际收益是：

$$\beta E[P_{\min}(n-1)]-\beta E[P_{\min}(n)]=\beta\int_0^\infty\{[1-F(p)]^{n-1}-[1-F(p)]^n\}\mathrm{d}p;$$

1　George Stigler, "The Economics of Information," *Journal of Political Economy*, 69: 213-225, June 1961, and "Information in the Labor Market," *Journal of Political Economy*, 70: 94-105, October 1962.

$$= \beta\int_0^{x} F(p)[1-F(p)]^{n-1}\mathrm{d}p$$

注意，搜寻的边际收益为正，且随 n 递减；而搜寻的边际成本为常数，且等于 C。因此，购买人会选择最优样本规模 n^* 使得：

$$\beta\int_0^{\infty} F(p)[1-F(p)]^{n^*-1}\mathrm{d}p \geqslant c \geqslant \beta\int_0^{\infty} F(p)[1-F(p)]^{n^*}\mathrm{d}p$$

第一个不等式说明搜寻第 n^* 个卖主的边际收益要超过边际成本。因此搜寻 n^* 个卖主要优于搜寻 (n^*-1) 个卖主。第二个不等式说明搜寻第 (n^*+1) 个卖主的边际收益要少于边际成本，因此买主不会将规模从 n^* 扩大到 n^*+1。当所有的不等式都满足时，买主就不会从偏离最佳样本规模 n^* 中得到任何好处。

比较静态结果是很容易得到的。首先，搜寻成本 (c) 的上升降低了 n^*。第二，购买数量 (β) 的增加也增加了 n^*。后一结果反映了信息的一个重要性质：信息的好处会随着使用强度的增加而增加，但成本不会。经常购买的人从价格信息中得到的收益会高于不经常购买的人。比如，游人更趋于达成不好的交易，这不仅因为他们搜寻的成本较高，而且因为他们搜寻的激励相对较小。

顺序搜寻

上面的分析假定人们遵循一个特定的搜寻法则——他们在确定搜寻之前决定了报价的搜集数目，而后他们将不断的取样直到满足这个数为止。尽管直观上固定样本规模的准则是有些吸引人的，但它在搜寻过程中没有最优的利用收集到的信息。比如说，一个购买者很幸运的在他访问的第一个卖主那儿得到了最低可能的报价，那么他显然就没有必要继续搜下去了，不管他原来打算的样本数有多少。作为另一个例子，考虑另一个买主，他从所调查的几位卖主那里得到了可能的最高报价。根据固定样本量法则，如果 n 是预定的最优样本规模，他应该停止搜寻。但是，如果他坚信他对于报价分布的估计是真实的，那么收到 n 个高报价后继续搜寻的激励和收到报价之前搜寻的激励是完全一样的。总之，已经发生的搜寻成本是沉没的。买主应当继续搜集更多的报价。

为了充分利用搜寻过程中得到的信息，买主应采取一种顺序式的策略：每收到一个报价，买主便应当评价是应当继续，还是应当停止搜索来接受报价。假设他得到的报价是 x，并设从另一个搜索的期望所得为 $H(x)$。如果他寻求另一个报价时得到的报价 p 大于 x，那么他什么也没有得到。但若报价 p 低于 x，他可以得到 $\beta(x-p)$，所以期望所得是：

$$H(x) = \beta\int_0^{x}(x-p)f(p)\mathrm{d}p = \beta\int_0^{x}F(p)\mathrm{d}p \qquad (16\text{-}1)$$

其中第二个等式是由分部积分得到的。因为 $H'(x)=\beta F(x)>0$，得到的现有报价越低，进一步搜寻的期望所得越小。当现有的报价充分低时，进一步搜寻的期望收益会低于搜寻成本。最优的策略因此具有一个保留价格性质。如果报价高于某一保留价格 p^*，那么继续搜

寻；否则就停止。这个保留价格可由下面的条件定义：

$$\beta\int_0^{p^*} F(P)\mathrm{d}p = c \tag{16-2}$$

等式(16-2)隐含定义了保留价格是参数 c 和 β 的函数，将等式两边对 c 微分，我们得到：

$$\frac{\partial p^*}{\partial c}=\frac{1}{\beta F(P^*)}>0$$

有高搜寻成本的购买者设定的保留价格会高一些。比起搜寻成本低的人，他更易接受卖主的报价。同样，参数 β 的比较静态也可以得到：

$$\frac{\partial p^*}{\partial \beta}=\frac{-\int_0^{p^*} F(p)\mathrm{d}p}{\beta F(p^*)}<0$$

因此，经常购买的人或大量购买的人愿意设定更严格(即更低)的保留价格。

保留价格也依赖于分布函数 F，在第 13 章里我们介绍了风险增加的概念。假定报价 p 由 p^+ 代替，$p^+=p+e$，其中 e 是随机噪声，其条件期望等于 0。显然，p^+ 的分布要比 p 更有风险或更分散。变量 p^+ 称为 p 的保持均值延展，我们在 13 章中证明了对所有凸函数 $u(\cdot)$，都有 $E[u(p^+)]\geqslant E[u(P)]$。现在令 α 为一参数，代表价格分布的一个保持均值延展。因为保留价格由条件 $H(p^*)=c$ 表征，对 α 微分有：

$$H'(p^*)\frac{\partial p^*}{\partial \alpha}+\frac{\partial H(p^*)}{\partial \alpha}=0 \tag{16-3}$$

由等式(16-3)我们看到 $H(p^*)=\beta E[\max\{p^*-p,0\}]$，函数 $\max\{p^*-p,0\}$ 是 p 的凸函数(见图 16-1)。因此，由 13 章的结果及 $\partial H(p^*)/\partial\alpha>0$，$H'(p^*)$ 也为正。(16-3)式说明 $\partial p^*/\partial\alpha<0$。如果买者得到了一个高的报价，他总是有继续搜寻的权力。因为发现高的报价并不花费成本(他不必以高价购买)而发现低的报价总是有益的，所以价格分布越分散(提高了寻找很高和很低报价的概率)，就越能提高搜寻得到的期望收益。买主因此会通过设定较低的保留价格，进行强度更高的搜寻。

尽管在顺序搜寻模型中选择的变量是保留价格而不是样本数，仍然可以直接导出在顺序搜寻模型中的期望样本规模。在每一次搜寻中，成功找到满意价格的概率是 $F(p^*)$。因此，需要发现低于保留价格的期望努力次数是 $E[n]=1/F(p^*)$。因 $\partial E[n]/\partial p^*<0$，对期望样本规模的比较静态结果仅仅与对保留价格的比较静态结果相差一个符号。注意，如果买主被限于每一期只能搜寻一次的话，期望样本规模也可以解释为期望的搜寻持续期。因此，搜寻成本上升会缩短搜寻持续期，而购买数量的增加或价格分布的分散度增强都会增加持续时间。

均衡价格分散

搜寻模型是局部均衡的模型。它在给定价格分布的情况下，分析缺乏充分信息时购买

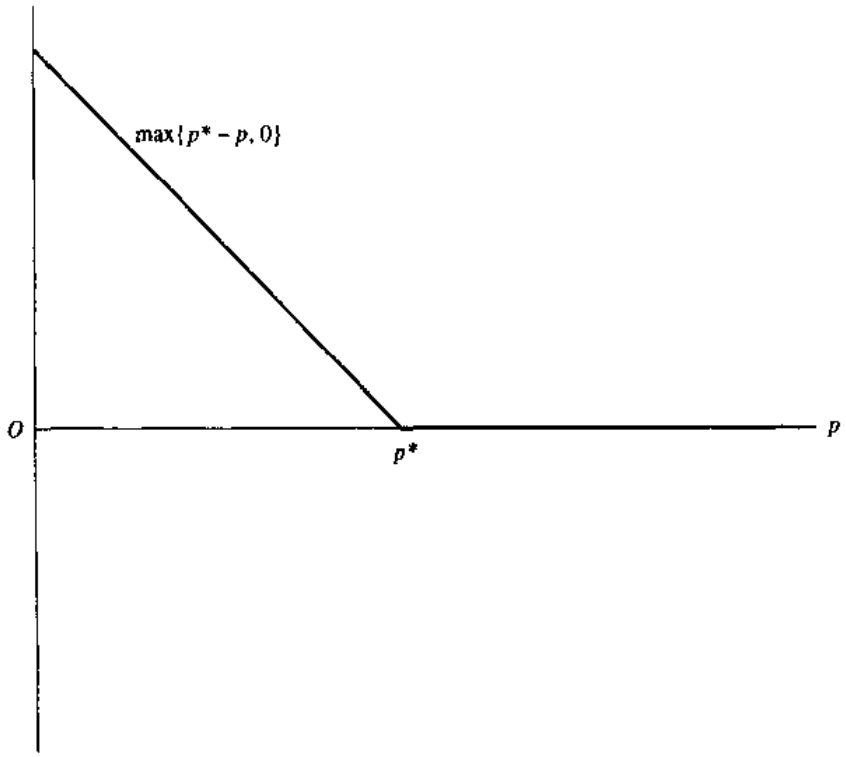

图 16-1 搜索收益的凸性 如果 p 小于 p^* 则获得报价 p 的收益是 p^*-p，而获得高于 p^* 的报价的收益为 0，因为买主会忽略这更高的价格而再一次搜索。结果就是收益函数在 p 上是凸的。

者的最优反应。然而，购买者的搜寻行为会影响不同价格下的均衡出售量。举例而言，我们证明了更分散的价格分布会导致更积极的搜寻。但是当搜寻变得更积极时，报价很高的出售者可能面对一个很低的需求，以致无法生存。是什么决定了均衡价格分散的程度？一般均衡分析需要把购买者的搜寻行为和出售者报不同价格的激励放在一起研究。许多这样的模型相当复杂，这里我们研究 Salop 和 Stiglitz[2] 建立的相对简单的模型，以说明一个非退化的价格分散化确实可以在均衡中实现。

考虑一个市场，其中消费者愿意购买一个商品，只要其价格不超过 $\bar{p}$。消费者知道市场上价格的分布。为代替固定样本规模法则或顺序搜寻法则，我们给定一个非常简单的搜寻方法。消费者可以花费成本 c 得到信息，从而能以最低价买到商品。这可以解释为购买和阅读载有所有卖者报价的报纸的成本。另一选择是，消费者可以随机的选择一个商品购买。不同的消费者具有不同的搜寻成本。c 的累积分布可用 $G(c)$ 进行描述。

2 Steven Salop 和 Joseph Stiglitz, "Bargains and Ripoffs: A Model of Monopolistic Competitive Price Dispersion," *Review of Economic Studies*, 44: 493-510, 1977。

企业是风险中性的。进入产业是没有障碍的，企业使用同样的技术。这种技术用一个 U 形的平均成本函数 $A(q)$ 表示。令 q^0 为使平均成本最小时的产出水平，并令 $\underline{p}=A(q^0)$。只要有一些消费者选择获取信息，市场的最低价格就必须等于 $\underline{p}$。否则，企业可以通过提供给消费者价格信息以及更低的价格进入，并有可能获得利润。价格高于竞争价格 $\underline{p}$ 的企业将只能为没有价格信息的消费者提供商品。因为没有信息的消费者随机选择，所有价格高于 $\underline{p}$ 的企业将服务于同样期望数量的消费者。这些高价企业通过收取最高价格 $\underline{p}$ 使利润最大化。在均衡中，因此在市场上只有两种价格，$\underline{p}$ 和 $\overline{p}$。由 0 利润条件，低价企业会卖出 q^0 单位，而高价企业会卖掉 q' 单位，其中 $p=A(q')$，见图 16-2。

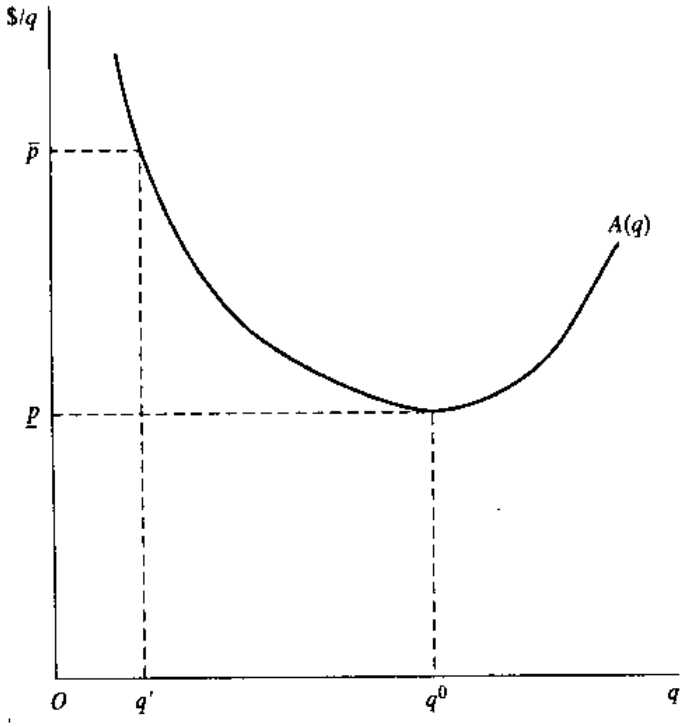

图 16-2　两价格均衡　低价策略企业的定价为 $\underline{p}$，卖出 q^0 单位。高价策略企业定价为 $\overline{p}$，卖出 q' 单位。两类企业的利润都为 0。

市场上有两种可能价格时，令 x 为低价格企业的比例，考虑消费者的搜寻决策。不愿获取信息的消费者为商品付出的期望价格为 $x\underline{p}+(1-x)p$，得到完全信息的消费者的支付价为最低价 $\underline{p}$。当 $\underline{p}+c\leqslant xp+(1-x)\overline{p}$ 时，搜寻有价值。令 k 为使消费者在获得或不获得信息时无差别的搜寻成本。即：

$$k=(1-x)(\overline{p}-\underline{p}) \tag{16-4}$$

所有搜寻成本 $c\leqslant k$ 的消费者会选择获取价格信息，而搜寻成本 $c>k$ 的消费者仍然不知道价格信息。比起临界搜寻成本 k 来，对获取信息消费者的比例 $G(k)$ 讨论问题更为直观。因此，我们令 $y=G(k)$，并将式(16-4)转换成：

$$y=G((1-x)(\bar{p}-\underline{p})) \tag{16-5}$$

在均衡时，占比例 y 的消费者是完全有信息的。他们仅从低价企业购买。剩下的$(1-y)$部分，消费者是没有信息的，他们随机选择企业购买。因为有比例 x 的企业是低价的，无信息的消费者会以概率 x 到低价企业购买，而以$(1-x)$的概率在高价企业购买。在低价企业购买和在高价企业购买之间的比例是：

$$\frac{y+x(1-y)}{(1-x)(1-y)}$$

另一方面，低价企业的总产出对高价企业的总产出的比例是：

$$\frac{xq^0}{(1-x)q'}$$

均衡时，两个比例必须相等。进行一些简化后，我们得到：

$$x=\frac{y/(1-y)}{q^0/q'-1} \tag{16-6}$$

从(16-5)式，(16-6)式可用于解出均衡值 x^*，y^*，均衡如图 16-3 所示。曲线 SS 描绘了(16-5)式确定的搜寻决定，曲线是向下倾斜的。因为低价店(x)比例的上升降低了搜寻的动力，所以有信息消费者的比例(y)就下降了。曲线 RR 代表均衡条件(16-6)，这一曲线是向上倾斜的。因为 y 增加了对低价店的需求，所以 x 必须上升以满足需求。两条曲线的交点给出了市场的均衡点。

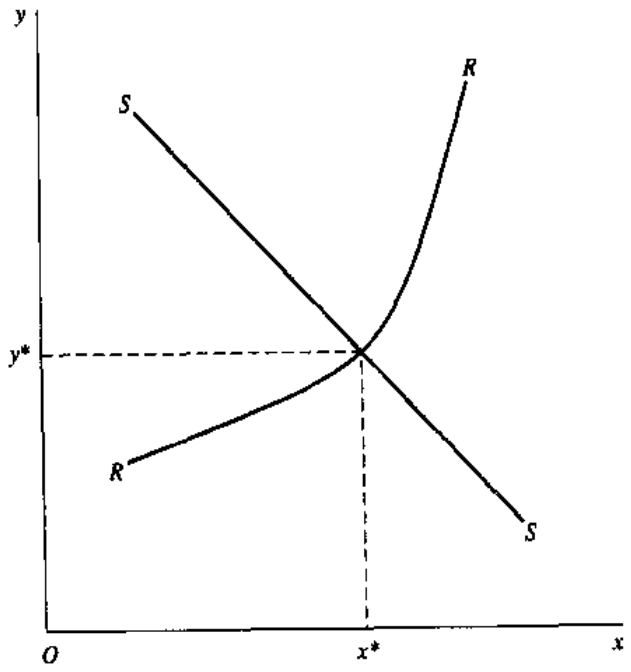

图 16-3 均衡分布的确定。曲线 SS 描述了有信息的消费者所占比例(y)如何随着市场上低价企业的比例(x)变化。x 越高，获取信息的动机愈低，所以成为有信息的人就更少。曲线 RR 描述了在低价企业购买的需求必须等于供给的条件。y 越高，在低价商店购买的需求更高，所以会有更多的低价企业。均衡由两个曲线的交点给出。

通过移动(16-3)中的曲线可以进行比较静态分析。比如 $\bar{p}-\underline{p}$ 的增加会使 SS 曲线上移。其他因素不变，市场上高低价差的增加会提高有信息消费者的比例，因为来自搜寻的期望收益

增加了。有信息的消费者越多，市场中低价企业的比例就越高。q^0/q^1（可能是由于技术的变化引起的，这会导致更为平缓的成本曲线）的增加会使 RR 左移。由于每个低价企业服务的顾客较原来减少，这降低了低价企业的比例。而低价企业越少，随机购买就越不吸引人，这样，有信息的顾客就增加了。最后，我们来考虑搜寻成本普遍上升的影响。因为 $G(c)$ 代表了搜寻成本少于 c 的消费者，给定 c 时，搜寻成本的普遍上升会减少 $G(c)$。从式(16-5)中，我们可知 SS 曲线会向下移动。这样，搜寻成本的增加倾向于同时降低有信息消费者的比例和低价企业的比例。

16.3　逆向选择

虽然搜寻价格信息要花费成本，但确认一件商品质量的成本更高。产品质量通常包括许多难以测度的维度。更重要的，买卖双方信息不完全的程度也可能是不对称的。经典的例子是二手车市场。在那里，现有车主比起潜在的买主对他们自己的车的质量有更准确的评估。当买车人无法评估商品的个体质量时，他们利用市场数据来评估平均品质。在本例中，因为买车人无法将高质量的车从市场平均质量的车中区别出来，拥有高质量车的人就没有出售商品的动机。高质量商品从市场退出，市场上商品的平均品质进一步降低。于是产生了逆向选择的后果：坏产品将好产品驱逐出了市场，市场的规模紧缩了。逆向选择模型已被用于研究保险市场、信贷市场和劳动力市场。本节主要讨论，在竞争市场中逆向选择如何影响均衡。

考察一个竞争性的劳动市场。行业中的企业都是一样的，而工人是各不相同的。企业是风险中性的，其生产函数规模报酬不变，劳动力是生产的惟一要素。如果工人被企业雇佣，则他们的产出价值会有差异：若类别为 x 的工人在企业中工作，则可生产出 x 元的产品。工人的保留工资亦不同，我们记为 y，通常工人的保留工资与其生产效率相关。为简化计，我们在建立模型时，假定 y 是 x 的函数，即 $y=y(x)$。在更精细的模型中，可以作更弱的统计相关性假定，但不会改变讨论的实质。

当有关于工人生产效率的充分信息时，均衡很容易描述。因为工人的类型是可以观测的，工人得到的工资是其类型的函数。在竞争中，类型 x 的工人收到的工资等于他真正的生产能力。因此市场工资安排为：

$$w(x)=x$$

工人将这一安排视为给定，然后确定是否在该行业中工作。当且仅当工资超过他的保留工资，即 $w(x)\geqslant y(x)$ 时，他会选择在该行业中工作。因为 $w(x)=x$，在完全信息均衡中，行业中雇佣的工人的集合由：

$$S^0=\{x:x\geqslant y(x)\}$$

给出，这样的工人配置显然是有效的。如果集合 S^0 中的一个工人离开了这个行业，他将损失 x，却能从其他活动中获益 $y(x)$。因为对这样的工人而言 $y(x)\leqslant x$，所以净效益是非正的。如果不是集合 S^0 中的一个工人被招人这个行业，他将损失 $y(x)$，却能获益 x。因为对

这样的工人而言 $y(x)>x$，所以净效益是负的。因此，没有一种偏离 S^0 的方式能够提高资源分配的效率。

当存在不对称信息时，均衡的资源配置将与上述截然不同。假定工人知道自己的类型，而企业不了解工人各自的生产能力，它们仅仅知道市场上工人类型的分布。生产能力为 x 或更低的工人的比例由分布函数 $F(x)$ 给出，对应的密度函数由 $f(x)$ 表示。因企业无法区分不同类型的工人，市场上的工资就不是工人类型的函数。相反，所有工人都得到同样的工资，用 w 代表。给定这样的市场工资，当且仅当市场工资高于保留工资时，工人愿意在该行业工作，用 S 表示这类工人。那么：

$$S=\{x: y(x)\leqslant w\} \tag{16-7}$$

在竞争情形下，每一企业的期望利润为 0。因此，市场工资等于该行业中雇佣工人的平均生产能力：

$$w=E[x|x\in S] \tag{16-8}$$

均衡时的工资率 w^* 和工人集合 S^* 使得(16-7)式、(16-8)式同时成立。

例 1. 假定保留工资与生产能力无关，故 $y(x)$ 对所有类型的工人而言，都等于常数 y_0。根据 y_0 是小于还是大于市场工资率 w，所有工人会选择在行业中工作(如果 $y_0\leqslant w$)或所有人都不会选择工作(如果 $y_0>w$)。如果所有工人都被雇佣(即均衡 S^* 是所有工人的集合)，那么 $w^*=E[x|x\in S]=E[x]$ 为均衡的工资率。只要参数 $E[x]$ 使 $E[x]>y_0$，均衡都存在。另一方面，若 $E[x]<y$，将没有工人被雇佣，均衡 S^* 是空集。

如果企业和工人都能观察到生产能力，资源的分配将会不同。在这一情形中，给工人的工资将依赖于工人类型，$w(x)=x$。当且仅当 $w(x)=x\geqslant y_0$，工人会选择在行业中工作。在行业中雇佣的工人比例将为 $1-F(y_0)$，与 0 或 1 不同。

在不对称信息下，均衡的特性严重依赖于函数 $y(x)$ 的特性。劳动市场中的逆向选择模型要求 $y'(x)>0$。这假定了更有生产力的工人会有更高的保留工资，比如，保留工资可能反映了所放弃的自我雇佣情况或在产出更易观测的其他行业中的盈利情况。这种情形下，如果劳动力质量能在某一维度上进行排序，假设 $y'>0$ 成立：在某一活动中做的好的劳动力，在另一活动中也同样干得出色。

我们可以定义临界生产力水平 $c=c(w)$，使得：

$$y(c(w))\equiv w \tag{16-9}$$

即函数 $c(\cdot)$ 是 $y(\cdot)$ 的反函数。所有使 $y(x)\leqslant w$ 的类型的 x 工人都愿意在该行业中就职。如果 $y(\cdot)$ 是递增的，这一条件等价于 $x\leqslant c(w)$。同理，高生产力的工人，即类型 $x\geqslant c(w)$，将不会参与到该行业中。根据(16-9)式，我们有 $dc/dw=1/y'>0$。这样，随着市场工资的下降，临界类型 $c(w)$ 也下降，越来越多的高生产力类型的工人将退出市场。

令 $A(w)$ 为工资 w 时愿意在行业中工作的工人的平均生产力水平。因为在 $x\leqslant c(w)$ 的条件下，x 的概率密度函数为 $f(x)/F(c(w))$，所以 x 的条件期望是：

$$A(w)=E[x\mid x\leqslant c(w)]=\int_0^{c(w)} x\frac{f(x)}{F(c(w))}\mathrm{d}x$$

显然 $A(w)<c(w)$，因为所有愿意接受雇佣的工人的生产力水平都低于 $c(w)$。而且，$A(w)$ 是 w 的增函数，因为：

$$\begin{aligned}A(w) &= \left[c(w)\frac{f(c(w))}{F(c(w))}+\int_0^{c(w)} xf(x)\frac{-f(c(w))}{F(c(w))^2}\mathrm{d}x\right]\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}w}\\ &= \frac{f(c(w))}{F(c(w))}\left[c(w)-\int_0^{c(w)} x\frac{f(x)}{F(c(w))}\mathrm{d}x\right]\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}w}\\ &= \frac{f(c(w))}{F(c(w))}[c(w)-A(w)]\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}w}>0\end{aligned}$$

因为高生产力的工人仅能得到等于平均生产力水平的工资，他们会趋向于退出市场。这些工人的退出，降低了平均的生产力水平以及市场工资。因为 $A'(w)>0$，所以市场工资的下降也导致了平均生产力 $A(w)$ 的下降，因为 $w=A(w)$，结果就进一步引致了工资的降低。于是逆向选择的效应就累积起来了。

例 2. 考虑基于 Akerlof 的二手车市场中不对称信息的例子。[3] 假定潜在的购买者愿意为质量为 x 的二手车支付 x 元，现有车主的保留价值为 $y(x)=2x/3$，车的质量在 0 和 2 之间平均分布。因为对所有 x，$y(x)\leqslant x$，所有质量水平的二手车都会在完全信息的均衡中进行交易。但是当潜在的购买者不能观测到质量情况时，均衡时会有一价格 w，它等于出售的二手车的平均质量。期望的质量由下式给出：

$$A(w)=E\left[x\,\middle|\,\frac{2x}{3}\leqslant w\right]=\int_0^{3w/2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{3w}{4}$$

因为 $A(w)=3w/4<w$，所以对任意正的价格 w，在均衡中将不会有车进行交易。这个例子中，逆向选择导致了二手车市场的完全崩溃。

在具有逆向选择的均衡中，市场工资率等于平均的生产力，即均衡工资满足 $w=A(w)$。图 16-4 中，我们画出了 $A(w)$ 和 $c(w)$ 的图形。均衡工资 w^* 由 $A(w)$ 和 45°线的交点给出。类型为 $x\leqslant c^*$ 的个人会被雇佣到行业中，其中 $c^*=c(w^*)$。相反，若没有不对称信息，类型 $y(x)\leqslant x$ 的所有工人都会被雇佣到行业中。因为函数 $c(\cdot)$ 是 $y(\cdot)$ 的反函数，条件 $y(x)\leqslant x$ 等价于 $x\leqslant c(x)$。在图 16-4 中，在完全信息均衡中的临界类型 c^0 由 $c(w)$ 和 45°直线的交点给出。在完全信息均衡中所有 $x\leqslant c^0$ 的工人会被雇佣。从图 16-4 可清楚的看出，$c^0>c^*$。当存在不对称信息时，逆向选择会趋于降低劳动力市场中的就业。

偏好选择

在逆向选择模型中，生产能力愈强的工人将退出市场，因为这些工人拥有更好的外部机会，其报酬高于反映平均劳动生产能力的市场工资。但是也可能在相反的方向上进行选择。在一项活动中表现得较好的工人不一定在其他活动中表现得更出色。若更有生产力的工人

3　见 George Akerlof, "The Market for 'Lemons': Quality Uncertainty and the Market Mechanism," *Quarterly Journal of Economics*, 84: 488-500, August 1970。

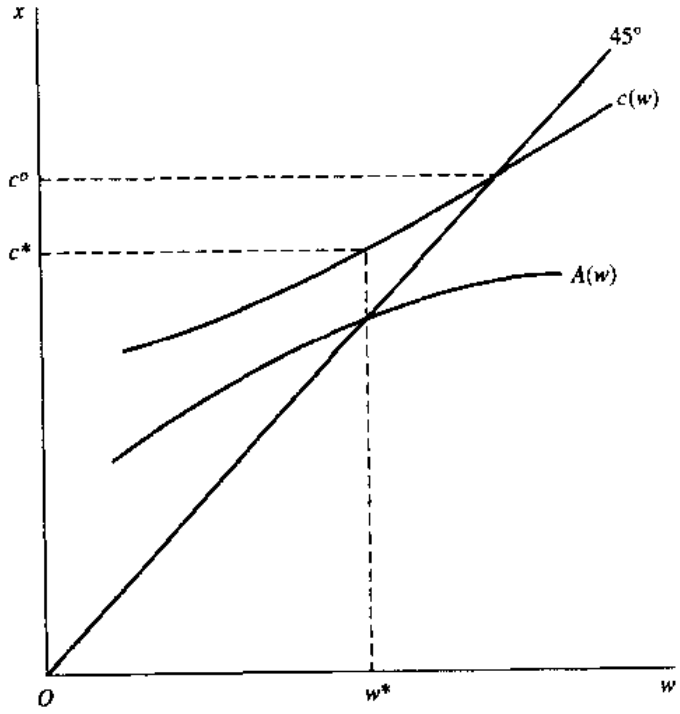

图 16-4 不对称信息的均衡。均衡工资由曲线 $A(w)$和 45°线的交点给出。类型为 $x\leqslant c^*$ 的工人都得到了工作。而在完全信息的均衡解中，类型为 $x\leqslant c^0$ 的工人都得到了工作。

的保留工资更低，那么比起生产力低的工人，在给定工资下，他们更有可能留在行业中。在这样的情形下，选择机制产生的均衡将迥异于逆向选择均衡。

令生产力为 x 的工人的保留工资为 $y=y(x)$，其中 $y'(x)<0$。当工人的生产能力不能被企业观测时，所有工人的工资是一样的，设为 w。如果 $y(x)\leqslant w$，类型为 x 的工人将愿意接受工作。与式(16-9)一样，将函数 $c(\cdot)$定义为 $y(\cdot)$的反函数。当 $y(\cdot)$是递减函数时，反函数 $c(\cdot)$也是。因此条件 $y(x)\leqslant w$ 等价于 $x\geqslant c(w)$。不同于逆向选择的情形，在行业中更有生产力的工人反而更愿意接受雇佣。但是，因为 $c'(w)=\dfrac{1}{y'}<0$，当市场工资上升时，更有生产力的工人的选择就变得更不确切了。

均衡要求市场工资 w 等于那些愿意在工资为 w 时工作的人的平均生产力。令 $A(w)$表示平均生产力，那么：

$$A(w)=E[x\mid x\geqslant c(w)]=\int_{c(w)}^{\hat{}} x\,\frac{f(x)}{1-F(c(w))}\mathrm{d}x$$

显然，因为所有愿意接受雇佣的工人的生产力都高于 $c(w)$，$A(w)>c(w)$。均衡如图 16-5 中所示。$A(w)$的图形是向下倾斜的，因为：

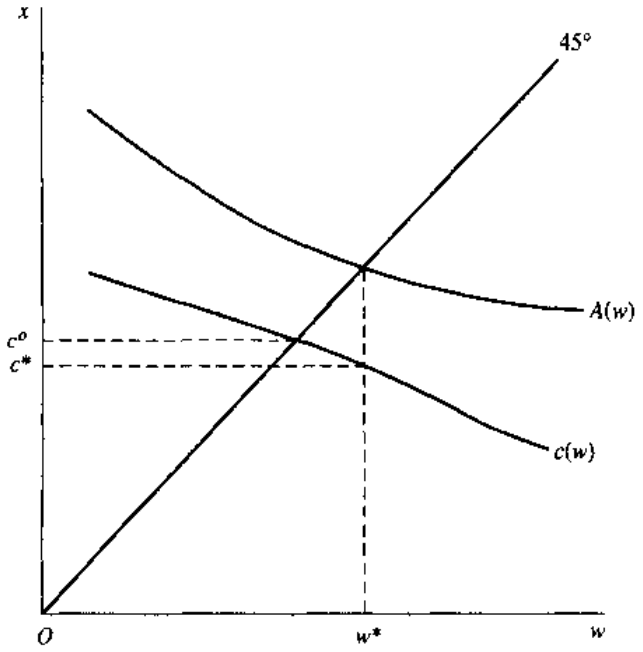

图 16-5　有利选择的均衡。均衡工资由曲线 $A(w)$ 和 45°线的交点给出。类型为 $x \geqslant c^*$ 的工人都得到了工作。而在完全信息的解中，类型为 $x \geqslant c^0$ 的工人得到了工作。逆向选择倾向于缩小市场规模，有利选择却倾向于扩张市场。

$$A'(w)=\frac{f(c(w))}{1-F(c(w))}[A(w)-c(w)]\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}w}<0$$

偏好选择倾向于将更有生产力的工人选入行业，从而将行业工资提高到高于平均生产能力的水平。但是，随着工资的上升，好工人的选择却变得不确切，而且平均的劳动能力会下降，给工资带来了下降的压力。因而偏好选择不像逆向选择，是自我限制的。$A(w)$ 曲线的斜率为负，这保证了它与 45°线有惟一的交点。

如果没有不对称信息，所有 $y(x) \leqslant x$ 的工人都会被雇佣。因为 $y(x)$ 为减函数，该条件等价于 $x \geqslant c(x)$。在图 16-5 中，在完全信息情况的解中，所有类型 $x \geqslant c^0$ 的工人都会被雇佣。相比之下，在信息不对称时，类型 $x \geqslant c^*$ 的工人被雇佣。因 $c^* < c^0$，就如图 16-5 所示，在不对称信息均衡中雇佣的工人数多于完全信息均衡时雇佣的工人数。逆向选择紧缩了市场规模，偏好选择扩大了市场规模。

David Hemenway 提出，在保险市场中，偏好选择是与经验认识相关的。[4] 传统观点认为，具有更严重风险的人会有购买更多保险的动机。当有较低风险的人离开市场时，政策溢价的增加将破坏风险汇集。风险汇集的破坏使得保险公司不得不进一步提高溢价，以保持盈亏平衡。这样的逆向选择过程会导致非常高的溢价和保险的提供不足。Hemenway 因此认为，保险市场吸引的是相对更加风险厌恶的人。因为这些人会采取更多的自我保护措施，购买保险者的平均风险要低于全体人的平均水平。根据这样的说法，政策溢价的上升将

4　David Hemenway, "Propitious Selection," *Quartely Journal of Economics*, 105: 1063-1069, November 1990, and "Propitious Selection in Insurance," *Journal of Risk and Uncertainty*, 5: 247-251, 1992.

改善风险汇集，因为只有谨慎的人还留在市场中。当偏好选择存在时，预测不对称信息将导致保险提供不足不再成立。

16.4 信号传递模型

在逆向选择模型中，因为雇主不了解每个工人的具体素质如何，被雇佣的高素质工人与低素质工人的工资是相同的。如果高素质工人能够将他真正的生产能力展示给潜在的雇主，那么在竞争环境中他能得到高工资，而不只是得到反映平均生产力水平的工资。然而，高素质工人不能仅依靠谈话将自己同低素质的工人分开，因为后者也有伪称自己有高产出的意图。根据假定，在雇佣决策时，雇主不能观测到工人的素质。因为所有工人都有动机称他们是高素质的，这样的说法是不可靠的。正如通常所说的，行胜于言。信号传递模型研究个体如何选择有成本的行动，从而把自身的特长展示给其他不知道的人。

考虑由 Michael Spence[5] 最早提出的关于教育信号的一个简单模型。他假定有两种类型的工人：类型 1 的生产能力为 v_1，类型 2 的工人生产能力为 v_2，$v_2>v_1$，二人知道各自的类型，但雇主仅知道工人中有 π_1 部分为类型 1，而另 π_2 部分为类型 2($\pi_1+\pi_2=1$)。在雇主不能区分工人类型的竞争性劳动力市场中，所有工人得到的工资等于平均的生产能力，即 $\pi_1 v_1+\pi_2 v_2$。因为 $\pi_1 v_1+\pi_2 v_2<v_2$，类型 2 的回报低于他们真正的生产力，他们有动机传递信号，以表示他们有更高的生产能力。Spence 认为，即使教育不能直接增加生产力，学历也可以作为工人素质的一种信号。

在 Spence 模型的背后，最重要的假定是生产能力高的工人能以较低的边际成本接受教育。假设类型 1 的工人获得教育水平 e 需花费 $c_1 e$，而类型 2 的工人获得同等水平的教育要 $c_2 e$，关键是假定 $c_2<c_1$。这一设定满足了单交叉点性质——一个常常在正式分析信号传递模型时需要用到的条件。根据单交叉点性质，不同类型工人的无差异曲线至多交于一点。在现在的框架中，类型 1 的效用函数可写为 $U^1(e,w)=w-c_1 e$，其中 w 是工资。如果我们以 w 为纵轴，e 为横轴画图，无差异曲线的斜率应该为 c_1。同样的，类型 2 的无差异曲线斜率为 c_2。因为类型 1 的工人无差异曲线总是比类型 2 的更为陡峭，单交叉点性质的确是满足的。

下面说明为什么假设不同的教育成本有其重要性。不妨假定 $c_2\geqslant c_1$，那么，无论什么时候，当高素质的工人准备投资教育水平 e 以传递其高生产力的信号时，因为低素质工人的教育成本更低，他们也会有同样的动机。这样，雇主通过观察工人接受的不同的教育水平来区分高素质工人和低素质工人的均衡就不存在。

在一个将受教育水平作为工人素质信号的均衡中，雇主会预计到教育水平为 e_1 的工人

5 Michael Spence, *Market Signaling*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1974.

是类型 1 的，而受教育程度为 e_2 的是类型 2 的工人。在竞争中，他们会付给类型 1 的工人 v_1，付给类型 2 的工人 v_2，这样的均衡称为分离均衡，均衡的条件是雇主的预期会被工人的行为所证实。这要求类型 1 的工人确实选择了获取教育水平 e_1，而类型 2 的工人选择了教育水平 e_2。这一要求可写为：

$$v_1 - c_1 e_1 \geqslant v_2 - c_1 e_2 \tag{16-10}$$

$$v_2 - c_2 e_2 \geqslant v_1 - c_2 e_1 \tag{16-11}$$

不等式(16-10)是类型 1 的工人的自我选择条件。任何低素质工人都可以选择较高的教育水平 e_2，以传递高生产力的(错误)信号。条件(16-10)说明比起传递错误信号换取工资 v_2，类型 1 的工人更愿意选择教育水平 e_1 以得到 v_1 的工资。类似的，如果一个高素质工人要接受较低的工资 v_1，他可以节省一些教育费用。但条件(16-11)说明了类型 2 的工人更愿意选择组合(e_2, v_2)，而不是节省教育开支来获取低工资。

自我选择(16-10)和(16-11)可以重新组织得到：

$$\frac{v_2 - v_1}{c_2} \geqslant e_2 - e_1 \geqslant \frac{v_2 - v_1}{c_1} \tag{16-12}$$

注意，如果 $c_1 < c_2$，那么(16-12)就不会成立。所以分离均衡的一个必要条件是高能力工人的教育成本比低能力工人的成本低。而且，条件(16-12)表明，不同类型工人的均衡受教育程度的差异是有上下界的。如果差 $e_2 - e_1$ 太大，不论类型 1 或类型 2 的工人都不会愿意支付教育信号的成本。另一方面，若差别过小，两种类型的工人就都会选 e_2，教育水平也就不能成为区别工人素质的有用信号了。仅仅当 $e_2 - e_1$ 满足(16-12)时，我们才会得到一个分离均衡。不同的工人选择不同的教育水平，而雇主则可基于观察到的教育水平正确推断出工人的生产能力。

条件(16-12)并没有确定给出 e_1 和 e_2 的惟一的均衡取值集合。但是，因为教育是一项有成本的行动，雇主间的竞争会导致信号传递均衡所需的教育水平最低化。在满足(16-12)的条件时，使 e_1 和 e_2 最小，意味着均衡值为：$e_1^* = 0, e_2^* = \frac{v_2 - v_1}{c}$。任何其他满足(16-12)的$(e_1, e_2)$都不能组成完全的均衡。[6] 如果任何雇主给教育程度为 $e^2 > e_2^*$ 的工人支付工资 v_2，那么其他的雇主就能通过支付略少的工资，同时只要求更低的教育水平(e_1^*, e_2^*)，来吸引走他所有的工人，而且仍能获利。

在信号传递模型中，高素质工人投资于昂贵的教育，以区分自己和低生产能力的工人。但这种区分仅仅导致了收入的转移，却并未增加生产能力。与完全信息的经济相比，信号传递均衡中反而存在过度的教育。

6　正式地讲，这个结论成立需要对雇主的信念和均衡条件作详细的设定。我们含蓄的采用了 John Riley 在"Informational Equilibrium," *Econometrica*, 47: 331-359, 1979 中提出的"反应均衡"的说法。也可参见 Cho, In-Koo, and David M. Kreps: "Signaling Games and Stable Equilibria," *Quarterly Journal of Economics*, 102: 179-221, 1987。

更一般的分析

对信号传递均衡的分析并没有依赖于花费成本的信号(教育)是完全没有生产力的假设,也不依赖于只有两个离散类型工人的模型。在更一般的模型中,我们认为教育对工人的生产能力有直接影响。我们也假设工人是连续分布的,从而可以应用积分这种方便的技术。令:

$$v=v(a,e)$$

其中,假设生产能力 v 为内在能力 a 和教育水平 e 的增函数。不同类型工人的差异在于他们天生的能力不同。对于每一位工人,内在能力是固定的,但教育是后天习得的特征。令教育的成本为:

$$c=c(a,e)$$

其中,$c_a<0$,$c_e>0$。即能力越强的个人受教育所需成本越小,并且受教育成本是所受教育程度的增函数。更重要的,我们假定二阶导数 c_{ae} 是负的。即能力越强,则教育的边际成本越低。这一假定与离散类型模型中讨论的单交叉点性质有关。假设工人的效用函数由 $U=w-c(a,e)$ 给出,其中 w 是工资,那么在 (e,w) 空间中,类型 a_1 的工人的无差异曲线的斜率是 $c_e(a_1,e)$,类型 a_2 的工人的无差异曲线的斜率为 $c_e(a_1,e)$。若 $a_1<a_2$,则对任意给定的 e,类型 a_1 的工人的无差异曲线要陡于类型 a_1 的工人的无差异曲线,故两者的无差异曲线至多交于一处。

雇主无法直接观测到工人的生产力和天生的能力。但雇主可通过教育程度来推断工人的生产能力。根据市场上的工资安排 $w(e)$(这依赖于他们所受的不同的教育水平),工人们可以得到不同水平的工资。与(16-14)式一样,这样的工资安排是由市场的竞争性决定的,但每个人都将其视为是既定的。给定这样的工资安排,每个人将选择教育水平,使:

$$w(e)-c(a,e)$$

最大。最大化的一阶条件是:

$$w'(e)-c_e(a,e)=0 \tag{16-13}$$

等式(16-13)定义了选择函数 $e=e^*(a)$。进行比较静态分析得到:

$$\frac{\partial e^*}{\partial a}=\frac{c_{ae}}{w''-c_{ee}}>0$$

根据假定,c_{ae} 为负,而由最大化的二阶条件,分母亦为负。这说明内在能力越强的人在教育方面投资越多。相反的,雇主也可以推断出在教育上投资越多的内在能力越强。

越有能力的人会选择接受更多的教育,这一事实使得雇主可以通过观察学历来做出内在能力的正确推断。如果 $a_1<a_2$,那么 $e^*(a_1)<e^*(a_1)$。能力为 a_1 的人会发现选择更高的教育水平 $e^*(a_2)$ 来表明自己能力为 a_2 是没有什么好处的,因为教育的边际成本对他来说太高了。换言之,不同内在能力的人会选择接受不同水平的教育。雇主可以推测,教育水

平为 $e^*(a_1)$的一定是能力为 a_1 的人，而教育水平 $e^*(a_2)$的能力必为 a_2。通常，这一均衡可以表示为函数 $a=a^*(e)$，其中 $a^*(\cdot)$是选择函数 $e^*(\cdot)$的反函数。因 $e^*(\cdot)$是严格递增的，反函数存在。而且，推断函数也是递增的，因为$\partial a^*/\partial e=1/e^{*\prime}>0$。

在竞争情形下，市场工资必须反映雇主对工人生产能力的预期。对教育水平 e 的工人，雇主可推断其内在能力为 $a=a^*(e)$，所以：

$$w(e)\equiv v(a^*(e),e) \tag{16-14}$$

等式(16-14)对任意教育水平 e 都成立，因此写为恒等式。(16-14)式两边对 e 求导，我们得到：

$$w'(e)=v_a\frac{\partial a^*}{\partial e}+v_e$$

利用(16-13)式，用 C_e 代替 $w'(e)$，上式可重写为：

$$c_e-v_e=v_a\frac{\partial a^*}{\partial e}>0$$

换言之，人们将投资教育，直至边际成本超过边际收益。比起完全信息均衡 $c_e-v_e=0$，这里的投资水平过高了。在教育上的这类过度投资，是因为更多的教育表明有更强的能力，而更强的能力又能转化为更高的收益。

16.5　垄断甄别

在信息不对称的市场中，同信号模型一样，有信息的个人有动机将其真正的特征展示给市场中没有信息的另一方。另一方面，没有信息的人也有动机利用各种策略划分或甄别市场另一方的不同类型。如果没有信息的个人拥有一定程度的市场力量，他们介入甄别行动的动机将特别明显。比如，考虑一个有垄断力量的生产者的定价问题。他有需求强度不同的一些潜在顾客，但他不能将高需求的顾客从低需求的顾客中区分开来。市场调研能降低但无法消除消费者类型方面的不确定性。生产者于是面临两难选择：如果定价过高，需求低的消费者会离开市场；而如果定价太低，他就无法使得来自高需求消费者的利润数量最大化。于是，如果定价策略能够将消费者区分开，将有助于利润的增加。例如，生产者可引入能够生产两种商品的生产线，将高质量(更贵的)的商品提供给高需求的消费者，而将低质量的(更便宜)的商品提供给低需求的消费者。如果价格-质量得到正确的安排，生产者便能有效地将顾客分入两个分离的市场，而不必确切知道哪位顾客属于哪一类型。甄别允许生产者在信息不完全的情况下实现部分价格歧视。

假定某一商品能够以多种型号进行生产。产品型号可用 q 进行衡量，q 值越高，说明质量越好。任一型号的单位成本是 $C(q)$，$C'(q)>0$，$C''(q)>0$。单位成本与商品数量无关。

市场上有两类潜在的消费者，其中高需求消费者的比例为 π，他们的效用函数为 $U_H=x$

$+B_H(q)$，$B'_H(q)>0$，$B''_H(q)<0$。变量 x 代表所有的其他商品。每一消费者在满足预算约束 $P(q)+x-M$ 时，至多可选择一种型号的商品，以使效用最大化。其中 M 为收入，$P(q)$ 是质量为 q 的产品的价格。[7] 给定该效用函数，$B_H(q)$ 可解释为消费者愿意为型号为 q 的产品支付的价格，效用最大化则等价于最大化 $B_H(q)-P(q)$。另一类型的消费者为低需求的消费者，他们的效用函数为 $U_L=x+B_L(q)$，$B_L(q)>0$，$B''_L(q)<0$。我们假定对所有的 q，$B_H(q)>B_L(q)$。即高需求的消费者比低需求消费者更愿意为任何型号的商品支付更高的价格。我们进一步假定，对任一 q，有：

$$B'_H(q)>B'_L(q) \tag{16-15}$$

条件(16-15)，即单交叉点性质，说明比起低需求的消费者，高需求消费者认为质量的边际价值更大。在以 q 为横轴，x 为纵轴的商品空间中，高需求消费者的无差异曲线(斜率为 $-B_H(q)$)总是比低需求消费者的无差异曲线(斜率为 $-B_L(q)$)更陡峭，这样它们只能相交于一处。

因为市场中只有两类消费者，故没有理由生产多于两类的型号。令 q_H，q_L 为生产的两种型号，令 p_H 和 p_L 为对应的价格。若没有隐藏起来的信息(即如果生产者能区分高需求消费者和低需求消费者)，生产者可按价格 p_H 将产品 q_H 卖给高需求的消费者，而以 p_L 把 q_L 卖给其余的低需求者。生产者可选择价格和质量，使总利润最大化：

$$\pi[p_H-C(q_H)]+(1-\pi)[p_L-C(q_L)] \tag{16-16}$$

使得：

$$B_H(q_H)-p_H\geqslant 0$$
$$B_L(q_L)-p_L\geqslant 0$$

解记为 $(q_H^0, q_L^0, p_H^0, p_L^0)$，它们满足：

$$C'(q_H^0)-B'_H(q_H^0)=0$$
$$C'(q_L^0)-B'_L(q_L^0)=0$$
$$B_H(q_H^0)-p_H^0=0$$
$$B_L(q_L^0)-p_L^0=0$$

在完全信息的这个解中，存在完全的价格歧视。产品型号的选择是有效的。对每一类型的消费者而言，质量的边际成本等于边际价值。而且，生产者完全剥夺了所有消费者的消费者剩余。

但当生产者不能区分两类消费者时，无法得到完全信息的解。在目标函数(16-16)背后隐含的假定是高需求消费者将购买型号为 q_H 的商品，而低需求的会买 q_L。但是，考察高需

---

7 我们把 q 解释成消费掉的产品数量，而不是产品种类或产品质量。在这样的可能的模型解释中，生产者的单位产品定价不是完全一致的，而是让消费者自己选择购买数量。确切地说，他设置了一个定价计划 $p(q)$。如果消费 q 单位商品就要求支付 $p(q)$ 元。通常，这个定价计划 $p(q)$ 是 q 的非线性函数，这也是为什么不完全信息下的价格歧视理论也被称为非线性定价理论的原因。

求消费者的动机。如果他以价格 p_H^0 选择购买 $q_H=q_H^0$，他的消费者剩余为 0。若购买另一型号 q_L^0，其消费者剩余大于 0，因为：

$$B_H(q_L^0)-p_L^0>B_L(q_L^0)-p_L^0=0$$

既然生产者无法确认谁是高需求的顾客，他就无法强迫他们购买型号 q_H^0。事实上，所有消费者都会以价格 p_L^0 购买型号 q_L^0 的产品。[8] 完全的价格歧视是不可行的。

在关于消费者类型的隐蔽信息存在时，只有通过能导致消费者主动分离到不同市场的价格质量安排，价格歧视才能成功实行。规范地讲，生产者的问题是：

最大化　　$\pi[p_H-C(q_H)]+(1-\pi)[p_L-C(q_L)]$

$$B_H(q_H)-p_H\geqslant 0 \tag{16-17}$$

$$B_L(q_L)-p_L\geqslant 0 \tag{16-18}$$

使得：

$$B_H(q_H)-p_H\geqslant B_H(q_L)-p_L \tag{16-19}$$

$$B_L(q_L)-p_L\geqslant B_L(q_H)-p_H \tag{16-20}$$

条件(16-17)和(16-18)是参与约束，要求各类消费者愿意购买商品而不是不买。条件(16-19)和(16-20)是激励相容约束，也是甄别模型中已知的自我选择约束。因为卖方不知道消费者的类型，可行的价格歧视设计要求消费者自愿地选择分配给他们的价格质量组合。比如(16-19)式说明高需求消费者选择为他们设计的组合(q_H,p_H)。当该约束满足时，他们便没有动机将自己伪装为低需求顾客购买其他的组合(q_L,p_L)。

观察约束(16-17)至(16-20)，有两个结论。首先，将不等式(16-18)和(16-19)相加，我们有：

$$B_H(q_H)-p_H\geqslant B_H(q_L)-B_L(q_L)>0$$

因此，从约束(16-18)和(16-19)可知，约束(16-17)是严格的不等式。高需求消费者的参与约束是松的。其次，对完全信息的解进行讨论，可知高需求的消费者有动机购买为低需求者设计的产品，但低需求的消费者并没有动机购买为高需求者设计的产品。故可预期到低需求顾客的激励相容约束(16-20)将是不紧的。为解最优化问题，先去除约束(16-20)，而后再证明在解中该约束确实是松的。

一旦去掉约束(16-17)和(16-20)，利润最大化的拉格朗日函数是：

$$\mathcal{L}=\pi[p_H-C(q_H)]+(1-\pi)[p_L-C(q_L)]+\lambda_1[B_L(q_L)-p_L]+\lambda_2[B_H(q_H)-p_H-B_H(q_L)+p_L]$$

一阶条件是：

$$\pi-\lambda_2=0 \tag{16-21}$$

$$(1-\pi)-\lambda_1+\lambda_2=0 \tag{16-22}$$

$$-\pi C'(q_H)+\lambda_2 B'_H(q_H)=0 \tag{16-23}$$

8　低需求的顾客没有购买 q_H^0 的动机。如果他们这样做，他们的消费者剩余将会是负的，因为 $B_L(q_H^0)-p_H^0<B_H(q_H^0)-p_H^0=0$。

$$-(1-\pi)C'(q_L)+\lambda_1 B'_L(q_L)-\lambda_2 B'_H(q_L)=0 \tag{16-24}$$

从等式(16-21)和(16-22),我们可得 $\lambda_1^*=1,\lambda_2^*=\pi$。所有乘数都严格正,所以对应的约束(16-18)、(16-19)都是紧的,将 λ_1^*,λ_2^* 的值代回(16-23)、(16-24),一阶条件化为:

$$B'_H(q_H^*)-C'(q_H^*)=0 \tag{16-25}$$

$$B'_L(q_L^*)-C'(q_L^*)-\frac{\pi}{1-\pi}[B'_H(q_L^*)-B'_L(q_L^*)]=0 \tag{16-26}$$

进一步,因为约束(16-18)和(16-19)在取等号时成立,我们有:

$$p_L^*=B_L(q_L^*) \tag{16-27}$$

$$p_H^*=B_H(q_H^*)-B_H(q_L^*)+B_L(q_L^*) \tag{16-28}$$

比较一阶条件(16-25)、(16-26)和完全信息的解,可能看到 $q_H^*=q_H^0,q_L^*<q_L^0$。为防止高需求顾客选择为低需求顾客设计的价格质量选择,卖方将低需求组合中的产品质量从 q_L^0 下降为 q_L^*,从而使低质量产品对高需求顾客变得不够诱人。

也要注意,在有隐蔽信息时,价格歧视是不充分的。虽然低需求的消费者没有消费者剩余(他们的参与约束是紧的),生产者却不能够从高需求消费者那儿剥夺走全部的消费者剩余(他们的参与约束是松的)。高需求消费者保留的剩余称为信息租金,因为它产生于生产者的信息缺乏。因生产者无法将高需求消费者从低需求者中区分开来,如果他尝试通过收取高价来从高需求的消费者处榨取更多的消费者剩余,他将无法防止高需求顾客购买低质产品。

最后,我们需验证低需求消费者的激励相容约束(16-20)的确成立。因为低需求消费者来自低质量型号产品的消费者剩余为0,他们的激励相容约束要求:

$$0\geqslant B_L(q_H^*)-p_H^*$$

将 p_H^* 的值从(16-28)代入该不等式,该条件等价于:

$$B_H(q_H^*)-B_H(q_L^*)\geqslant B_L(q_H^*)-B_L(q_L^*)$$

这一条件也可由单交叉点性质推出,因为:

$$\int_{q_L^*}^{q_H^*}B'_H(q)\mathrm{d}q=B_H(q_H^*)-B_H(q_L^*)>\int_{q_L^*}^{q_H^*}B'_L(q)\mathrm{d}q=B_L(q_H^*)-B_L(q_L^*)$$

这样,约束(16-20)确实是以严格的不等式形式成立的,去掉该约束对最大化问题的解毫无影响。

除了价格歧视问题之外,甄别模型在经济学中还有许多应用,在委托代理的架构中,甄别模型也即所谓的隐藏信息模型。假定代理人的行为是可观察的,故由于行为隐蔽导致的道德风险问题通常将不再发生,但委托人并不知道代理人的成本结构。对这一问题的分析类似于对价格歧视模型的分析,其中委托人可解释为拥有垄断力量的卖主。此外,这个模型也是最优收入所得税模型和拍卖理论的重要组成部分。

习题

1. 一个生产者不知道 w_1 的取值，他需要最大化 $E[pf(x_1,x_2)-w_1x_1-w_2x_2]$，如果 w_1 的分布在均值不变扩展时变得更有风险，证明他愿为获得 w_1 的确切消息而支付的数量将上升。
2. 设不同卖主的报价在 0 与 1 之间平均分布。一个买主计划购买 β 单位商品，如果他找 n 个卖主的搜寻成本为 nc，假设 n 连续而非离散，请导出成本最小化的一阶条件。若买主遵循固定样本数量法则，检验一阶条件是否成立。推导关于参数 C 和 β 的比较静态结果。
3. 假设价格在 0 与 d 之间平均分布。有个人计划购买一单位商品，搜寻单位成本为 c。
   (a) 若买主遵循固定样本规模搜寻准则，最优样本规模如何随 d 的变化而变化？解释你的结论。
   (b) 若买主遵循顺序搜寻法则，最优的保留价格为多少？
   (c) 推导买主停止搜寻前访问的卖主数量的期望的表达式，该数如何随 d 的变化而变化？
4. 在均衡价格分散模型中，(16-5)式和(16-6)式对参数进行微分，并利用克莱姆法则解方程组可得到比较静态结果。利用这种方法证明 $\partial x^*/\partial \underline{p}<0$，$\partial y^*/\partial \underline{p}<0$，(即当竞争性价格 $\underline{p}$ 上升时，低价格企业和有信息消费者的比例都将下降)。

部分参考文献

Akerlof, George: "The Market for 'Lemons': Quality Uncertainty and the Market Mechanism," *Quarterly Journal of Economics*, 84: 488-500, August 1970.

Baron, David, and Roger Myerson: "Regulating a Monopolist with Unknown Costs," *Econometrica*, 54: 923-942, July 1982.

Cho, In-Koo, and David M. Kreps: "Signaling Games and Stable Equilibria," *Quarterly Journal of Economics*, 102: 179-221, 1987.

Hemenway, David: "Propitious Selection," *Quartely Journal of Economics*, 105: 1063 - 1069, November 1990.

_____: "Propitious Selection in Insurance," *Journal of Risk and Uncertainty*, 5: 247-251, 1992.

Jovanovic, Boyan: "Favorable Selection with Asymmetric Information," *Quarterly Journal of Economics*, 97: 535-539, 1982.

Lippman, Steven A. and John J. McCall: "The Economics of Job Search: A survey," *Economic Inquiry*, 14: 155-189, 347-368, 1976.

Maskin, Eric, and John Riley: "Monopoly and Incomplete Information," *RAND Journal of Economics*, 15:171-196, Summer 1984.

Mussa, Michael, and Sherwin Rosen: "Monopoly and Product Quality," *Journal of Economic Theory*, 18: 301-317, 1978.

Riley, John: "Informational Equilibrium," *Econometrica*, 47: 331-359, 1979.

_____: "Testing the Educational Screening Hypothesis." *Journal of Political Economy*, 87: S227-S252, 1979.

Salop, Steven, and Joseph Stiglitz: "Bargains and Ripoffs: A Model of Monopolistic Competitive Price Dispersion," *Review of Economic Studies*, 44: 493-510, 1977.

Spence, Michael: *Market Signaling*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1974.

Stigler, George: "The Economics of Information," *Journal of Political Economy*, 69: 213-225, June 1961.

_____: "Information in the Labor Market." *Journal of Political Economy*, 70: 94-105, October 1962.

第 17 章　一般均衡Ⅰ:线性模型

17.1　导言:固定系数技术

前几章所分析的模型是从局部均衡的马歇尔框架中导出。模型将一个厂商或一个人与市场其余部分联系起来,其中市场其余部分被当作既定的。未曾考虑过参数变化时消费者或厂商同时行动的总效果。一般来说,每个消费者或厂商自身对市场价格或总量无重大影响。然而,如果所有厂商或消费者对某一既定参数变化作同样的反应,在分析中原先假定为常数的其他变量会发生变化。

例如,考虑由某最终产品的需求曲线向右移动导致其价格的增加产生的后果。此产业的每个厂商将同时企图增加其产量。如果假定该市场是竞争的,每个厂商将要素价格视作给定。即某个厂商认为要素水平的单个调整不会导致要素价格的变化。然而,如果所有厂商同时希望雇佣更多的劳动力和资本,劳动力和资本的价格可以预期会发生变化。如果这个产业是经济中一个重要的部分,那么仅考虑此行业无法决定要素价格是上升还是下降。在一个封闭的经济中,此行业产品需求的增加意味着对某代替品需求的减少。如果这两个行业的劳动力和资本市场是相关的,即资源能从一个行业移到另一个行业,要素价格的变化取决于在每个行业中要素使用的相对强度。

上述的现象,通常称为一般均衡问题。局部均衡和一般均衡术语的使用并不表明某个模型比另一个模型高级、先进。一个模型并不必然比另一个更一般。模型间的不同可最恰当的描述为测试环境的不同。即在这两类模型中,不同的参数被固定。在局部均衡框架中,经济中非常小的一部分被分析,要素和不相关产业的产品价格被假定不变。产品总产量和要素被视作变量。在一般均衡模型中,总资源数量通常固定,分析的重点在于产业之间相互反应。应用哪种模型取决于要研究的问题。一般性并不是在所有情况下都好。越一般,同时也伴随着越强的复杂性。

举一个具体的例子。对美国某个行业的价格控制和配给进行分析,对大部分经济学家来说,在标准的马歇尔局部均衡框架下处理是最方便的,即使像石油行业这样的大行业也是如此。虽然石油行业规模绝对大,但与经济中其余部分相比仍是小的。另一方面,比如说,导入全国范围的增值税以取代其他税种的分析,如果要实现正确预期,最好使用一般均衡方法。测试环境即要被固定的参数的选择,是要处理问题的函数,并且不是一个事前决定的步骤。

现在让我们考虑生产 n 种最终产品 $y_1,\cdots,y_n$ 的经济体。这些产品由 m 种要素 $x_1,\cdots,$

x_m 生产出来。n 种最终产品的价格 $p_1,\cdots,p_n$ 假定被全球市场固定。这被称做小国假定。此经济体与世界经济相比充分小以至于其产出水平的变化不影响世界价格。(局部均衡分析的影子!)令:

$$x_{ij}=\text{生产产品 } j \text{ 所耗用要素 } i \text{ 的量}$$

$$i=1,\cdots,m \qquad j=1,\cdots,n$$

产品 j 的生产函数记为:

$$y_j=f^j(x_{1j},\cdots,x_{mj})$$

此经济体的总资源被固定在水平 $x_1,\cdots,x_m$,即 $x_1,\cdots,x_m$ 不是选择变量而是模型中的参数变量。在竞争市场(或更精确地说在无交易成本条件下),竭尽贸易收益隐含着总产值或GNP(此处不存在可折旧资产,因此在GNP和NNP之间无区别)被极大化。否则,某个个体能从将资源从低值使用转到高值使用中获利。用亚当·斯密的话说如下:

当每个个体……尽可能努力应用他的资本来支持国内产业,并且将资本导向产值最高的产业时,每个个体必然努力使得社会的总收益最大……他在这种情况下像在许多其他情况下一样是被一支看不见的手引着去实现一个本不是他的目的的目的。

受固定资源约束交换收益极大化数学上可写为:

$$\text{最大化} \qquad Z=\sum_{j=1}^{n}p_jy_j=\sum_{j=1}^{n}p_jf^j(x_{1j},\cdots,x_{mj})$$

$$\text{满足约束} \qquad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant x_i \quad i=1,\cdots,m \tag{17-1}$$

在对上式作几步简化后,我们再进行详细考察。首先考虑简化成只有两种产品和两种要素的模型。将要素劳动记成 L,资本记成 K。第 j 个行业使用的劳动和资本分别记为 L_j,K_j。我们能将此简化后的模型写成:

$$\text{最大化} \qquad p_1f^1(L_1,K_1)+p_2f^2(L_2,K_2)$$

$$\text{满足约束} \qquad L_1+L_2\leqslant L,K_1+K_2\leqslant K$$

$$L_1,L_2,K_1,K_2\geqslant 0 \tag{17-2}$$

这里,L 和 K 分别是参数化固定的劳动和资本资源禀赋。

导入分析的另一个重要的简化是假定 $f^1(L_1,K_1)$ 和 $f^2(L_2,K_2)$ 是常数规模报酬。即:

$$f^j(tL_j,tK_j)\equiv tf^j(L_j,K_j)=ty_j \quad j=1,2$$

既然此关系对所有 t 成立,取 $t=\dfrac{1}{y_j}$。生产关系可变为:

$$1=f^j\left(\frac{L_j}{y_j},\frac{K_j}{y_j}\right)$$

如果我们令 $a_{Lj}=\dfrac{L_j}{y_j},a_{Kj}=\dfrac{K_j}{y_j}$,生产函数变成:

$$f^j(a_{Lj},a_{Kj})=1$$

此构造表明,只要知道一条等产量线,这里是单位产量线即代表1单位产量的等产量线,就

能完全刻划规模报酬不变的生产函数。

a_{ij} 表示用于生产 1 单位产品 j 所使用资源 i 的数量。它被称作投入—产出系数。一般来说，它们被视作变量，在很大的一个范围内变动（在等产量线渐近两个轴时范围为 0 到 $+\infty$）。

当采用此种形式的生产函数时，方程组(17-2)能变形为：

$$\begin{aligned} &\text{最大化} && Z=p_1y_1+p_2y_2 \\ &\text{满足约束} && a_{L1}y_1+a_{L2}y_2\leqslant L \\ & && a_{K1}y_1+a_{K2}y_2\leqslant K \\ & && f^1(a_{L1},a_{K1})=1 \\ & && f^2(a_{L2},a_{K2})=1 \\ & && y_1,y_2\geqslant 0 \end{aligned} \tag{17-3}$$

由这种形式，可得到国际贸易理论的许多定理（要素价格均等化，Stopler-Sameulson 和 Rybczynski 定理）。下一章，我们将在一般程度上导出这些定理。然而，这一章我们将在一个较简单的框架（固定系数方法）考察此模型。这样，我们将展开线性规划的分析，并展示此方法在经验分析上的应用。固定系数意味着 a_{ij} 都是常数，好像被自然固定在预先设定好的值上。在这种情况下，方程组(17-3)描述的模型就是线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\text{最大化} && Z=p_1y_1+p_2y_2 \\ &\text{满足约束} && a_{L1}y_1+a_{L2}y_2\leqslant L \\ & && a_{K1}y_1+a_{K2}y_2\leqslant K \\ & && y_1,y_2\geqslant 0 \end{aligned}$$

这里 p_1,p_2,L,K 和所有的 a_{ij} 都是常数。问题转变为极大化一个受线性不等式约束的线性函数，因此是线性规划问题。（一般来说，一个人能处理 n 种商品和要素。）甚至在此极为受限制形式下，此模型仍能使我们对一般均衡经济有一定认识。这将是本章的目标。首先让我们更仔细地考察固定系数方法的性质。

这种类型的生产函数在第 9 章简要讨论过。它们能写作：

$$y_i=\min\left(\frac{L_j}{a_{Lj}},\frac{K_j}{a_{Kj}}\right) \tag{17-4}$$

这种生产函数的等产量线是“L”形，如图 17-1 所示。例如，考虑函数 $y=\min(L/1,K/2)$，用 1 单位劳动和 2 单位资本可生产 1 单位产品。因此，$a_{L1}=1,a_{K1}=2$。如果某种要素使用量增加，但保持另一种要素使用量不变，产出仍然不变。例如，如果 L 增加到 2 单位，保持 K 在 2 单位，那么：

$$\min(2/1,2/2)=1$$

劳动和资本的边际产出决不会同时为 0。例如，在 A 点右边，$MP_L=0$。然而，资本的增加在那里将导致产出的增加，因此 $MP_K>0$。在 A 点，劳动和资本的边际产出是无定义的。任何往 A 点右边的移动，无论多么小，都会使得 $MP_K>0$。在 A 点左边，$MP_K=0$。然而，

$MP_L>0$。因此，生产函数有不连续的边际生产函数。不连续点正是等产量的角点，在此处由于不存在等产量线独一无二的斜率，故边际替代率 MP_L/MP_K 是无定义的。

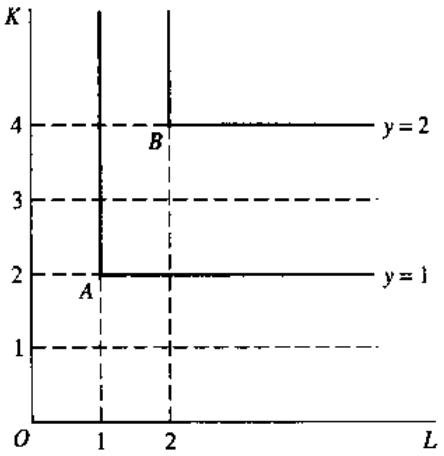

图 17-1 固定系数生产函数。生产函数的投入—产出系数是固定的。假定可导致 L 形的等产量线。生产 1 单位的产品要求一定数量的要素。在图中生产 1 单位产品要求 1 单位劳动和 2 单位资本。此投入组合标记为点 A。保持 K 为 2 单位，L 再怎么增加也不会导致产量的增加。因此，此等量线在 A 点右边是水平的，并且 $MP_L=0$。相似地，A 点以上等产量是垂直的，这是因为 $L=1$，$K>2$ 时，$MP_k=0$。如果劳动和资本以相同比例增加，那么（因为投入—产业系数是常数），产出将以相同比例增加。因此，这个函数是规模报酬不变函数的一个特例。例如，在图中，当 $L=2,K=4$ 时，产出 $y=2$。

a_{ij} 的常数性是关于生产过程高度限制性的假定。可以通过假定厂商面对好几种不同的生产系数可能（称为活动）来扩展此假设。即假定除了图 17-1 中例子所显示的投入—产出系数 $(a_{L1},a_{K1})=(1,2)$ 外，厂商还可利用系数 $(b_{L1},b_{K1})=(3,1)$ 或 $(c_{L1},c_{K1})=(2,3)$ 生产 1 单位产品。这种情况在图 17-2 中描绘出来。这三个活动分别称为 A,B,C。另外让我们假定厂商可同时选择一种或更多种生产过程或活动。即假定此活动并不是相互排斥的，而是能同时使用的。

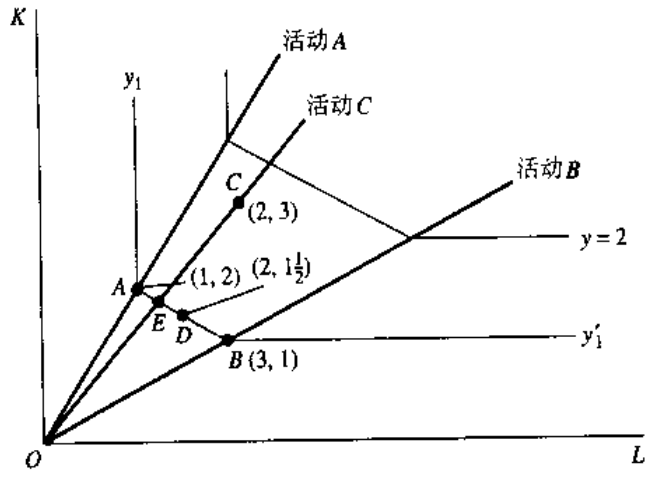

图 17-2 几种生产活动。厂商有三种不同的生产活动或技术。第一种，以 A 点表示是图 17-1 中讨论过的技术，该技术生产 1 单位产出要求 1 单位劳动和 2 单位资本。然而厂商已能用 3 单位 L 和 1 单位 K（点 B）或 2 单位 L 和 3 单位 K（点 C）生产 1 单位产品。另外，厂商可利用这些过程的凸组合。即任何投入组合的坐标位于任两种生产过程的连线上时，该组合就是可行的。因此，1 单位的产品可用 2 单位 L 和 $1\frac{1}{2}$ 单位 K（点 D）产出。这是同时使用生产过程 A 和 B 完成的，每个过程生产 1/2 单位。如果过程 A 生产 k% 且 B 生产 $(1-k)$%，那么过程 $kA+(1-k)B$ 代表线段 AB。

很明显，生产过程 C 在要素价格为正的情况下决不会被使用。因为存在一个过程 E，该过程以某种比例利用活动 A 和 B，可生产一单位产品而比 C 使用的劳动和资本都少。因此该厂商的单位产量线由从 A 点往上的垂直线、线段 AB 和从 B 点往右的水平线组成。这些

点代表生产 1 单位产出所要求的 L 和 K 的最低组合。规模报酬不变，隐含着所有其他等产量线，在 OA 和 OB 射线上存在角点。

例如，假定一单位产品可用活动 A 生产 1/2 单位，并且用活动 B 生产 1/2 单位。用活动 A 生产 1/2 单位产品要求 1/2 单位劳动和 1 单位资本（从原点到 A 点线段的中点）。相似地，采用活动 B，生产 1/2 单位产品要求 $1\frac{1}{2}$ 单位劳动和 1/2 单位资本。那么，以相同比例采用活动 A 和 B 生产 1 单位产品的活动要求投入 $2\left(=\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}\right)$ 单位劳动和 $1\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$ 单位资本。从几何上说，新的复合活动 $D(=d_{L1}+d_{K1})=\left(2.1\frac{1}{2}\right)$ 在 A 和 B 连线的中点。事实上，如果每种最初的活动能以任意比例与另一活动混合进行，那么，1 单位的产品可以由最初活动之间连线上点的坐标定义的活动产出。利用活动 A 生产 1/4 单位产品，并利用活动 B 生产 3/4 单位产品，得到 1 单位产品的活动，可以由线段 AB 与 B 点距离为 $3/4AB$ 长的点表示。

代数上，可表示如下。假定 $A=(L^A,K^A)$，$B=(L^B,K^B)$ 是生产 1 单位产品的任意两个过程。A，B 是单位产量线上的两个点。在规模报酬不变和这些过程完全可分的假定下，1 单位产品可由 A 和 B 任意权数总和为 1 的加权平均过程产出。因此，1 单位的产品可利用 $x=kA+(1-k)B$，$0\leqslant k\leqslant 1$ 产出。即 $L^x=kL^A+(1-k)L^B$，$K^x=kK^A+(1-k)K^B$。当 K 由 0 变到 1，x 描出了连结 A 和 B 线段上的点。

更一般地，假定 $x^1,\cdots,x^m$ 表示 n 维空间中 m 个点。点集合 $x=\sum_{i=1}^{m}k_ix^i$，$k_i\geqslant 0$，$\sum k_i=1$，被称作 $x^1,\cdots,x^m$ 的凸组合。图 17-2 中点 A、B、C 的凸组合将是 ΔABC 的边界及其内部。在这种类型的线性组合中，一般假定单位过程的凸组合对厂商来说是可选择的。

然而，几何上看很明显，在图 17-2 中，活动 C 不会被一个成本极小化的厂商采用。AB 上的点 E 代表活动 A 和 B 的某种混合，它比活动 C 生产 1 单位产品所用的劳动和资本要都少。活动 A 和 B 优于活动 C。活动 C 因为从不会被观察到，所以变得不相关。

一个被赋予活动 A，B，C 厂商的等产量线由以下诸线构成：(1) Ay_1，(2) AB，(3) By_1'。由于这些生产活动是线性齐次，其他水平的等产量线是此单位量线的平移，当然，角点仍在射线 OA 和 OB 上。最重要的是，得到了凸向原点的等产量图。

现在考虑成本极小化解的性质。如图 17-3 所示。$y_1=1$ 时，线段 AB 的斜率是 $-1/2$。因此，沿着这条线段，劳动的边际产值与资本的边际产值之比为常数，$MP_L/MP_K=1/2$。令 w 是劳动工资率，r 是资本租用费率。那么，成本极小化的一般相切条件是 $MP_L/MP_K=w/r$。然而，这里，如果工资率比资本租用费率的一半要多，那么，成本极小化的解为点 A。这表示如图 17-3 所示，在点 A 处，有一等成本线 wr 与 y_1ABy_1' 相切，只有资本耗费相对多的活动才被采用。如果工资率降至 $w/r<1/2$，如等成本线 $w'r'$ 所示，那么成本极小化解跳到点 B。随着要素价格的此项变动，只有劳动耗费相对多的活动才被采用。可见，要素价格从

$1/2+\varepsilon$ 到 $1/2-\varepsilon(\varepsilon>0$，可无穷小)的微小变动能够产生要素混合的重大变动。当等成本线与等产量线在整条线段 AB 上相切，这就产生了无数个解。

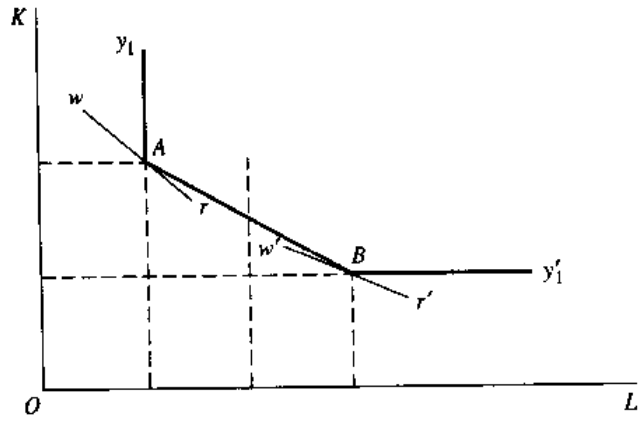

图 17-3 等产量线由线性部分组成的成本极小化。当等产量线由几条直线段拼成并形成角时，一般来说，成本极小化的解不再满足 $MP_l/MP_K=w/r$。这仅因为虽然 w/r 能从 0 变动到 $+\infty$，但等产量线仅有有限个斜率$(-\infty,-1/2,0)$。对有限的要素价格，只有 $w/r=1/2$ 时，才会出现相切的情况。如果 $w/r>1/2$，成本极小化的解为点 A。如果 $w/r<1/2$，解为 B。如果 $w/r=1/2$，AB 线段上所有的点都是解。注意，要素价格比率的变化可能根本不会导致要素组合的变化。只有 w/r 在变化时通过 $1/2$，投入组合才会发生变化。并且围绕 $1/2$ 任意微小的变化，都会使要素组合产生一个离散的变化。

让我们从代数上阐述给定的这些活动，实现某参数化产量 y^0 并极小化成本的问题。目标函数是 $\min Z=wL+rK$，其中，w 和 r 是参数化要素价格，L 和 K 是使用的劳动和资本的总量。劳动和资本能在三个过程中的任何一个中使用。将用在过程 A,B,C 中的劳动量表示 L_A,L_B,L_C，同样地，将用在 A,B,C 中的资本量表示为 K_A,K_B,K_C。因此：

$$L=L_A+L_B+L_C,K=K_A+K_B+K_C。$$

如果采用过程 A，系数为$(1,2)$，那么 $L_A=K_A/2,y_A=L_A$。同样地，对过程 B 而言，$L_B=3K_B,y_B=L_B/3$。对过程 $C,L_C/2=K_C/3,y_C=L_C/2$。问题可变为：

$$\text{最小化}\qquad w(L_A+L_B+L_C)+r\left(2L_A+\frac{L_B}{3}+\frac{3}{2}L_C\right)$$

$$\text{满足约束}\qquad L_A+\frac{L_B}{3}+\frac{L_C}{2}\geqslant y^0 \tag{17-5}$$

$$L_A,L_B,L_C\geqslant 0$$

虽然(17-5)中提出的问题涉及简单的线性方程，但解起来并不容易。拉格朗日函数是：

$$\mathscr{L}=w(L_A+L_B+L_C)+r\left(2L_A+\frac{L_B}{3}+\frac{3}{2}L_C\right)+\lambda\left(y_0-L_A-\frac{L_B}{3}-\frac{L_C}{2}\right)$$

一阶条件：

$$w+2r-\lambda\geqslant 0;\text{如果}>,L_A=0$$

$$w+\frac{r}{3}-\frac{\lambda}{3}\geqslant 0;\text{如果}>,L_B=0$$

$$w+\frac{3}{2}r-\frac{\lambda}{2}\geqslant 0;\text{如果}>,L_C=0 \tag{17-6}$$

$$y^0-L_A-\frac{L_B}{3}-\frac{L_C}{2}\leqslant 0;\text{如果}<,\lambda=0 \tag{17-7}$$

像在新古典情况下，拉格朗日乘子可解为边际成本。既然，当采用过程 A 时，$MC=w+2r$，采用过程 B 时，$MC=3w+r$，采用过程 C，$MC=2w+3r$，方程(17-6)说的是在成本极小化点，惟一被采用的过程是使得 MC 最小的过程(除非几个是一样小)。当然，对线性齐次函数来说，因此此过程极小化总成本。但这并不有助于我们找到解，即发现使用哪一个过程为宜。这种问题要通过算法求解。即采用某种迭代程序在有限步后接近解。此算法必须能揭示哪一个约束条件可忽略。如果没有某种搜索程序(在该程序中参数的变化使得程序逼近解)的运行，这些通常是不可能的。

经济行为模型中的常系数假定，一般被认为与时限为多期的事实相背离。然而，如果该假定扩大了模型的可处理性，它仍然是有用的。正如第 1 章所指出的一样，假定一直是现实的简化，并溶入改善模型和理论的可处理性的分析中。在线性模型情况下，此假定的益处在于，存在一个完美的容易用来求解的算法。假定的现实性在这里被可处理性替代。现在，我们将考察此类模型和它们的解。

17.2　线性活动分析模型：一个特别例子

在这一节，我们将考察一个具体的线性规划例子，并用它去例证此类模型的一般性质。在下一节中，将给出一般性的定理和方法体系。考虑 1 个厂商(或 1 个由许多同质厂商组成的经济体)，该厂商生产 2 种商品，食物 y_1 和衣服 y_2。现在假定生产这些产品要使用 3 种投入：H—土地；L—劳动；K—资本。这些投入必须以固定比例组合来生产 1 单位食物或衣服。具体来说，假定生产 1 单位食物需要 3 英亩土地，2 个工作时和 1 台机器(单位资本)。生产 1 单位衣服需要 2 英亩土地，2 个工作时，2 台机器。此技术可以下列投入—产出矩阵 A 表示：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \tag{17-8}$$

其中，a_{ij} = 生产 1 单位产品 j 使用要素 i 的量：$i=H,L,K$；$j=1,2$。

既然涉及 3 种要素和 2 种产品，最终的投入—产出矩阵含有三行二列。这些系数是固定的，即固定在它们的给定值。该厂商或经济体没有其他可选择的过程或活动。

(注意，更一般的模型，被称作列昂惕夫投入产出模型，允许投入和最终消费为变量。例如，某些食物可用来生产衣服，反过来也成立。系数矩阵不得不被扩大。如果 $B=(b_{ij})$ 表示生产 1 单位产品 j 所使用产品 i 的量，如果 $C=(c_1,\cdots,c_n)$ 表示这些产品的最终消费向量，并且，如果 $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 商品的总产出，那么 $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j+C_i=x_i, i=1,\cdots,n$。以矩阵表示，$BX+C=X$，或 $C=(I-B)X$ 其中 I 为单位阵。维持消费 C 需要的生产 X 是 $X=$

$(I-B)^{-1}C$。可以证明只有$(I-B)^{-1}=I+B+B^2+\cdots$是收敛级数时，$(I-B)^{-1}$存在。

现在假定该厂商被赋予 54 英亩地，40 个工作时，35 台机器，这些代表资源约束。进一步，假定食物每单位 40 美元，衣物每单位 30 美元。即 $p_1=40$，$p_2=30$。

现在我们可以说该厂商或经济体在资源约束下极大化食物和衣服的产值。数学表达式就是：

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} && z=40y_1+30y_2 && \\
&\text{满足约束} && 3y_1+2y_2\leqslant 54 && \text{土地约束} \\
& && 2y_1+2y_2\leqslant 40 && \text{劳动约束} \\
& && y_1+2y_2\leqslant 35 && \text{机器约束} \\
& && y_1,y_2\geqslant 0 &&
\end{aligned}
\tag{17-9}
$$

在数学上，此问题是在线性不等式和选择变量非负的约束下极大化一线性函数。(17-9)说的是厂商最多能用 54 英亩土地，40 个工作时，35 台机器。然而，使用的数量可以少于以上数量。即厂商并不需要耗尽资源。我们能立即看出，三种资源不可能都被用尽。在这种情况下，(17-9)中的约束条件变为只有两个未知量的三个独立方程。我们如何发现哪一种资源被耗尽呢？

图解法

因为只存在两个选择变量 y_1，y_2，此线性规划的解可画图得出。在图 17-4 中，y_1 为横轴，y_2 为纵轴。既然产出被限定为非负，只有第一象限才是相关的。如果所有土地都将被使用，能被生产的食物和衣服将满足 $3y_1+2y_2=54$。这里图 17-4 中标示为土地的线段其横

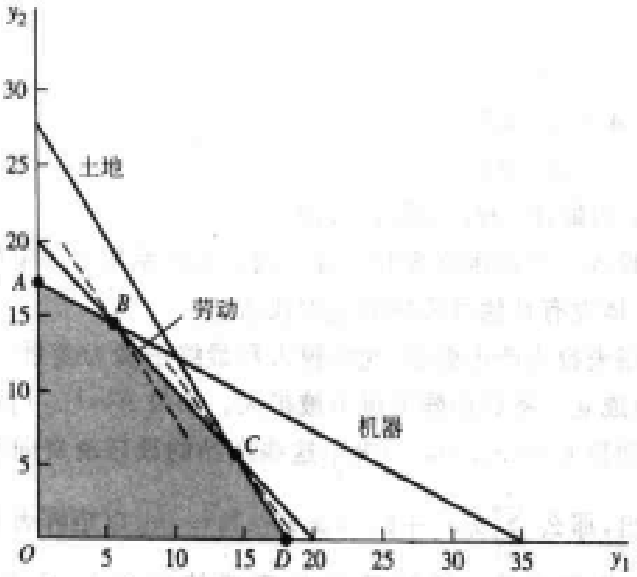

图 17-4 线性规划问题的图解。线性规划问题的可行区域是同时满足约束条件点的集合。在上述模型中，可行区域是 $OABCD$。沿着 AB，资本或机器约束条件 $y_1+2y_2=35$ 是紧的，但土地和劳动约束是松的。这两个条件在该处是位于资本约束条件右上方(除了 B 点外)。在点 B，资本和劳动约束条件同时是紧的，而在 BC 上(除了 C 点)，只有劳动约束条件是紧的，即以等式形式成立。相似地，沿 CD(除 C 点外)，仅土地约束以等式成立。可行区域是个凸集。如果 $OABCD$ 中任意两点相连，该边线上所有点也在 $OABCD$ 中。

轴截距为 18，纵轴截距为 27。然而，约束条件仅为不超过 54 单位的土地可以使用，可能更少。因此在土地约束下所有可能的产出组合集是该线段与两轴生成的三角面积，不可能得到位于三角形外的产出组合。

然而，上述条件只不过是三个约束条件之一（除了非负性条件之外）。另外，厂商至多可使用 40 个工作时，这隐含着位于 $2y_1+2y_2=10$ 线以外的产出组合是不可能的。产出进一步被限制在这条线与两正轴所组成的三角形内（包括边）。最后，由于只可使用 35 台机器，所有产出必须位于线段 $y_1+2y_2=35$ 与两轴生成的三角形中。

满足约束条件（包括非负性）的产出组合集被称作问题的可行区域。该问题的可行区域在图 17-4 中为阴影区 $OABCD$。它被称作可行区域仅因为给定资源约束，该集合中的点代表所有可行产出。

线性规划问题的解在等收益线 $z=40y_1+30y_2$，保持与 $OABCD$ 相触做远离 O 点平移所达的最远处得到。此问题的解为点 C。等收益线的斜率为 $p_1/p_2=40/30=4/3$。它比 $BC(1)$ 大，比 $CD\left(1\frac{1}{2}\right)$ 小。不存在相切（斜率相等）现象。在点 C，对任一产品，产出增加则 $MR<MC$，产出减少则 $MR>MC$。因为 $OABCD$ 是凸集，该极大值是最大值。

所有线性规划问题的可行区域都是凸集。记得 14 章曾说过，凸集是任何自身内两点连线仍在自身内部的集合。可行区域是凸的是因为约束条件是线性的，（虽然是在弱意义上）。如 14 章所述，如果 $g^j(x_1,\cdots,x_n)$ 是凹函数，由 $g^j\geqslant 0, j=1,\cdots,m$ 定义的区域是凸集。我们将在下一节详细证明此点。因此，我们知道，如果在（凸）可行区域上实现该函数的局部极大值，它也是整体极大值，即最大值。并且，如果极大值不是惟一的，那么，在任意两极大值的连线上存在无限个相等的局部极大值。

现在让我们转向问题的解。目标是在可行区域 $OABCD$ 中选择点 (y_1,y_2)，使得线性函数 $z=40y_1+30y_2$ 极大。等收益线（在三维以上空间为超平面）离原点越远其值越大。等收益线有斜率 $-1\frac{1}{3}$。过点 B 由破折号组成的线就是一条等收益线。它明显不是极大的 z，事实上，z 的极大值在 $z=40y_1+30y_2$ 通过点 C 时得到。在点 C，只有土地和劳动约束条件是紧的。点 C 位于机器限制区域内，即 $y_1+2y_2<35$。y_1 和 y_2 可以通过不考虑机器约束而将土地和劳动约束当做等式同时求解得出。即点 C 是：

$$3y_1+2y_2=54 \text{ 和 } 2y_1+2y_2=40 \tag{17-10}$$

的交点。求解可得出：

$$y_1^*=14, y_2^*=6, z^*=40(14)+30(6)=740。$$

我们也可确定，如何将资源分配给各个产业或最终产品，既然 $y_1=14$，用来生产食物所需的土地、劳动和资本分别是 $a_{11}y_1, a_{21}y_1, a_{31}y_1$，或 42 英亩、28 工作时、14 台机器。生产衣服 y_2，需土地 $a_{12}y_2$，劳动 $a_{22}y_2$，资本 $a_{32}y_2$，或因 $y_2=6$，12 英亩，12 工作时，12 台机器。加总使用 $42+12=54$ 英亩土地，$25+12=40$ 工作时，$14+12=26$ 台机器。土地和劳动被充

分使用，而机器还有剩余，正如机器约束条件是松的所表明的一样。

在几何上，很明显在点 C，z 取得极大值。直观上也很明显，C 是 z 的整体极大值点。后一个断言是由于 $OABCD$，$z=40y_1+30y_2$ 是拟凸函数。定理对这样的函数在凸集上求极大值的影响在此例中从几何上看很明显。（记住，一个例子当然说明不了什么！）

同样，从经济推理来说，点 C 是解也是很明显的。可行区域的边界线，折线 $ABCD$，是该厂商或经济体的生产可能性边界。此边界的斜率代表多得 1 单位 y_1 所要付的边际成本，在线段 AB 上，边际成本是 1/2 单位的 y_2。在 B 点，生产 5 单位 y_1，花费了 $2\frac{1}{2}\left(=17\frac{1}{2}-15\right)$单位的 y_2。然而，生产 y_1 的边际收益，是等收益线的斜率或 $1\frac{1}{3}$单位的 y_2。既然对 y_1 而言，$MR>MC$。多生产 y_1，则有利。当到达 B 点时，边际成本发生离散变化。在 BC 部分，边际成本＝1，这仍然小于边际收益，因此沿着 BC 向 C 点移动仍是有利的。然而，不能超过 C 点。在 CD 上，y_1 的 MC 是 $1\frac{1}{2}$，大于 $MR=1\frac{1}{3}$。边际上不存在 $MC=MR$ 的点。然而，存在一点 C，就 y_1 而言，在 C 的左边 $MC<MR$，在 C 右边，$MC>MR$。即在点 C，$y_1=14$。当 $y_1<14$，$MC<MR$。而当 $y_1>14$，$MC>MR$。（由于边界线在 $y_1=14$ 为角，即边界线在此处不可微，边际成本在此处是无定义的。）因此我们无法找到定义目标函数极值的边际等式，但是，我们能够找到一系列边际不等式，表明向任何方向的移动都会减少厂商的利润。

边界等式存在的例子是有的。假定 p_1 为 30 美元，而不是 40 美元。那么 y_1 的 $MR=1$，这正是 BC 部分的 MC。在这种情况下，此线性规划存在无穷个解，等收益线与 BC 相切。因此，BC 上所有点都是问题的解。这正是一个凸集上定义的凹函数。如果存在两个局部极大值，则连接这两极大值的线段上所有点都是极大值的情况。

对经济学家来说，对这个问题的兴趣，不仅仅在于解的求出。我们已经看出，在约束极大化模型中，新变量拉格朗日乘子，赋予约束条件一些值，例如，货币收入的边际效用，或生产的边际成本。虽然我们在分析中没有将这些值做为拉格朗日乘子导入，但它们也出现在这里。

既然土地是稀少的，产出就没有土地丰富时的大。具体来说，假定该厂商或经济拥有 55 英亩土地而不是 54 英亩，这将怎么影响产值？产出的最大值将会在约束条件 $3y_1+2y_2=55$（土地）和 $2y_1+2y_2=40$（劳动）的交点 C' 出现。

求解，$y_1^*=15$，$y_2^*=5$。总收入 $z^*=40(15)+30(5)=750$，增加了 10 美元。

土地额外增加 1 英亩会导致收入增加 10 美元，产生了土地的一个影子价格，或归因租金。很明显，土地的边际产值是 10 美元。在竞争性经济中，土地每英亩要收租金 10 美元。另外，只要收入的极大值是仅由土地和劳动约束条件决定的，那么土地的边际产值将是常数。

假定土地被增加到 $54+\Delta H$。那么由：

$$3y_1+2y_2=54+\Delta H \quad 2y_1+2y_2=40 \tag{17-11}$$

得：

$$y_1^*=14+\Delta H \quad y_2^*=6-\Delta H$$

以前 $z^*=740$。新的 z^* 是：

$$z^*+\Delta z^*=40(14+\Delta H)+30(6-\Delta H)=740+10\Delta H$$

因此，$\Delta z^*=10\Delta H$，或取极限：

$$\frac{\partial z^*}{\partial H}=10 \tag{17-12}$$

这正是包络定理，它指的是目标函数对代表资源约束的参数的变化率是此资源的归因值。

我们将这第一种要素土地的归因值或影子价格记成：

$$u_1=\frac{\partial z^*}{\partial H}=10 \tag{17-13a}$$

注意，u_1 在 10 美元是常数。它并不依赖土地或资源约束参数化的值，这些值分别是 54 英亩或 40 工作时。这项结果是 Stolper-Sameulson 定理和要素价格均等化定理的基础。在下一章中，我们将证明对线性齐次生产函数的一般情况而言，要素价格仅是产出价格的函数。因此，土地的要素价格在初始解的某个邻域内与资源禀赋无关是常数。

在下一节中，我们将更清晰地了解要素价格怎么会转变成拉格朗日乘子（那里称作对偶变量）。然而，在方程组(17-11)的求解中，注意 ΔH 必须小于 6。否则，y_2 将是负数。这些问题的代数解法依赖于这些变化。当 ΔH 比 6 大时，解将移向可行区域的一个新的角，并且资源的边际值将会变化。（事实上，土地的边际值将降为 0。为什么?）

以相似的方法，我们可得此经济体中的归因工资率。

如果劳动量增加 ΔL，新产值是由：

$$3y_1+2y_2=54 \qquad 2y_1+2y_2=40+\Delta L$$

所决定。

因此：

$$y_1^*=14-\Delta L \quad y_2^*=6+1\frac{1}{2}\Delta L$$

因此：

$$z^*+\Delta z^*=40(14-\Delta L)+30\left(6+1\frac{1}{2}\Delta L\right)=740+5\Delta L$$

减去 $z^*=740$，可得 $\frac{\Delta z^*}{\Delta L}=5$，或取极限：

$$u_2=\frac{\partial z^*}{\partial L}=5 \tag{17-13b}$$

劳动的边际值是 5，竞争性经济将导致劳动力接受此工资率。这里，既然 $y_1^*=14-\Delta L$，则 $\Delta L\leqslant 14$。如果劳动增加超过 14 工作时，那么可行区域的一个新角将被触及，要素的边际值将会变化。（事实上，如果 $\Delta L\geqslant 4.5$，劳动的边际值将降为 0。为什么?）最后，考虑如果机器

增加会对 z^* 有什么影响？机器约束目前是松的，尽管有 35 台机器可用，但只使用了 26 台。额外增加一台机器并不会增加收入，它的边际收益为 0。机器虽然有限，但不稀少。它们是一种免费商品。因此：

$$u_3=\frac{\partial z^*}{\partial K}=0 \tag{17-13c}$$

不要认为资本的边际评价是 0，对经济体来说就是多余的。事实上，使用了 26 台机器。另外，固定系数的生产函数要求每种要素都有一定数量。资本的边际为 0 是因为额外的 9 台机器不能与土地和劳动结合起来进行生产，这是固定生产技术的特点。资本的总产出决不是 0。资本只是在考虑的边界 $y_1=14, y_2=6$ 上是多余的。

以上现象是要素价格均等化定理的特例。产出价格不变时，当禀赋变化时要素价格不变。这种状态维持到禀赋变化充分大以至于引入新的要素或以前使用的要素不再使用。

17.3 RYBCZYNSKI 定理

现在考虑土地 H 和劳动 L 变化对产出的影响。$y_1^*=14+\Delta H, y_2^*=14-\Delta H$，并且 $y_1^*=14-\Delta L, y_2^*=6+\frac{3}{2}\Delta L$。将它们合并为全微分表达：

$$\mathrm{d}y_1^*=\mathrm{d}H-\mathrm{d}L \qquad \mathrm{d}y_2^*=-\mathrm{d}H+\frac{3}{2}\mathrm{d}L$$

这些结果是 Rybczynski 定理的例子。这个重要的定理说的是，如果某种资源的禀赋增加，使用此种资源强度最大的行业将增加它的产出而另一个行业将减少它的产出。相对要素强度是用每个行业中要素使用量的比值来衡量。例如，$L_1/K_1, L_2/K_2$ 行业 1 和 2 的劳动资本比值，可以互相比较。比值高的行业是劳动相对密集行业，另一个是资本相对密集行业。然而，注意：

$$\frac{L_j}{K_j}=\frac{L_j/y_j}{K_j/y_j}=\frac{a_{Lj}}{a_{Kj}}$$

因此，要素强度也可由 a_{ij} 的比值决定。

在目前这个例子中，与解有关的要素就是土地和劳动。因为 $\frac{a_{11}}{a_{21}}>\frac{a_{12}}{a_{22}}$，即 $1\frac{1}{2}>\frac{2}{2}$，食物产业 y_1 是土地相对密集型，服装 y_2 是劳动相对密集型。当土地禀赋增加 $\mathrm{d}H$ 时，食物产量增加 $\mathrm{d}H$，而服装产量减少 $\mathrm{d}H$。另一方面，如果劳动禀赋增加 $\mathrm{d}L$，劳动密集型产业 y_2 将增加 $1\frac{1}{2}\mathrm{d}L$，而食物产出将减少 $\mathrm{d}L$。这些结果在图 17-5 中显示出来。

代数上，Rybczynski 定理起源于联立方程组的求解。在我们这个例子中，该模型的解由下式决定：

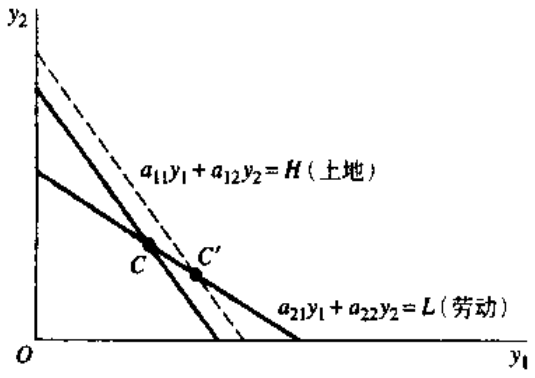

图 17-5　有土地和劳动约束的线性模型中的 Rybczynski 定理。由于资本约束是松的，被忽略了。极大值在点 C 实现。模型中的土地约束斜率为 $-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-1\frac{1}{2}$。劳动约束条件的斜率是 $-a_{21}/a_{22}=-1$。既然 $a_{11}/a_{12}>a_{21}/a_{22}$，$a_{11}/a_{21}>a_{12}/a_{22}$，或产业 1 食物是土地密集型。产业 2 服装是劳动密集型产业。注意，当土地 H 的数量增加时，问题的解如何变化。土地约束往右移，产生一个新的产出组合 C'。在 C'，y_1 的产出是增加了（y_1 是土地密集商品），而劳动密集的商品产出减少了。

$$a_{11}y_1+a_{12}y_2=H \quad \text{土地} \tag{17-14a}$$

$$a_{21}y_1+a_{22}y_2=L \quad \text{劳动} \tag{17-14b}$$

利用克莱姆法则，可得：

$$y_1=\frac{a_{22}H-a_{12}L}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad y_2=\frac{-a_{21}H+a_{11}L}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{17-15}$$

要素强度决定了分母的符号。例如，如果食物产业是相对劳动密集，那么 $H_1/L_1>H_2/L_2$。这等价于 $a_{11}/a_{21}>a_{12}/a_{22}$ 或 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$。（$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 明显是关键的。否则，同等要素强度时，约束条件相互平行，即线性独立。在这种情况下，此模型不存在解。一个约束条件必须视作松的而忽略掉。）如果分母是正的，那么由简单的微分可得：

$$\frac{\partial y_1}{\partial H}=\frac{a_{22}}{(+)}>0 \qquad \frac{\partial y_1}{\partial L}=-\frac{a_{12}}{(+)}<0$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial H}=-\frac{a_{21}}{(+)}<0 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial L}=\frac{a_{11}}{(+)}>0 \tag{17-16}$$

这些就是 Rybczynski 结果。另外，当某种要素禀赋变化时，该要素相对密集的产出变化的绝对值比例比要素的大。例如：

$$y_1=k_1H+k_2L$$

其中：

$$k_1=\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$k_2=\frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

因此：

$$\frac{\Delta y_1/y_1}{\Delta H/H}=\frac{H}{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial H}=\frac{H}{y_1}k_1=\frac{k_1H}{k_1H+k_2L}$$

既然 $k_2<0$，$k_1H>k_1H+k_2L$

因此：

$$\frac{H}{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial H}>1$$

L 变化导致 y_2 变化可得同样的结果。产出对它们所使用相对密集的要素变化的反应是有

弹性的(绝对弹性大于 1)。

17.4 STOLPER-SAMUELSON 定理

只要 p_1/p_2 小于 3/2 大于 1,此线性模型的解仍停留在图 17-4 的点 C。在我们目前的例子中,$p_1/p_2=40/30=4/3$。让我们计算一下,服装价格增加 10%,到 $p_2=33$ 时,对要素价格的影响。

新的影子价格能像以前一样计算,然而,考虑 y_1 和 y_2 单位成本。(a_{ij})矩阵的第一列给出了生产 1 单位 y_1 所需要的土地、劳动和资本。y_1 的单位要素成本因此是:

$$a_{11}u_1+a_{21}u_2+a_{31}u_3=3(10)+2(5)+1(0)=40=p_1 \tag{17-17a}$$

相似地,(a_{ij})矩阵的第二列给出生产 1 单位 y_2 所需要的土地、劳动和资本数量。y_2 的单位要素成本因此是:

$$a_{12}u_1+a_{22}u_2+a_{32}u_3=2(10)+2(5)+2(0)=30=p_2 \tag{17-17b}$$

单位要素成本等于产出价格。方程组(17-7)代表 0 利润条件。既然生产函数展现出规模报酬不变的性质,0 利润的出现是正常的。既然在此例中在点 C,$u_3=0$(资本的边际产值为 0),0 利润条件是:

$$\begin{aligned} a_{11}u_1+a_{21}u_2&=p_1\\ a_{12}u_1+a_{22}u_2&=p_2 \end{aligned} \tag{17-18}$$

两个方程两个未知数,我们利用已知数据可解出 u_1,u_2。(虽然如此,但要记住,仅当解是在点 C 时,这时方程才是适用的,如果解在点 B,u_1 将是 0,并且方程组(17-8)将涉及系数 a_{31},a_{32}。)最重要的是,这些方程组的系数是方程组(17-14)系数的转置。惟一不同的是 a_{12} 和 a_{21} 交换了一下。因此,要素价格与产出价格的代数关系几乎等于实物产出和资源禀赋的关系。

利用克莱姆法则解方程组(17-18)可得:

$$u_1=\frac{a_{22}p_1-a_{21}p_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{2p_1-2p_2}{2}=p_1-p_2 \tag{17-19a}$$

$$u_2=\frac{a_{11}p_2-a_{12}p_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{3p_2-2p_1}{2}=\frac{3}{2}p_2-p_1 \tag{17-19b}$$

注意变化的方向。如果 p_1 增加,那么土地价格 u_1 增加,而劳动价格下降。同样的,如果劳动密集商品 y_2 的价格增加,土地价格下降,而劳动价格上升。由 $p_1=40$,$p_2=30$,及(17-13)可得 $u_1=10$,$u_2=5$。当 $p_1=40$,$p_2=33$ 时,$u_1=7$,$u_2=9.5$。劳动密集商品的价格增加 10%时,土地价格下降 30%,而劳动的价格几乎翻倍,这些结果被称 STOLPER-SAMUELSON 定理。

STOLPER-SAMUELSON 定理说的是,如果劳动密集商品的价格上升,劳动的价格将不仅上升,而且比产出价格上升更高的比例,另一个要素价格下降,但其下降比例并不必然

就比产出价格上升的比例高。价格的弹性反应是相同的。这对偶性可以从方程组(17-14)和(17-19)结构的相似中看出。既然代数上是相等的(除了 a_{12} 和 a_{21} 交换外)，我们就不重复它了。

要素价格的变化方向能从图 17-6 中看出。方程组(17-7)画在 u_1u_2 平面上。较陡的线是方程(17-17a)。这条线的斜率是 $-a_{11}/a_{21}=-3/2$。另一条线是方程(17-17b)，它的斜率是 $-a_{12}/a_{22}=-1$。两线性交点 P，代表 u_1 和 u_2 解的值。现在假定 p_2 增加。几何上由(17-17b)线的平行移动表示，如图中点划线所示。新的交点是 P'。在 P' 点，u_2 增加了，而 u_1 减少了。再一次，劳动密集的商品价格上升将提高劳动的价格，降低另一种要素，在此例中是土地的价格。

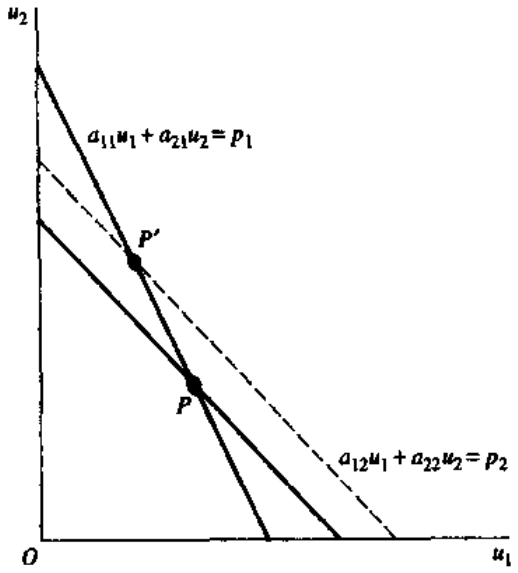

图 17-6　由(17-17)式表示的线性模型中的 STOLPER-SAMUELSON 定理。资本是充足的，$u_3=0$，因此可从图中忽略。两条线的斜率取决于要素强度。对 y_1 而言，0 利润方程的斜率是 $-\frac{a_{11}}{a_{21}}$。对 y_2 而言，斜率是 $-\frac{a_{12}}{a_{22}}$。给定例子中的数字，$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{3}{2}$，$\frac{a_{12}}{a_{22}}=1$，因此，$y_1$ 食物是土地密集型，而 y_2 服装是劳动密集型。在这些条件下，p_2 的增加，在图中即(17-17b)的平行移动，产生了一个新解 p'。它降低了 u_1 且提高了 u_2。总之，比如说，如果劳动密集型商品价格上升，劳动的价格将上升，而另一要素(这里是土地)的价格将下降。

17.5　对偶问题

让我们总结一下上述问题的分析过程。问题是：

$$
\begin{array}{lll}
\text{最大化} & z=40y_1+30y_2 & \\
\text{满足约束} & 3y_1+2y_2\leqslant 54 & \text{土地约束} \\
 & 2y_1+2y_2\leqslant 40 & \text{劳动约束} \\
 & y_1+2y_2\leqslant 35 & \text{资本约束} \\
 & y_1,y_2\geqslant 0 &
\end{array}
\tag{17-19}
$$

约束条件中的系数 a_{ij} 代表生产 1 单位产品 j 所要使用的要素 i 的数量。这个线性规划的解是 $y_1^*=14$，$y_2^*=6$。在这一点，土地和劳动约束是紧的，但资本是松的。即：

$$3y_1^* + 2y_2^* = 54 \quad 2y_1^* + 2y_2^* = 40 \quad y_1^* + 2y_2^* < 35$$

通过考虑，如果要素禀赋增加收入变化多少，可将边际评价或影子价格归因子三种要素。令 u_1, u_2, u_3 分别代表土地、劳动和资本的影子价格，我们可知在点 C 有：

$$u_1 = 10, u_2 = 5, u_3 = 0$$

也可知 y_1 和 y_2 的单位要素成本分别等于产出价格 40 美元和 30 美元。对食物 y_1 而言，(a_{ij})矩阵的第一列给出了生产 1 单位 y_1 所需要的土地、劳动和资本数量。因此，给定上述影子价格，y_1 的单位成本是：

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 = 10(3) + 5(2) + 0(1) = 40 = p_1$$

同样，对 y_2 而言，总单位要素成本是：

$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 = 10(2) + 5(2) + 0(3) = 30 = p_2$$

此线性模型隐含下列 0 利润条件：

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 = p_1$$

$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 = p_2$$

一般而言，单位要素成本要大于或等于商品的价格。如果单位成本小于价格，线性规划问题不存在有限解。增加这种商品的产出将导致总收益的持续增加。然而，要素成本在一有限解中超过价格是可能的。那么，我们应预期此商品的产出为 0(负产出是不允许的)。

在上述分析中存在着对称性或对偶性。在最初的模型中，收入被极大化，约束条件是有限的资源禀赋所导致的约束。当这些约束以等式形成成立时，一个非负的，通常是正的新变量，影子价格出现了。当约束条件是松的时，即严格不等式成立时，此价格为 0。

然而，达到一个真实的收益极大值也隐含着单位成本至少大于产出价格：

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + a_{3j}u_3 \geqslant p_j, \quad \text{对所有 } j \text{ 成立} \tag{17-20}$$

另外，收入最大化隐含着如果这个关系以严格不等式成立，产出 y_j 将是 0。另外，$y_j \geqslant 0$。这与约束条件是涉及 y_1, y_2 的最初资源约束，并且新的对偶变量是影子价格 u_1, u_2, u_3 时的“代数”相同。先前的对称性或对性的存在，是因为 u_i 是原始问题的拉格朗日乘子，而产出 y_1 和 y_2 是相关联的带约束极小值问题的拉格朗日乘子。这是 Kuhn-Tucker 鞍点定理的例子。让我们看看这是如何产生的？

将最初的收益极大化问题(17-9)记作原初问题。当我们用 u_1, u_2, u_3 表示与三个资源约束相关联的拉格朗日乘子时，此问题的拉格朗日函数是：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & p_1y_1 + p_2y_2 + u_1(H - a_{11}y_1 - a_{12}y_2) \\ & + u_2(L - a_{21}y_1 - a_{22}y_2) + u_3(K - a_{31}y_1 - a_{32}y_2)\end{aligned} \tag{17-21}$$

Kuhn-Tucker 极大值的一阶条件是 $\mathcal{L}$ 对 y_1 和 y_2 的一阶偏导是非负的，并且如果 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j} < 0$，$y_j = 0$。在内点解，$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j} = 0$。如果在 $y_j = 0$ 取到极大值，$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j} \leqslant 0$。将这些条件应用到拉格朗日函数(17-21)上，可得：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_1}=p_1-a_{11}u_1-a_{21}u_2-a_{31}u_3\leqslant 0 \quad \text{如果}<,y_1=0 \tag{17-22a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_2}=p_2-a_{12}u_1-a_{22}u_2-a_{32}u_3\leqslant 0 \quad \text{如果}<,y_2=0 \tag{17-22b}$$

这些一阶条件正好是刚讨论过的非正的利润条件(17-20)。剩下的一阶条件当然是 $\mathscr{L}$ 对 u_1,u_2,u_3 微分得到的不等式约束：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_1}=H-a_{11}y_1-a_{12}y_2\geqslant 0 \quad \text{如果}>,u_1=0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_2}=L-a_{21}y_1-a_{22}y_2\geqslant 0 \quad \text{如果}>,u_2=0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_3}=K-a_{31}y_1-a_{32}y_2\geqslant 0 \quad \text{如果}>,u_3=0$$

这些正好是资源约束，只不过多了附加规定，如果资源约束是松的，此要素归因的影子价格为 0。这与我们以前的推理和结果一致。

重新排列(17-21)各项，可得：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&Hu_1+Lu_2+Ku_3+y_1(p_1-a_{11}u_1-a_{21}u_2-a_{31}u_3)\\&+y_2(p_2-a_{12}u_1-a_{22}u_2-a_{32}u_3)\end{aligned} \tag{17-23}$$

此函数形式能解释成是目标函数是 $w=Hu_1+Lu_2+Ku_3$ 总资源禀赋的值，选择变量是 u_1，u_2,u_3 问题的拉格朗日函数。产出 y_1 和 y_2 出现为利润约束的拉格朗日乘子。

一般认为，一个竞争性的经济能有效利用资源。我们应预期在此模型中收益极大化等价于受利润非正约束的资源总价值极小化。拉格朗日函数(17-23)，如果对 u_1,u_2,u_3 求偏导，可得：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_1}=H-a_{11}y_1-a_{12}y_2\geqslant 0 \quad \text{如果}>,u_1=0 \tag{17-24a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_2}=L-a_{21}y_1-a_{22}y_2\geqslant 0 \quad \text{如果}>,u_2=0 \tag{17-24b}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_3}=K-a_{31}y_1-a_{32}y_2\geqslant 0 \quad \text{如果}>,u_3=0 \tag{17-24c}$$

并且：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_1}=p_1-a_{11}u_1-a_{21}u_2-a_{31}u_3\leqslant 0 \quad \text{如果}<,y_1=0 \tag{17-25a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_2}=p_2-a_{12}u_1-a_{22}u_2-a_{32}u_3\leqslant 0 \quad \text{如果}<,y_2=0 \tag{17-25b}$$

这些正是由原初问题得出的资源和非正的利润条件。

因此下两个问题有同样的一阶条件：

1. 原初问题。

最大化　　$z=p_1y_1+p_2y_2$

满足约束

$$a_{11}y_1+a_{12}y_2\leqslant H$$
$$a_{21}y_1+a_{22}y_2\leqslant L$$
$$a_{31}y_1+a_{32}y_2\leqslant K$$
$$y_1,y_2\geqslant 0$$

2. 对偶问题。

最小化 $w=Hu_1+Lu_2+Ku_3$

满足约束

$$a_{11}u_1+a_{21}u_2+a_{31}u_3\geqslant p_1$$
$$a_{12}u_1+a_{22}u_2+a_{32}u_3\geqslant p_2$$
$$u_1,u_2,u_3\geqslant 0$$

另外，当求出解后，这两个问题得到的目标函数值是相同的。在这个模型中，这等于说总产值等于资源有效利用时的总资源禀赋值。在以前的例子中，产出的最大值是：

$$z^*=p_1y_1^*+p_2y_2^*=40(14)+30(6)=740$$

正如以前的计算一样，该点资源禀赋的总值是：

$$w^*=Hu_1^*+Lu_2^*+Ku_3^*=54(10)+40(5)+35(0)=740$$

与原初问题一致。

加总或产出耗尽定理是目标函数和约束函数齐次性的结果 。如 14 章中所示，当极大值问题中的目标函数和约束函数是相同齐次时（约束条件以 $g^j(x_1,\cdots,x_n)\leqslant k^j$ 出现），那么，间接目标函数 $\phi(k^1,\cdots,k^m)$ 是 k^j 的一次齐次函数。因此，由欧拉定理：

$$z^*=\frac{\partial z^*}{\partial H}H+\frac{\partial z^*}{\partial L}L+\frac{\partial z^*}{\partial K}K=u_1^*H+u_2^*L+u_3^*K=w^*$$

其中，w^* 是对偶目标函数（总要素成本）的极小值，且 u_i^* 是实现极小值的 u_i。

这令人吃惊的对偶性首先被 Koopmans 和其他人注意和研究。他们将一个纯粹数学的难题转化成一个有趣的经济模型。

一般来说，考虑线性规划问题：

最大化

$$z=\sum_{j=1}^{n}p_jx_j$$

满足约束

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\quad i=1,\cdots,m \tag{17-26}$$
$$x_j\geqslant 0\quad j=1,\cdots,n$$

既然是不等式约束，m 没有必要小于 n。这些约束中某些可能是松的，虽然难以发现哪一个是松的。事实上，求解就是要找出哪些约束是松的，哪些约束是紧的（详细算法在下节给出）。

上述问题可用矩阵形式表达，将 x_j 的列向量记作：

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

p_j 的系数矩阵记作：

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$$

b_i 系数向量记作：

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

技术系数 a_{ij} 的矩阵记作：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}\geqslant 0$，意味着 $x_j\geqslant 0, j=1,\cdots,n$。

一般线性规划问题可写作：

$$\begin{aligned}&\text{最大化} && z=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}\\ &\text{满足约束} && \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}\\ & && \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}\qquad(17\text{-}27)$$

与线性规划问题联系的对偶问题：

$$\begin{aligned}&\text{最小化} && w=\boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}\\ &\text{满足约束} && \boldsymbol{A}'\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{p}\\ & && \boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}\qquad(17\text{-}28)$$

其中，$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix}$ 是一个新的决策变量向量，称作对偶变量。

注意，原初问题涉及 n 个决策变量和 m 个线性不等式约束。对偶问题涉及 m 个决策变量和 n 个线性不等式约束。对偶问题的约束系数矩阵仅是原初问题系数矩阵的转置。一个问题的右边项系数是另一个问题的目标函数系数。这些问题是自对偶的，即对偶问题的对偶问题是最初的原初问题。事实上，任一问题都可视作原初问题

现在我们阐述一下线性规划的基本定理。

定理　假定存在一个 $\boldsymbol{x}_0\geqslant 0$，满足原初问题的约束条件，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0\leqslant\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{x}^0$ 是一个可行解），并且存在一个 $\boldsymbol{u}^0\geqslant 0$ 满足对偶问题的约束条件，即 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{u}^0\geqslant\boldsymbol{p}$（$\boldsymbol{u}^0$ 是对偶问题的一个解）。那么，两个问题有一个最优解，即所提问题的有限解，并且这两个解的值相等。即假定 $x^*\geqslant 0$ 是在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$ 约束下极大化 $z=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 向量。$\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}$ 的极大值是 $z^*=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}^*$。相似地，令 $u^*\geqslant 0$ 是满足 $w=\boldsymbol{b}'\boldsymbol{u}$ 为最小值的 u 向量，并且令 $w^*=b'u^*$。那么 $z^*=w^*$。

讨论　很容易证明 $z^*\leqslant w^*$。原初问题的约束条件是：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad i=1,\cdots,m$$

将每个约束乘以 $u_i \geqslant 0$，并加总：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i a_{ij} x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i u_i = w$$

以矩阵形式，这只不过是对 $\boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}$ 左乘 u'，可得：

$$\boldsymbol{u'Ax} \leqslant \boldsymbol{u'b} = w \tag{17-29}$$

（注意，$\boldsymbol{u'Ax}$ 是 $1\times m$，$m\times n$ 和 $n\times 1$ 矩阵的乘积。因此，$\boldsymbol{u'Ax}$ 是(1×1)。即它是个数，或标量。）

现在考虑对偶问题的约束条件：

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \geqslant p_j \quad j=1,\cdots,n$$

用 $x_j \geqslant 0$ 乘以每个约束并加总：

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} u_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = z$$

以矩阵形式，这只不过是 $u'A \geqslant p'$ 右乘向量 x，

可得：

$$\boldsymbol{u'Ax} \geqslant \boldsymbol{p'x} = z \tag{17-30}$$

从(17-29)和(17-30)可知：

$$z \leqslant \boldsymbol{u'Ax} \leqslant w \tag{17-31}$$

既然这对所有可行的 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 向量（包括 $\boldsymbol{u}^*$ 和 $\boldsymbol{x}^*$）成立：

$$z^* \leqslant w^* \tag{17-32}$$

现在考虑上述基本定理。假定 x^0 和 u^0 是原初和对偶问题的（有限）可行解。那么，从(17-31)可知：

$$\boldsymbol{p}^{0\prime}\boldsymbol{x}^0 \leqslant \boldsymbol{u}^{0\prime}\boldsymbol{b}$$

这个关系隐含着原初问题存在一个有限的极大值，对偶问题存在一个有限的极小值。

$$\boldsymbol{p'x}^0 \leqslant \boldsymbol{p'x}^* \leqslant \boldsymbol{u}^{*\prime}\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{u}^{0\prime}\boldsymbol{b} \tag{17-33}$$

但既然 $\boldsymbol{u}^{0\prime}\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{p'x}^0$ 是有限值，$z=\boldsymbol{p'x}$ 的极大值或最优值，$\boldsymbol{p'x}^*$，是有上界 $\boldsymbol{u}^0\boldsymbol{b}$。同样，$\boldsymbol{u}^{*\prime}\boldsymbol{b}$ 有下界 $\boldsymbol{p'x}^0$。因此，如果原初和对偶问题的可行解都存在，每个问题的有限最优解必须存在。$z^* = \boldsymbol{p'x}^* = \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b} = w^*$。是 Kuhn-Tucker 鞍点定理的结果。既然目标和约束函数都是线性的，它们是凹的。因此，原初问题解 $\boldsymbol{x}^*$ 的存在性与原初问题的拉格朗日函数存在鞍点等价。

将原初问题的约束条件写作：

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant 0 \quad i=1,\cdots,m$$

将每个约束条件乘以一个拉格朗日乘子 u_i 并相加。可得拉格朗日函数：

$$\mathscr{L}=\sum_{j=1}^{n}p_jx_j+\sum_{i=1}^{m}u_i\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)$$

以矩阵形式表达：

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \tag{17-34}$$

鞍点定理说如果 $\boldsymbol{x}^*$ 是原初问题的解，那么存在一个 $\boldsymbol{u}^*$ 使得：

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*)\leqslant\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)\leqslant\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}) \tag{17-35}$$

然而，$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$能写作：

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}'\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{u}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} \tag{17-36}$$

定义 $M(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})=-\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{u}'\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{A}-\boldsymbol{p}')\boldsymbol{x}$。那么，从(17-35)知：

$$M(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}^*)\leqslant M(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{x}^*)\leqslant M(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{x}) \tag{17-37}$$

既然 $M(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})$有一个鞍点$(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{x}^*)$，$\boldsymbol{u}^*$ 极大化：

$$-w=-\boldsymbol{u}'\boldsymbol{b}=-\sum_{i=1}^{m}b_iu_i$$

满足约束

$$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{A}-\boldsymbol{p}'\geqslant 0$$

或

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}u_i\geqslant p_j\quad j=1,\cdots,n$$

这正是对偶问题(17-28)。(当然，极小化 $\sum b_iu_i$ 等价于极大化 $-\sum b_iu_i$。)

由 $\mathscr{L}$ 对 x 求极大值的一阶条件得：

$$\mathscr{L}_x=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{u}'\boldsymbol{A}\leqslant 0\quad 若<,x=0 \tag{17-38a}$$

$$\mathscr{L}_u=b-\boldsymbol{A}x\geqslant 0\quad 若>,u=0 \tag{17-38b}$$

其中 $\mathscr{L}x$ 仅意味着 $\mathscr{L}_x j=1,\cdots,n$ 组成的整个向量。同样地，从(17-38a)可得：

$$(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{u}'^*\boldsymbol{A})x^*=0 \tag{17-39a}$$

从(17-38b)可得：

$$\boldsymbol{u}^{*\prime}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*)=0 \tag{17-39b}$$

因此，在 x^*，u^* 处，拉格朗日函数有相同值：

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{u}^{*\prime}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}^*=z^*$$

且

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)=\boldsymbol{u}^{*\prime}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{u}^{*\prime}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{u}^{*\prime}\boldsymbol{b}=w^*$$

因此，在鞍点 $z^*=w^*$，z^* 代表 $\boldsymbol{x}$ 为选择变量的极大值，w^* 代表 $\boldsymbol{u}$ 为选择变量的极小值。

最后，从包络定理可得：

$$u_i^*=\frac{\partial z^*}{\partial b_i}$$

在 14 章我们证明了当目标函数 $f(x)$和约束函数 $g(x)$(约束条件是 $g(x)\leqslant b$)是同次时，$z^*=\phi(b_1,\cdots,b_m)$是 b_i 的一次齐次函数。因此，利用欧拉定理的逆定理：

$$w^*=\sum_{i=1}^{m}b_iu_i^*=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial z^*}{\partial b_i}b_i\equiv z^*$$

等价地：

$$x_j^* = \frac{\partial w^*}{\partial p_j}$$

因此：

$$z^* = \sum p_j x_j^* = \sum \frac{\partial w^*}{\partial p_j} p_j \equiv w^*$$

17.6 单纯形算法[1]

在前几节，我们讨论了线性规划问题解的几个经济方面。具体而言，我们已经证明，线性规划问题经常存在一个与之相联系的对偶问题。然而，考虑的模型是常系数模型，使求解更容易。事实上，在存在一个相对简单、容易的求解线性规划问题的方法。现在让我们来探索此方法并将其应用到以前极大化总收益或收入的例子中去。

数学准备

考虑一般的线性规划问题：

$$\text{最大化} \qquad z = \sum_{j=1}^{r} p_j x_j \tag{17-40}$$

$$\text{满足约束} \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r &\leqslant b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mr}x_r &\leqslant b_m \\ x_1, \cdots, x_r &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{17-41}$$

这里，我们有 r 个决策变量和 m 个线性不等式约束。

解此问题的第一步是将不等式转成等式（等式较易处理）。约束条件(17-41)变成：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r + x_{r+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2r}x_r + x_{r+2} &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mr}x_r + x_{r+m} &= b_m \\ x_1, \cdots, x_{r+m} &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{17-42}$$

既然松弛变量 $x_{r+1}, \cdots, x_{r+m}$ 被约束成非负的，等式(17-42)定义了与不等式(17-41)一样的可行区域。可见，考虑受线性等式约束并加上非负性约束极大化一个线性函数的线性规划

1 这一节用到第5章附录中的概念

问题并不丧失一般性。然而，如果约束条件是 $\sum_j a_{ij}x_j \geqslant b_i$ 形式，松弛变量必须以负号进入以保持不等式的意义。因此，如果约束条件是 $x_1+x_2\geqslant 10$，相关的等式约束将是：

$$x_1+x_2-x_3=10, x_1, x_2, x_3\geqslant 0$$

因此，我们企图解决的问题是：

$$\text{最大化} \qquad z=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\text{满足约束} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j \qquad i=1,\cdots,m$$

$$x_j\geqslant 0 \qquad j=1,\cdots,n$$

以矩阵形式，此问题可写成：

$$\text{最大化} \qquad \boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}$$

$$\text{满足约束} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}$$

其中 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}=n\times 1$ 矩阵，或列向量：

$\boldsymbol{A}=m\times n$ 系数矩阵

$\boldsymbol{b}=m\times 1$ 列向量

如果我们假定 m 个约束条件是独立的，即不可能通过某 $m-1$ 个约束的线性组合得出余下的约束条件，不会丧失一般性。在数学上我们说，矩阵 A 的秩为 m。

例　考虑约束条件：

$$x_1+2x_2+x_4=2$$

$$2x_1-2x_2+x_3=3$$

$$4x_1+2x_2+x_3+2x_4=6$$

如果将第一个方程乘以 2 然后加到第二个方程，可得：

$$4x_1+2x_2+x_3+2x_4=7$$

左边与第三个约束相同。因 $6\neq 7$，这三个约束条件明显不一致。如果原先的第三个约束中的 6 换成 7，这个约束因其是多余的，可被忽略掉。那么我们仅需考虑一个双约束系统。将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的排标识为 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_M$。如果不存在分量 $k_1,\cdots,k_m$，使得 $\boldsymbol{A}_j=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} k_i\boldsymbol{A}_i$，则称 $\boldsymbol{A}$ 有秩 m。即如果没有某排是余下排的线性组合，则 $\boldsymbol{A}$ 有秩 m。这保证任何从 A 中形成的 $m\times m$ 行列是非 0 的。为了问题有意义，决策变量数 n 必须大于约束个数 m。如果 $m=n$，约束条件存在一个独一无二的解，可行区域只由一点构成，因此，问题的求极值部分显得微不足道。如果 $m>n$，可行区域为空集。

存在 m 个独立的方程，就有可能独一无二地解得任意 m 个 x_j，这些 x_j 由余下的 $n-m$ 个 x_j 表示。如果这些余下的 $n-m$ 个 x_j 设为 0，则产生了一个基本的可行解（假定非负性一直成立）。即一个基本可行解是一个 $n-m$ 个 x_j 为 0，或 x_j 为正的，个数不大于约束条件

个数的可行解。在基本可行解中的 m 个 x_j 被称作基。

几何上，基本可行解的集合对应可行区域的角，例如，图 17-4 中的原点和点 A,B,C,D。一个角是不在可行区域任两不同点连线中的点。假定 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_m,0,\cdots,0)$ 是一个基本解，即 $\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$，其中 $n-m$ 个 y_j 为 0。如果 $\boldsymbol{y}$ 不是在可行区域的一个角上，那么存在两个不同的可行解，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，以至 $\boldsymbol{y}$ 位于连接 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的线段上，即：

$$\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{u}+(1-k)\boldsymbol{v}\quad 0<k<1$$

对 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的最后 $n-m$ 个成分而言：

$$0=ku_j+(1-k)v_j\quad j=m+1,\cdots,n$$

既然 $u_j\geqslant 0$，并且 $v_j\geqslant 0$，这只有在 $u_j=v_j=0,j=m+1,\cdots,n$ 时才发生。因此，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 也是基本解。然而 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 必定是同一个点。由于最后每个向量 $n-m$ 个分量为 0，约束的矩阵方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 简化为：

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}y_j=b_i\quad i=1,\cdots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}u_j=b_i\quad i=1,\cdots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}v_j=b_i\quad i=1,\cdots,m$$

这些是相同的含 m 个变量的 m 个方程。由假定有这些方程都是线性独立。因此，存在一个独一无二的解。即 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$。这与 $\boldsymbol{y}$ 位于两个不同可行解之间的假定相矛盾。因此，基本可行解集是可行区域的角。

如上所示，对线性规划问题而言，可行区域一直是凸集。以前阐释过。证明相当简单，并且因约束条件是凹函数可从更一般的考虑中得出。假定 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是任两个可行解，即 $\boldsymbol{Au}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{Av}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\geqslant 0$。那么，任一点 $\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{u}+(1-k)\boldsymbol{v},0\leqslant k\leqslant 1$ 也是一可行解：

$$\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{u}+(1-k)\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{Au}+(1-k)\boldsymbol{Av}=k\boldsymbol{b}+(1-k)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

因此，$\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{b}$。因 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\geqslant 0$ 并且 $k\geqslant 0$，明显地 $\boldsymbol{y}\geqslant 0$。因此，每当 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是可行解时，$\boldsymbol{y}$，其代表连结 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 线段上所有点是可行的。所以由定义可行区域是凸的。

这些结果的重要性，在于它们表明问题的任一局部极大值必定是整体极大值(虽然不定惟一)。

从图 17-4 中容易看出，一般来说，极大值或最优解位于可行区域的一个角。我们不再证明这个重要的定理，因为它需要用到线性代数更高级的技巧。可能会存在无限多的解，当目标超平面在极大值点与可行区域的一个扁平部分相平行时，就会存在无限多个解。在 17.2 节的例子中，如果 $p_1=p_2$，那么图 17-4 中线段 BC 上所有点都是极大值点。然而，基本可行解 B 和 C 仍将是最优的。在任何存在有限个最优解的线性规划问题中，存在一个是基本可行解的最优解。如果最优解是独一无二的，则它一定是可行解。

这些结果极大地减少了我们寻找最优解所要考虑的点数。解决此问题的一个方法是利

用计算机编程寻找所有的角点，比较在每点 $z=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}$ 的值，挑出最大的那个。然而，存在许多更有效的方法。角点的数目可能相当大，比如，10 个方程和 20 个变量的模型含有：

$$\binom{20}{10}=\frac{20!}{10!\ 10!}=184\ 756\text{ 个基本可行解。}$$

单纯形算法：例子

现在我们用 17.2 节 3 要素、2 商品的模型来演示求解线性规划问题的单纯形算法。该问题是：

最大化	$z=40y_1+30y_2$
满足约束	$3y_1+2y_2\leqslant 54$
	$2y_1+2y_2\leqslant 40$
	$y_1+2y_2\leqslant 35$
	$y_1,y_2\geqslant 0$

第一步是加上松弛变量将不等式约束转变为等式约束：

最大化	$z=40y_1+30y_2$	(17-43)
满足约束	$3y_1+2y_2+y_3=54$	(17-44a)
	$2y_1+2y_2+y_4=40$	(17-44b)
	$y_1+2y_2+y_5=35$	(17-44c)
	$y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\geqslant 0$	

现在我们有含 5 个变量的三个独立的约束条件。一个基本可行解是，满足任何 $2(=5-3)$ 个 y_j 为 0，其余 y_j 是非负且满足以上约束的向量 $y=(y_1,\cdots,y_5)$。任意设 $y_4=y_5=0$，看看是否产生一个可行解。然而，让我们在方程中保留 y_4,y_5，并以 y_4,y_5 表示 y_1,y_2,y_3。

从(17-44b)中减去(17-44c)并重排，可得：

$$y_1=5-y_4+y_5 \tag{17-45a}$$

将其代入(17-44c)并解出 y_2，可得：

$$y_2=15+0.5y_4-y_5 \tag{17-45b}$$

最后，我们将(17-45a)和(17-45b)代入(17-44a)求解 y_3，可得：

$$y_3=9+2y_4-y_5 \tag{17-45c}$$

令 $y_4=y_5=0$，我们可得 $y_1=5,y_2=15,y_3=9$。既然 $y_1,y_2,y_3\geqslant 0$，这是个基本可行解。这对应图 17-4 中的点 B。注意，松弛变量 y_3 是正的。因此，第一个(土地)约束是松的，但由于 $y_4=y_5=0$，劳动和资本约束是紧的。

然而，这个解是最优的吗？即它是极大化目标函数吗？将 y_1 和 y_2 的值代入目标函数(y_3 并不在(17-43)式中出现)，并保留 y_4 和 y_5：

$$z=40(5-y_4+y_5)+30(15+0.5y_4-y_5)$$

$$=650-25y_4+10y_5 \tag{17-46}$$

方程(17-46)是解向量的间接目标函数。很快即可证明解 $y_1=5, y_2=15, y_3=9$ 不是最优的。利用包络定理,可得:

$$\frac{\partial z}{\partial y_5}=10>0 \tag{17-47}$$

这个关系表明目标函数 z 的值随 y_5 的增加而增加。事实上,y_5 每增加 1 单位,z 增加 10 单位。

因此,我们要寻找尽可能大的 y_5,多大才是可能的?我们不得不确保余下的变量是非负的。再次考虑方程组(17-45)。我们知道,我们不得不将 y_5 导入基中,但 y_1, y_2 或 y_3 中的哪个将被排除在基变量外?从(17-45)中看不出为什么 y_5 不能无限增加。然而,(17-45b),表明 y_5 不能超过 15。忽略 y_4(其为 0),非负性和方程组(17-45)意味着我们必须同时满足:

$$y_1=5+y_5\geqslant 0$$
$$y_2=15-y_5\geqslant 0$$
$$y_3=9-y_5\geqslant 0$$

事实上,最后一个不等式表明为满足非负性要求 $y_5\leqslant 9$。这个关系表明,y_5 最大可能为 9,并且 y_3 是被排除在基外。

这组新的基是 y_1, y_2 和 y_5。现在我们必须求解这些新变量,并用同样的方法检验该解是否最优。因为$\frac{\partial z}{\partial y_5}>0$,我们知道它将可改善。事实上,我们知道(因$\partial z/\partial y_5=10$,并且 $y_5=9$)z 将增加 10(9)=90,可知 $z=650+90=740$ 继续下去。

由(17-45c):

$$y_5=9+2y_4-y_3 \tag{17-48a}$$

将其代入(17-45a)可得:

$$y_1=14-y_3+y_4 \tag{17-48b}$$

将(17-48a)代入(17-45b)可得:

$$y_2=6+y_3-1.5y_4 \tag{17-48c}$$

方程组(17-48)是新的基本可行解。令 $y_3=y_4=0$,可得 $y_1=14, y_2=6, y_5=9$,并且 $z=40(14)+30(6)=740$,这是图 17-4 中的点 C。

这点是最优的吗?利用(17-48b)和(17-48c),可得:

$$z=740-10y_3-5y_4 \tag{17-49}$$

方程(17-49),它是该解的间接目标函数,表明这的确是最优解。此关系隐含$\frac{\partial z}{\partial y_3}<0, \frac{\partial z}{\partial y_4}<0$。导入非基本变量仅会减少目标函数的值。另外,此解是全局最优的。可行域的凸性和目标函数的凹性(这是弱凹性,目标函数是线性)表明,任一局部极大值必是全局极大值。因此,通过一次重复,我们求出了极大值解。

总而言之，单纯形算法首先从找到某个基本可行解开始。基本变量以非基本变量表示。然而，这些值代入目标函数，目标函数变得仅由非基本变量表示。如果对任一非基本变量而言，$\partial z/\partial y_j>0$，最初解不是最优的。假定有一个或多个 y_j，满足 $\partial z/\partial y_j>0$，挑出一个（可能是使得 $\partial z/\partial Y_j$ 最大的那个，虽然这并不是保证最快找到最优解）。利用以前得到的解来决定松弛变量能有多大，并且哪个基本变量应设为 0，即从基中取出，求出新的基本可行解，当这个条件成立时，解是最优的（因为导入新的变量到基中不会增加 z 的值）。

评论 1. 如果对某个非基变量而言，$\partial z/\partial y_j=0$，将此 y_j 导入基中不会增加或减少 z 的值。如果这发生在一个最优解上，表明存在多个最优解。

评论 2. 对一个极小化问题而言，必须满足的准则是对所有非基本的 y_j，$\partial z/\partial y_j\geqslant 0$。对极小化问题而言，最优解的特点是，如果导入非基本变量，目标函数的值将增大。

例　考虑以下极小化问题：

最小化　　$z=2x_1+x_2+2x_3$

满足约束　　$x_1-2x_2+x_3\geqslant 16$

$2x_2+x_3\leqslant 10$

$x_3\leqslant 6$

$x_1,x_2,x_3\geqslant 0$

第一步是加入松弛变量将约束转化为等式。注意不等式的方向：

最小化　　$z=2x_1+x_2+2x_3$

满足约束　　$x_1-2x_2+x_3-x_4=16$

$2x_2+x_3+x_5=10$

$x_3+x_6=6$

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0$

选 x_1,x_2,x_4 为基。求解得：

$$x_3=6-x_6$$
$$x_2=2-0.5x_5+0.5x_6$$
$$x_1=14+x_4-x_5+2x_6$$

计算 z，可得：

$$z=42+2x_4-2.5x_5+2.5x_6$$

可见 $\partial z/\partial x_5<0$。将 x_5 导入基中，将减少 z 的值。因此，这个解不是最优的。x_5 应取多大呢？由此解，为了保证 x_1,x_2,x_3 的非负性，我们必须有（不考虑 x_4 和 x_6，它们为 0）：

$$x_2=2-0.5x_5\geqslant 0 \quad x_1=14-x_5\geqslant 0$$

既然这些都必须满足，我们不能取 x_5 超过 4。因此，x_2 从基中取出。新基为 x_1,x_3,x_5。求解这些变量可得：

$$x_3=6-x_6$$
$$x_5=4-2x_2+x_6$$

$$x_1=10+2x_2+x_4+x_6$$

计算新的 z(预期此 z 比旧的 z 少 $2.5(4)=10$),可得:

$$z=32+5x_2+2x_4$$

注意,$\partial z/\partial x_2>0$,$\partial z/\partial x_4>0$ 但,$\partial z/\partial x_6=0$。因为没有变量导入将降低 z 的值,该解是最优的。然而,这不是惟一的解,将 x_6 导入基中,可得同样的 z。解($x_1=10$,$x_5=4$,$x_3=6$)与导入 x_6 的解连成的线段上的所有点都是解。问题的余下部分留作练习。

习题

1. 考虑由许多相同固定系数厂商组成的经济。每个厂商生产食物 y_1 和服装 y_2。有三种投入:土地、劳动和资本,分别标记为投入 1,2,3。技术系数矩阵是:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

每个厂商有 30 单位土地,40 单位劳动,72 单位资本。

每单位食品 20 美元,每单位服装 30 美元。

(a) 找出极大化产值的生产计划。

(b) 找出土地、劳动、资本的影子价格。

(c) 写出对偶问题并解释。

(d) 解对偶问题并验证其目标函数最优值等于产出的极大值。

(e) 利用商品在最优点的要素强度,预期如果劳动增加一单位产出水平会发生的变化。用求出的解检验。

(f) 利用要素强度,预期如果要素价格的变化 p_1 上升到 21。用解检验。

(g) 要素禀赋的微小增加会对要素价格有何影响?

2. 对由具有系数矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad \text{和禀赋}\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}40\\ 30\\ 15\end{pmatrix}\quad \text{的}$$

厂商构成的经济体,并且价格 $p_1=15$,$p_2=10$,回答与问题 1 相同的问题。对(f)而言,假定 p_2 增加到 11。

3. 解下列线性规划问题:

最小化 $z=4x_1+5x_2+x_3$

满足约束

$$x_1+x_2\geqslant 9$$
$$x_1+x_3\leqslant 8$$
$$2x_2-x_3\geqslant 5$$
$$x_1,x_2,x_3\geqslant 0$$

取 x_1, x_2, x_3 为初始基。

4. 一个厂商生产班卓琴、吉他和曼陀林琴。它使用三种投入：木材、劳动和黄铜，记为投入 1，2 和 3。令：

$$a_{ij} = \text{生产 1 单位产品 } j \text{ 所用的投入 } i \text{ 的数量}$$

技术系数矩阵是：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

厂商可使用 50 单位木材、60 单位劳动、55 单位黄铜。班卓琴价格为 200 美元，吉他为 175 美元，曼陀林琴 125 美元。

(a)找出极大化，总产值的生产计划。取为 x_1, x_2, x_3 初始基。

(b)写出该问题的对偶问题并解释经济意义。利用原初问题的解求解对偶问题。厂商愿为额外 1 单位的木材、劳动和黄铜支付多少？

5. 饮食问题。假定一个消费者有 n 种食品，$x_1, \cdots, x_n$。每种食物含有几种营养物(维他命、矿物质等)。令 a_{ij} = 食品 j 所含的营养物 i 的数量食品，食品 x_i 每单位花费 p_i 并且消费者希望营养物 j 的每天最少吸收量(MDR)为 b_j，饮食将如何安排？

(a) 将该问题写成线性规划问题，需要关于营养物组合的什么假定？

(b) 写出并解释对偶问题。

(c) 假定仅有三种营养物质 A，B，C。MDR 为 34，32，50。有三种食品 x_1, x_2, x_3，价格为 $p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 2$。食品的营养含量矩阵是：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

找出满足每种营养品 MDR 并极小化成本的饮食结构，求出对偶问题解来检验。

6. 完成正文中线性规划问题的讨论。将 x_6 导入基中，并证明 z 的极大值不变。写出并求解对偶问题，且验证它的目标函数的解与 z^* 相同。

部分参考文献

Dantzig, G. B.: "Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities," in T. C. Koopmans (ed.), Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission Monograph 13, John wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

Dorfman, R., P. A. Samuelson, and R. M. Solow: Linear Programming and Economic Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

Gale, D.: The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

Hadley, G.: Linear Programming, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1962.

Jones, R. W.: "Duality in International Trade: A Geometrical Note," Canadian Journal of Economics and Political Science, 31:390-393, 1965.

——: "The Structure of Simple General Equilibrium Models." Journal of Political Economy, 73: 557-572, 1965.

Koopmans, T. C. (ed.): Activity Analysis of Production and allocation, Cowles commission Monograph 13, John wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

——: Three Essays on the State of economic Science, McGraw-Hill Book Company, New York, 1957.

Leontief, W. W., etal.: Studies in the Structure of the American Economy, Oxford University Press, New York, 1953.

Rybczynski, T. M.: "Factor Endowment and Relative Commodity Prices," Econometrica, 22: 336-341, 1955.

Samuelson, P. A., "Frank Knight 's Theorem in Linear Programming,"RAND Corp., Santa Monica, CA, 1950; reprinted in J. Stiglitz(ed.), The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson, MIT Press, Cambridge, MA, 1966.

Stigler, G. J.: "The Cost of Subsistence," Journal of Farm Economics, 27:303-314, 1945.

Stolper, W. F.:and P. A. Samuelson: "Protection and Real Wages," Review of Economic Studies, 9:58-73, 1941.

Von Neumann. J.: "A Model of General Equilibrium,"Review of Economic Studies, 13:1-9, 1945.

Walras, L.:Elements of Pure Economics, trans. W. Jaffe, Richard D. Irwin, Inc., Homewood, IL, 1954.

第 18 章　一般均衡Ⅱ：非线性模型

18.1　相切条件

在这一章中将考察生产系数可变的一般均衡模型。此章的主要部分与在此更一般背景下导出 Stolper-Samuelson 和 Rybczynski 定理有关。当生产函数被假定为线性齐次时，模型的比较静态得出的结果与固定系数技术情况下一样(事实上，代数上是相同的)。

此处考虑的最一般的模型涉及用 m 种生产要素，$x_1,\cdots,x_m$，生产 n 种最终产品 $y_1,\cdots,y_n$。全球产出价格为 $p_1,\cdots,p_n$。如果令：

$$x_{ij}=\text{生产产品 } j \text{ 所使用要素 } i \text{ 的数量}$$

则 y_j 的生产函数是：

$$y_j=f^j(x_{1j},\cdots,x_{mj}) \qquad j=1,\cdots,n \tag{18-1}$$

我们认为存在一只看不见的手在：

$$\text{最大化} \qquad z=\sum_{j=1}^{n}p_jy_j=\sum_{j=1}^{n}p_jf^j(x_{1j},\cdots,x_{mj}) \tag{18-2}$$

$$\text{满足约束} \qquad \left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant x_i \quad i=1,\cdots,m \quad x_{ij}\geqslant 0\right)$$

$$\text{对所有的 } i,j \tag{18-3}$$

这个模型是一个一般非线性规划问题。不了解(18-1)中生产函数的具体形式，就无法求解此问题。因此我们假定 x_{ij} 为正的同时，集中考察此模型的比较静态。在这种情况下，*Kuhn-Tucker* 一阶条件变成经典的拉格朗日技巧。

由于我们并不关心先采用哪些要素，所有一般模型中得到的比较静态结果都能在两要素、两商品模型中得到表明。因此让我们改变记号，以与以前的分析一致。考虑两要素，L 劳动并且 K 资本。令 L_j 和 K_j 表示用于商品 j 生产的劳动和资本数量。这两个商品的生产函数是：

$$y_j=f^j(L_j,K_j) \qquad j=1,2$$

模型因此变成：

$$\text{最大化} \qquad z=p_1f^1(L_1,K_1)+p_2f^2(L_2,K_2) \tag{18-4}$$

$$\text{满足约束} \qquad L_1+L_2=L \tag{18-5a}$$

$$K_1+K_2=K \tag{18-5b}$$

我们假定 L_1,L_2,K_1,K_2 是正的并被充分利用。此模型的拉格朗日函数是：

$$\mathcal{L}=p_1 f^1(L_1,K_1)+p_2 f^2(L_2,K_2)+\lambda_L(L-L_1-L_2)+\lambda_K(K-K_1-K_2) \tag{18-6}$$

有约束极大值的一阶条件可由 λ 对 L_1,L_2,K_1,K_2 和两个拉格朗日的乘子求偏导得到。当我们令：

$$f_L^i=\frac{\partial f^i}{\partial L_j}=\frac{\partial y_j}{\partial L_j} \qquad f_K^i=\frac{\partial f^i}{\partial K_j}=\frac{\partial y_j}{\partial K_j}$$

这些一阶条件是：

$$p_1 f_L^1-\lambda_L=0 \tag{18-7a}$$

$$p_1 f_K^1-\lambda_K=0 \tag{18-7b}$$

$$p_2 f_L^2-\lambda_L=0 \tag{18-7c}$$

$$p_2 f_K^2-\lambda_K=0 \tag{18-7d}$$

$$L-L_1-L_2=0 \tag{18-8a}$$

$$K-K_1-K_2=0 \tag{18-8b}$$

二阶条件由对方程组(18-7)和(18-8)对 L_i,K_i 和 λ_i 微分形成的加边海赛阵的保边主子式的限制条件构成。令 $f_{LL}^i=\partial^2 f^i/(\partial L_i\partial L_i)$，　我们有：

$$H=\begin{vmatrix} p_1 f_{LL}^1 & p_1 f_{LK}^1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ p_1 f_{KL}^1 & p_1 f_{KK}^1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & p_2 f_{LL}^2 & p_2 f_{LK}^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 f_{KL}^2 & p_2 f_{KK}^2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{18-9}$$

具体而言，K 阶保边主子式交替变号，整个行列式 H 符号为＋。

假定充分性二阶条件成立，从方程组(18-7)和(18-8)能解出选择函数：

$$L_i=L_i^*(p_1,p_2,L,K) \qquad i=1,2 \tag{18-10a}$$

$$K_i=K_i^*(p_1,p_2,L,K) \qquad i=1,2 \tag{18-10b}$$

并且：

$$\lambda_L=\lambda_L^*(p_1,p_2,L,K) \tag{18-11a}$$

$$\lambda_K=\lambda_K^*(p_1,p_2,L,K) \tag{18-11b}$$

方程组(18-10)表明了给定产出价格和总资源约束条件下，每个产业将使用每种要素的数量。因为它们不是要素价格的函数，所以它们既不是要素供给，也不是要素需求函数。整个经济的要素供给曲线分别是在 L 和 K 上的垂直线。方程(18-10)代表每种要素在两个行业分配问题的解。

如同在前一章线性模型中一样，要素价格的角色由拉格朗日乘子 λ_L 和 λ_K 担任。将 L_i^* 和 K_i^* 代入目标函数 z 中可得：

$$z^*=\phi(p_1,p_2,L,K)=p_1 f^1(L_1^*,K_1^*)+p_2 f^2(L_2^*,K_2^*) \tag{18-12}$$

利用包络定理，可得：

$$\frac{\partial z^*}{\partial L}=\frac{\partial \phi}{\partial L}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial L}=\lambda_L^*(p_1,p_2,L,K) \tag{18-13a}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial K}=\frac{\partial \phi}{\partial K}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial K}=\lambda_K^*(p_1,p_2,L,K) \tag{18-13b}$$

即 λ_L^* 是对应的极大的 NNP 变化量与劳动资源禀赋变化量的比值，λ_K^* 的解释也相似。这些拉格朗日乘子是劳动或资本额外增加 1 单位导致收入的增量。在一个竞争性经济中，它们分别是劳动和资本的边际产值。它们表示在一个竞争性经济中劳动和资本的酬劳价格。因此，拉格朗日乘子代表此模型中资源的归因值或影子价格。与在厂商的局部均衡中把它们当作外生的不同，它们是做为该模型的解的一部分，是内生的。

令工资率 $w\equiv\lambda_L$，并且资本现金流价格 $r\equiv\lambda_K$。r 并不是利息率，它是租用资本的价格，w 是租用劳动的价格。资本被当作服务流，劳动也一样，而不是一次性购买的存货，r 是资本的工资率。

产业供给曲线可以靠将 L_i 和 K_i 代入生产函数来定义，可得：

$$y_1=f^1(L_1^*,K_1^*)=y_1^*(p_1,p_2,L,K) \tag{18-14a}$$

$$y_2=f^2(L_2^*,K_2^*)=y_2^*(p_1,p_2,L,K) \tag{18-14b}$$

因为，它们显示了给定产出价格，其他商品价格和资源约束条件下将生产多少产品，所以，它们被视为产业供给曲线。每个行业的需求曲线分别是在水平 p_1 和 p_2 的水平线，这反映了自由竞争市场。

供给曲线(18-14)是产出价格的 0 次齐次函数。两种价格增加相同比例，但产量不变，或：

$$y_j^*(tp_1,tp_2,L,K)\equiv y_j^*(p_1,p_2,L,K)\qquad j=1,2 \tag{18-15}$$

从目标函数(18-4)中易见，$z=p_1y_1+p_2y_2$。如果两种价格增加相同的因子，则 $z=t(p_1y_1+p_2y_2)$，它是原函数的单调(事实上，线性)变形。极大化 $p_1y_1+p_2y_2$ 的要素值也极大化 $t(p_1y_1+p_2y_2)$。因此(18-10)、$L_i=L_i^*(p_1,p_2,L,K)$等，是 p_1,p_2 的 0 次齐次函数，且 $y_1^*=f^1(L_1^*,K_1^*)$，$y_2^*=f^2(L_2^*,K_2^*)$。

该经济的生产可能性边界为(y_1,y_2)这样的集合，该集合中任一元素(y_1,y_2)，满足给定 y_2，y_1 是可取到的极大值，反之也成立。它可以通过消去方程(18-14a)和(18-14b)中的价格得到。在方程(18-15)中，令 $t=1/p_2$，$p=p_1/p_2$。变量 p 代表产出 y_1 的相对价格(以 y_2 为单位而言)，那么我们得到：

$$y_1^*(p_1,p_2,L,K)=y_1^*\left(\frac{p_1}{p_2},1,L,K\right)=Y_1^*(p,L,K) \tag{18-16a}$$

和

$$y_2^*(p_1,p_2,L,K)=y_2^*\left(\frac{p_1}{p_2},1,L,K\right)=Y_2^*(p,L,K) \tag{18-16b}$$

假定$\frac{\partial Y_j^*}{\partial p} \neq 0, j=1,2$，变量 p 为相对产出价格，能从这两个方程中消掉，得到：

$$G(y_1^*, y_2^*, L, K)=0 \tag{18-17}$$

或，以显形式：

$$y_2^* = g(y_1^*; L, K) \tag{18-18}$$

此函数的典型形状，如图 18-1 所示，凹向原点。很快我们将看到这种形状是被此模型的充分性二阶方程隐含。正如图中所示，$\partial y_2^* / \partial y_1^* < 0$，且$\partial^2 y_2^* / \partial y_1^* < 0$。

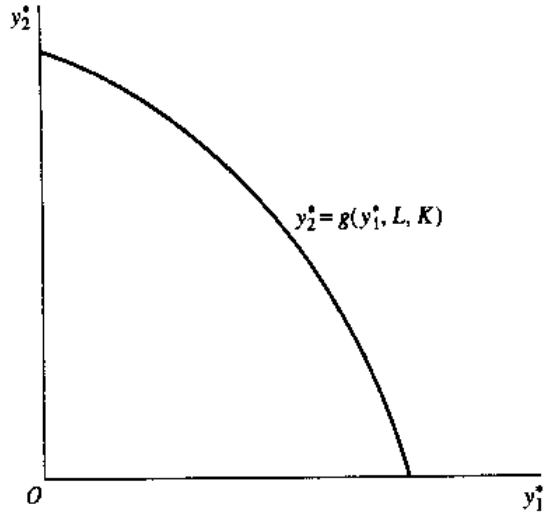

图 18-1 生产可能性边界表明，给定一种产品的产出数量，另一种产品的最大产出量。为了给定资源约束条件下经济达到最大 NNP，最优解必在此边界上某一点达到。否则，增加 y_1 和 y_2 将增加 $NNP=p_1y_1+p_2y_2$。NNP 极大化模型的二阶条件隐含$\partial y_2^* / \partial y_1^* < 0$，且$\partial^2 y_2^* / \partial y_1^* < 0$。然而，这并未被在给定 y_1, L, K 极大化 y_2 隐含，除非对生产函数有额外的限制。（见问题 5）

在分析此模型的比较静态前，让我们考察一阶边际关系(18-7)。正如我们已指明的那样，$w(=\lambda_L)$和 $r(=\lambda_K)$分别是劳动和资本的归因边际产值。从方程组(18-7a)和(18-7c)我们可见，两个行业劳动的边际产值是相同的。同样地，从(18-7b)和(18-7d)可见，资本的边际产值在两个行业必定是相同的。直觉猜想应该是这样的，比如说，如果劳动在产业 1 比在产业 2 更有生产力，即在边际生产更多的产品，那么，劳动的拥有将发现第一个产业给他的服务报酬更高。劳动将离开产业 2 进入产业 1。这样，产业 2 的劳动边际产值将上升，产业 1 的边际产值将下降。这个过程将持续到两个产业的劳动报酬相同时为止。这是竞争报价过程，劳动和资本的所有者寻觅最高的报价，这是亚当·斯密看不见的手的机制的实质。

将方程(18-7a)和(18-7b)结合起来，得到：

$$\frac{f_L^1}{f_K^1} = \frac{w}{r} \tag{18-19a}$$

同样地，从(18-7c)和(18-7d)可得：

$$\frac{f_L^2}{f_K^2} = \frac{w}{r} \tag{18-19b}$$

以上两式表明，每个产业的劳动和资本边际产值的比率等于(归因)要素价格的比率。这与利润极大化的局部均衡相切条件相似。在那里，等产量线与等成本线相切，切线斜率为报酬

率的比值 。

然而，在目前这个模型中，报酬率比值或相对要素成本在两个行业是相同的。从方程(18-19)知：

$$\frac{f_L^1}{f_K^1}=\frac{w}{r}=\frac{f_L^2}{f_K^2} \tag{18-20}$$

在极大化财富的投入组合下，每个行业的等产量线的斜率是相同的。如果它们不同，一个要素在某个行业比另一个行业是更有生产力的(在边际上)。在这种情况下，要素将从低值使用向高值使用转移，转移的同时增加了要素的回报和 NNP 的值 。

这种情况在艾奇沃思(Edgeworth-Bowly)盒式图中描述了出来。在图 18-2 中，产业 1 以通常方式描绘，原点 O_1 在盒的左下角。行业 1 的等产量凸向原点。然而，两轴是有限的，即伸展到资源的限度。在水平方向，劳动最高水平为 L。在垂直方向，资本的最高水平为 K。由这些限度，形成了一个矩形，产生了另一个原点 O_2。生产函数 $f^2(L_2,K_2)$被颠倒画出，它从原点开始，往左表示劳动增加，往下表示资本增加。图 18-2 中画出了 $f^2(L_2,K_2)$的各种等产量线。这些曲线凹向 O_1，凸向 O_2。

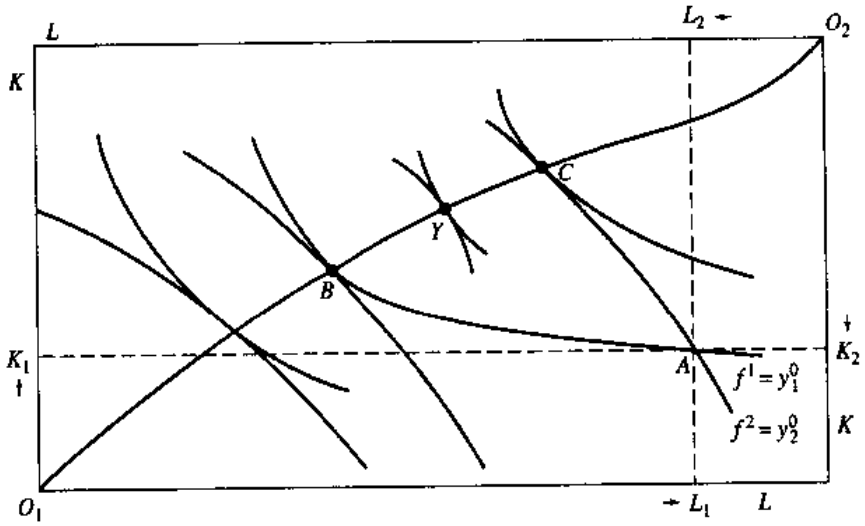

图 18-2　Edgeworth-Bowly 盒式图。这个著名的图(它要归功于 F. Y. Edgeworth 和 A. L. Bowley)描绘了竭尽经济中交换收益的要素分配集合。盒式图的各维长度为总的劳动禀赋(水平方向)和资本禀赋(垂直)。在某点，比如说 A，产业 1 使用的劳动 L_1 是从 A 到 O_1 出发的垂直轴的距离。同样地，从劳动轴到 A 的垂直距离是产业 1 使用的资本 K_1。从 A 往盒子右边线的距离是余下的劳动 L_2，它用在行业 2 中。同样地，从 A 往上到盒子顶线的距离是用在行业 2 中的资本 K_2。既然 $L_1+L_2=L$ 且 $K_1+K_2=K$，其中 K，L 为常数，矩形中任何一点都定义了要素在每个产业中的分配。

盒中的任何一点代表资源在每个行业中的分配。例如，在点 A，L_1 单位劳动分配给产业 1，L_2 单位给产业 2。在所有的内点，$L_1+L_2=L$。同样在 A，K_1 单位的资本分配给产业

1，K_2 给产业 2。既然 $K_1+K_2=K$，整个经济可支配的资本在两个行业中分配。

记住上述结果，生产函数 $f^1(L_1,K_1)$ 的原点为盒式图西南角，$f^2(L_2,K_2)$ 的原点为盒式图东北角。然而，行业 2 的生产函数 $f^2(L_2,K_2)$ 是负的，增加 L_2 意味着减少 L_1，它是左向移动。同样地，增加 K_2 意味着减少 K_1，它向下移动。因此，当等产量线 f^1 正常描绘时，f^2 等产量线是凹向 O_1。事实上，它们被解释成凸向 O_2。

有效的要素分配即那些导致产出水平在生产边界上的分配，根据方程(18-20)是等产量线斜率相等的点。在这些点，每个产业对投入的评价是相同的。如果产业 1 愿意放弃 3 单位资本来得到 1 单位劳动，并且产业 2 愿放弃 1 单位劳动以得到 1 单位资本，产业 2 可给产业 1，1 单位劳动以得到 2 单位资本，从而两个产业都可以增进产量。只要两个行业的等产量线的斜率是不同的，这样相互有利的再分配是可能的。斜率相同的点，表明要素交换收益都已竭尽，这些点形成 O_1 到 O_2 的一条曲线，称作契约曲线或效率曲线。在不存在交易成本的情况下，契约曲线上的某点一定能达到。比如说，如果图中的初始点是 A，那么自愿交换将导致契约曲线上的要素分配。

然而，点 A 不是一个有效分配，即 NNP 在其上达极大值，产业 1 的等产量线的斜率比产业 2 的更平。产业 1 对劳动的报价相对低，对资本的报价相对高。同样地，产业 2 对劳动的报价相对高，对资本的报价相对低。每个产业等产量线在 A 点的斜率表明劳动对产业 2 来说价值更大，而资本对产业 1 来说价值更大。竞争机制将导致劳动移向产业 2，资本移向产业 1。以 Edgeworth 图来说，分配点将移向契约线。最终，将会达到某点，比如说 Y，根据(18-20)式在该点产业 1 和产业 2 的等产量线的斜率是相同的。在这点，两产业的等产量线相切。在 Edgeworth 盒中所有相切点形成的线称作契约曲线。在不存在交易成本的情况下，竞争性经济必处于契约线的某点上。若不是，则会否定多比少好的假定。个体逐利行为将会使整个经济趋向契约线上某点。

另一个虽没有在图中画出，但隐含的相切条件是消费者对环境的反应。在此经济中的所有消费者面对着产出价格 p_1,p_2。效用极大化的消费者将消费他们主观边际评价等于价格比率，即消费者的相对成本的商品。消费者无差异曲线的斜率，他们的边际替代率将等于价格比率或生产可能性边界上最终产出点的斜率。

图 18-1 中描绘的生产可能性边界上的任一点，对应于图 18-2 中契约线上某一点，这是因为，只有有效的要素利用才能在给定另一商品产出情况下极大化某一商品的产出。图 18-2中，任何不在契约线上的要素分配将导致产出点在图 18-1 生产边界内。如果实现的产出在生产可能性边界上，则称经济是有效产出的。然而，例如，由于经济中的垄断因素，消费者的边际替代率不等于生产相对成本。在这种情况下，应用以上推理，所有消费者受益的交换会发生。当所有消费者的 MRS 等于生产的相对边际成本时，经济被称作有效消费。这些福利型的思考，首先是由 V. Pareto 开始的。一个交换收益已竭尽的经济称作是帕累托最优或帕累托有效的。我们将在下一章深入探讨这个问题。

学生应该记住，有效性基本上是观察不到的。在不存在交易成本的情况下，所有从交换

中的收益必被竭尽，因此，有效性自动实现。如果一个经济处于非有效或非帕累托点，消费者的隐含损失必须与消费者喜多不喜少的偏好相调和。即必须辨明一些可观测的交易成本以使得理论内在一致。（事实上，更深的分析不得不解释为什么消费者有时聚集起来制定导致交易收益损失的法令。）

18.2 一般比较静态结果

正如我们反复强调的，潜在可观察、可证伪的假说是由理论的目标产生的。一阶条件(18-7)和(18-8)，在不知道具体函数形式下是不可观测的。此模型的可证伪假说是对选择函数(18-10a)和(18-10b)不同偏导符号的限制，这是由极大化假设隐含的。额外可证伪的假说是对产出供给函数(18-14)符号的限制。让我们利用第 7 章的包络分析考察这些比较静态关系。

方程(18-12)中定义的间接国民收入函数是给定产出价格和资源禀赋时 NNP 的极大值，将选择函数(18-10)代入目标函数，可得：

$$z^* = NNP^* = \phi(p_1, p_2, L, K) = p_1 f^1(L_1^*, K_1^*) + p_2 f^2(L_2^*, K_2^*)$$

既然这是给定参数值情况下 NNP 的极大值，则 $NNP - NNP^* \leqslant 0$，当 $L_i = L_i^*$，$K_i = K_i^*$，$i=1,2$时，$NNP - NNP^* = 0$。因此，函数：

$$\begin{aligned} &F(L_1, L_2, K_1, K_2, p_1, p_2, L, K) \\ &= NNP(L_1, L_2, K_1, K_2, p_1, p_2, L, K) - NNP^*(p_1, p_2, L, K) \end{aligned}$$

在 $L_i = L_i^*$，$K_i = K_i^*$，$i=1,2$ 处有约束极大值(0)。初始一对偶问题的拉格朗日函数是：

$$\mathscr{L} = NNP - NNP^* + w(L - L_1 - L_2) + r(K - K_1 - K_2)$$

比较静态符号限制来自 λ 二阶偏导的加边海赛阵。λ 对参数的一阶偏导是包络关系：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p_1} = y_1 - y_1^* = 0 \tag{18-21a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial p_2} = y_2 - y_2^* = 0 \tag{18-21b}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial L} = -w^* + w = 0 \tag{18-21c}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial K} = -r^* + r = 0 \tag{18-21d}$$

约束条件是 λ 对 w 和 r 的一阶偏导，令其为 0：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w} = L - L_1 - L_2 = 0 \tag{18-22a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial r} = K - K_1 - K_2 = 0 \tag{18-22b}$$

相关的加边海赛阵由 λ 对 p_1, p_2, L, K, w, r 的二阶偏导构成。这些二阶偏导是方程组(18-21)和(18-22)对这些变量的一阶导数。加边海赛阵因此是：

$$|\mathscr{L}_{**}|=\begin{vmatrix} -\frac{\partial y_1^*}{\partial p_1} & -\frac{\partial y_1^*}{\partial p_2} & -\frac{\partial y_1^*}{\partial L} & -\frac{\partial y_1^*}{\partial K} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial y_2^*}{\partial p_1} & -\frac{\partial y_2^*}{\partial p_2} & -\frac{\partial y_2^*}{\partial L} & -\frac{\partial y_2^*}{\partial K} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial w^*}{\partial p_1} & -\frac{\partial w^*}{\partial p_2} & -\frac{\partial w^*}{\partial L} & -\frac{\partial w^*}{\partial K} & 1 & 0 \\ -\frac{\partial r^*}{\partial p_1} & -\frac{\partial r^*}{\partial p_2} & -\frac{\partial r^*}{\partial L} & -\frac{\partial r^*}{\partial K} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{18-23}$$

第一个比较静态关系是交互条件，由 λ_{**} 的对称性得出。我们记：

$$\frac{\partial y_1^*}{\partial p_2}=\frac{\partial y_2^*}{\partial p_1} \tag{18-24}$$

$$\frac{\partial y_i^*}{\partial L}=\frac{\partial w^*}{\partial p_i} \quad i=1,2 \tag{18-25a}$$

$$\frac{\partial y_i^*}{\partial K}=\frac{\partial r^*}{\partial p_i} \quad i=1,2 \tag{18-25b}$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial K}=\frac{\partial r^*}{\partial L} \tag{18-26}$$

方程(18-24)表明，例如，如果 y_1 的产出价格上升，对产业 2 产出的影响恰好等于 p_2 增加对产业 1 产出的影响。方程组(18-25)指出，如果劳动禀赋增加，其在第 i 个行业的影响等于第 i 种产品价格上升对归因工资或劳动影子价格的影响。方程组(18-24)至(18-26)例证了此模型中价格与数量的对偶性。所有对数量正确的关系对价格也成立。交互性关系(18-26)正是(18-21)的类推，只不过商品或要素价格代替了相应的数量，并且，反之也成立。

方程组(18-24)至(18-26)可以直接推广到 n 种商品和 m 种要素情况。当我们令 λ_1, K, λ_m 代表 x_1, K, x_m 的影子要素价格，这些关系分别变成：

$$\frac{\partial y_i^*}{\partial p_j}=\frac{\partial y_j^*}{\partial p_i} \quad i,j=1,\cdots,n$$

$$\frac{\partial y_j^*}{\partial x_i}=\frac{\partial \lambda_i^*}{\partial p_j} \quad i=1,\cdots,m \quad j=1,\cdots,n$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}=\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} \quad i,j=1,\cdots,m$$

然而，目前为止，我们还未对这些偏导施加符号限制。在目前普遍性水平下，不可能判定是否劳动禀赋的增加将增加或减少任一产业的产出。(可以证明，劳动或资本的增加并不导致两产业产出的减少。)产出价格变化对归因工资的影响也是同样不确定的。目前可得的

惟一一个比较静态符号限制与产生供给函数 $y_i=y_i^*(p_1,p_2,L,K)$ 有关。假定充分性二阶条件满足，这些曲线对其自身价格而言是向上倾斜的。此模型中的参数可分隔成两个不同集合，p_1 和 p_2 仅出现在目标函数，L 和 K 仅出现在约束条件。与第 7 章所述一样，不存在与后两个参数有关的符号限制。考虑 p_1 和 p_2 时，相关的决策变量 y_1^* 和 y_2^* 好像在无约束模型中行动。既然这是一个极大值问题，对角元 $-\partial y_1^*/\partial p_1$ 和 $-\partial y_2^*/\partial p_2$ 必定是负的。因此：

$$\frac{\partial y_i^*}{\partial p_i}>0 \quad i=1,2 \tag{18-27}$$

产出供给曲线因此是向上倾斜的。因为 L 和 K 是仅出现在约束条件的参数，对 $-\partial w^*/\partial L$ 和 $-\partial r^*/\partial K$ 相似的断言是不正确的。例如，在此普遍性水平下，不可能断言经济中劳动数量的增加将降低劳动工资率。虽然这结果听起来好像有道理，它并没被上述模型隐含。然而，如果生产函数是凹的，例如，如果它们是 $s(\leqslant 1)$ 次齐次函数，那么整个目标函数(18-2)和(18-4)是凹的。利用 7.4 节末的定理，则 $\partial w^*/\partial L\leqslant 0$ 和 $\partial r^*/\partial K\leqslant 0$。如果生产函数是严格凹，例如 $s<1$，则不等式严格成立。如果生产函数展示出规模报酬不变性质，报酬率则与资源禀赋独立。我们将在下节详细讨论这些问题。

现在让我们考虑由方程(18-17)定义并且在图 18-1 中画出的生产转换边界线隐含的性质，要素选择函数是：

$$L_i=L_i^*(p_1,p_2,L,K) \qquad K_i=K_i^*(p_1,p_2,L,K)$$

既然这些方程都是 p_1,p_2 的 0 次齐次函数，它们可以价格比值 $p=p_1/p_2$ 表示。在以下讨论中，为记法方便，我们不使用参数 L 和 K，这些参数和讨论无关。令 $L_i=L_i^*(p)$，$K_i=K_i^*(p)$，我们可以将方程(18-14)写作：

$$y_1^*(p)=f^1(L_1^*(p),K_1^*(p)) \tag{18-28a}$$

$$y_2^*(p)=f^2(L_2^*(p),K_2^*(p)) \tag{18-28b}$$

假定这些函数是可逆的，函数形式：

$$y_2^*=y_2^*(p(y_1^*))=y_2^*(y_1^*) \tag{18-29}$$

是正确的。由链导法则：

$$\frac{\partial y_2^*}{\partial y_1^*}=\frac{\partial y_2^*/\partial p}{\partial y_1^*/\partial p} \tag{18-30}$$

当采用方程组(18-28)时，方程(18-30)变成：

$$\frac{\partial y_2^*}{\partial y_1^*}=\frac{f_L^2(\partial L_2^*/\partial p)+f_K^2(\partial K_2^*/\partial p)}{f_L^1(\partial L_1^*/\partial p)+f_K^1(\partial K_1^*/\partial p)}$$

利用一阶条件：$p_1f_L^1=p_2f_L^2=w$，$p_1f_K^1=p_2f_K^2=r$

可得：

$$\frac{\partial y_2^*}{\partial y_1^*}=\frac{(1/p_2)[w(\partial L_2^*/\partial p)+r(\partial K_2^*/\partial p)]}{(1/p_1)[w(\partial L_1^*/\partial p)+r(\partial K_1^*/\partial p)]}$$

然而，由于：$L_1^*(p)+L_2^*(p)\equiv L$，$K_1^*(p)+K_2^*(p)\equiv K$，

可得：
$$\frac{\partial L_1^*}{\partial p} \equiv -\frac{\partial L_2^*}{\partial p} \qquad \frac{\partial K_1^*}{\partial p} \equiv -\frac{\partial K_2^*}{\partial p}$$

分子因此正是分母的负数，或：

$$\frac{\partial y_2^*}{\partial y_1^*} = \frac{p_1}{p_2}(-1) = -p = -p(y_1^*) \tag{18-31}$$

方程(18-31)表明，当 NNP 被极大化时，生产可能性边界线将与等收益线相切。NNP 是产出水平的线性函数：

$$NNP = p_1 y_1 + p_2 y_2$$

极大化 NNP 的 y_1, y_2 的值，即允许这条线在产出空间原点最远的值，是生产边界上与等收益线有相同斜率 $-p = -p_1/p_2$ 的点。这种情况在图 18-3 中表示出。正如那里所画的那样，生产可能性边界是凹向原点。这可通过将等式(18-31)对 y_1^* 微分在数学上验证：

$$\frac{\partial^2 y_2^*}{\partial y_1^{*2}} = -\frac{\partial p}{\partial y_1^*} = \frac{-1}{\partial y_1^*/\partial p} = \frac{-p_2}{\partial y_1^*/\partial p_1} < 0 \tag{18-32}$$

方程组(18-31)和(18-32)表明，此经济的特点是在极大化财富的产出选择的某邻域，生产的边际成本是正的且是递增的。$\partial y_2^*/\partial y_1^*$ 是负数意味着如果要得到更多 y_1，必须放弃 y_2^* 的比率。因此，$\partial y_2^*/\partial y_1^*$ 是得到更多 y_1(负的)边际机会成本。既然 $\partial(\partial y_2^*/\partial y_1^*)/\partial y_1^* = \partial^2 y_2^*/\partial y_1^{*2} < 0$，$y_1$ 的边际成本必是递增的。当 y_1 增加时，y_1 的斜率或边际成本 $\partial y_2^*/\partial y_1^*$ 变得更小。因此，生产越多的 y_1 时，为得额外 1 单位的 y_1 就要放弃更多的 y_2。图 18-3 也表明这种情况，当 y_1 从 y_1^1 增到 y_1^2 至 y_1^3，这些增量的边际成本，$y_1^1 - y_1^2$ 和 $y_2^2 - y_2^3$ 增加了。

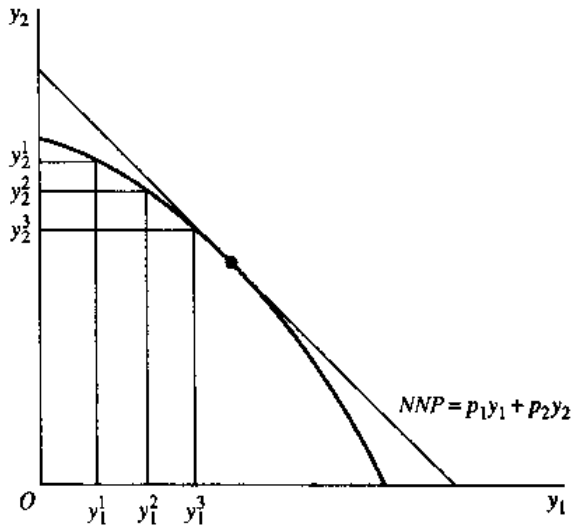

图 18-3 极大化 $NNP = p_1 y_1 + p_2 y_2$。NNP 受资源约束内点极大化隐含生产可能性边界是凹向原点。这个特征在左图中是很直观的。如果边界线凸向原点，NNP 极大值将在一个角达到，这隐含着只生产一种产品。内点极大值出现在消费者对两种商品的边际评价(以等收益线 $NNP = p_1 y_1 + p_2 y_2$ 的斜率 $-p_1/p_2$ 衡量)等于 y_2 对 y_1 的边际替代率。后一个替代关系是以生产边界斜率衡量的 y_1 的边际成本。边界线的凹性表明生产的边际成本是递增的，当 y_1 的产出从 y_1^1 增加至 y_1^2，增加产出的成本可以得到 y_2 的减少，以 $y_2^1 - y_2^2$ 来衡量，再增加相同量的 y_1 到 y_1^3，导致 y_2 更大的减少，$y_2^2 - y_2^3$。取极限时，y_1 发生微小变化时，y_1 的边际成本是生产可能性边界的斜率。y_1 增加时，斜率(绝对值)也增加，表示 y_1 的边际成本递增。y_2 可得到同样的结果，斜率的倒数衡量 y_2 的边际成本并且随 y_2 的增加而增加。

将$\partial y_2^* / \partial y_1^*$解释成 y_1 的边际成本，方程(18-31)变成极大化行为极为熟悉的条件以至边际成本等于边际收益。全球市场愿意以 $p=p_1/p_2$ 的价格，用 y_2 交换额外 1 单位的 y_1。当在边际上，y_1 的边际成本恰好等于增加 y_1 且减少 y_2 生产产生的额外收益时，NNP 达到极大值。方程(18-32)表明，在一个极大值点，边际成本必是上升的。当然，所有的这些分析在两轴交换时也成立。模型对 y_1 和 y_2 而言是完全对称的。交换 y_1 和 y_2 结果也是正确的。

我们要注意，在两产品情况下，由于$\partial y_2^* / \partial p_1, \partial y_1^* / \partial p_2 > 0, \partial y_2^* / \partial p_1 = \partial y_1^* / \partial p_2 < 0$。这可从产出供给函数的齐次性得出，留给学生作练习。然而，在 n 种产品情况下，非对角元$\partial y_i^* / \partial p_j, i \neq j$ 的符号并不被隐含规定。

18.3　要素价格均等化和相关定理

现在让我们转到国际贸易经典定理的分析上来。要素价格均等化，Stolper-Samuelson 和 Rybczynski 定理。在以前章节中，这些结果曾出现在固定系数技术特例下。为了在可变比例情况下得到这些结果，必须增加线性齐次产业生产函数的假定。

我们并不是很关心此模型中厂商的性质，因为它与结果关系不大。然而，我们假定每个产业由几个同质厂商构成。它们可能在规模上不同，但在同一产业的每一厂商的基本生产函数是相同的。在这些条件下，行业生产函数能够完善定义。即如果所有厂商在上述意义上相同，行业的总产出可表述为总劳动和资本投入的单值函数。另外，这个总生产函数是线性齐次的。假定对某产业产出的需求增加 10%，当要素价格不变时，长期影响仅是该产业中的厂商数目增加 10%(如果每个厂商的规模是相同的)。这些新厂商与该行业以前的厂商相同，将雇佣同样比例的劳动和资本。因此，额外的 10%劳动和 10%资本被用来生产额外的 10%的产出。既然这对投入的任何初始组合都成立，行业或总生产函数能视为规模报酬不变。

例　考虑一个行业中的两个厂商，生产函数为：

$$y_1 = f^1(L_1, K_1) = L_1^{1/3} K_1^{2/3}$$

$$y_2 = f^2(L_2, K_2) = L_2^{2/3} K_2^{1/3}$$

行业产出 y 依定义是 $y \equiv y_1 + y_2$。(记住，这是一种商品，而不是两种商品模型。)这两个厂商的总要素使用量是 $L \equiv L_1 + L_2, K \equiv K_1 + K_2$。可否定义一个函数 $y=f(L,K)$，即总产出是总要素投入的函数？答案看来是否定的。学生可试试看，就可知道答案是否定的。例如：

$$y = L_1^{1/3} K_1^{2/3} + L_2^{2/3} K_2^{1/3} = L_1^{1/3} K_1^{2/3} + (L - L_1)^{2/3} (K - K_1)^{1/3}$$

无法从此方程中消去 L_1 和 K_1。产出 y 将一直取决于劳动和资本在两个厂商之间的分配。即如果 1 单位劳动或 1 单位资本从厂商 1 移到厂商 2，那么，即使总劳动和总资本不变，总

产出将会变化，这是因为厂商生产函数是不同的。因此，行业产出在这种情况下不是总资源利用的函数。

我们将假定有两个行业，每个行业由许多相同的小厂商构成。那么，虽然要素价格在此模型中是内生决定的，每个厂商都将要素价格当作既定。即任一厂商的行动不会对要素或产出价格有任何重要影响，所有厂商同时（和相同的，这是因为所有厂商都是相同的）行动的确影响价格，但这些影响超出任一厂商的控制之外。最重要的是，行业生产函数能被假定为线性齐次的，即规模报酬不变。由定义：

$$f^j(tL_j, tK_j) \equiv t f^j(L_j, K_j) \equiv t y_j \qquad j=1,2$$

既然，这对所有 t 成立，令 $t=1/y_j$。那么：

$$f^j\left(\frac{L_j}{y_j}, \frac{K_j}{y_j}\right) \equiv f^j(a_{Lj}, a_{Kj}) \equiv 1 \qquad j=1,2 \tag{18-33}$$

方程(18-33)用投入产出系数来表示生产函数。这些 a_{ij} 曾在以前章节的线性模型中用过。那里，它们被视作常数。这里，它们是变量，沿厂商单位等产量线连续变化。方程(18-33)是对规模报酬不变的生产函数而言，该函数完全由单位等产量线刻画。这是因为所有其他等产量线都只不过是单位等产量线的膨胀或收缩而已。

我们将用方程组(18-33)作为问题中的约束条件。以不等式形式，我们将假定投入组合使得：

$$f^j(a_{Lj}, a_{Kj}) \geqslant 1$$

资源约束能以 a_{ij} 来表示，由简单算术：

$$L_1 + L_2 = \frac{L_1}{y_1} y_1 + \frac{L_2}{y_2} y_2 = L$$

或：

$$a_{L1} y_1 + a_{L2} y_2 = L \tag{18-34a}$$

相似地，资本约束是：

$$a_{K1} y_1 + a_{K2} y_2 = K \tag{18-34b}$$

受资源约束收益极大化模型能写成：

$$\begin{aligned} &\text{最大化} && z = p_1 y_1 + p_2 y_2 \\ &\text{满足约束} \\ & && a_{L1} y_1 + a_{L2} y_2 \leqslant L \quad a_{K1} y_1 + a_{K2} y_2 \leqslant K \\ & && f^1(a_{L1}, a_{K1}) \geqslant 1 \quad f^2(a_{L2}, a_{K2}) \geqslant 1 \end{aligned} \tag{18-35}$$

选择变量是：$y_1, y_2, a_{L1}, a_{K1}, a_{L2}, a_{K2}$。记住，$a_{ij}$ 不是常数。它们代表联合决定产出的投入组合。

(18-35)问题的拉格朗日函数是：

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = p_1 y_1 + p_2 y_2 + w(L - a_{L1} y_1 - a_{L2} y_2) + r(K - a_{K1} y_1 - a_{K2} y_2) \\ + \lambda_1[f^1(a_{L1}, a_{K1}) - 1] + \lambda_2[f^2(a_{L2}, a_{K2}) - 1] \end{aligned} \tag{18-36}$$

拉格朗日 w 和 r 代表劳动和资本的归因报酬或租用价格。Kuhn-Tucker 一阶条件因此是：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1}=p_1-a_{L1}w-a_{K1}r\leqslant 0 \qquad \text{if}<,y_1=0 \tag{18-37a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2}=p_2-a_{L2}w-a_{K2}r\leqslant 0 \qquad \text{if}<,y_2=0 \tag{18-37b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{L1}}=-wy_1+\lambda_1\frac{\partial f^1}{\partial a_{L1}}\leqslant 0 \qquad \text{if}<,a_{L1}=0 \tag{18-38a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{K1}}=-ry_1+\lambda_1\frac{\partial f^1}{\partial a_{K1}}\leqslant 0 \qquad \text{if}<,a_{K1}=0 \tag{18-38b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{L2}}=-wy_2+\lambda_2\frac{\partial f^2}{\partial a_{L2}}\leqslant 0 \qquad \text{if}<,a_{L2}=0 \tag{18-38c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{K2}}=-ry_2+\lambda_2\frac{\partial f^2}{\partial a_{K2}}\leqslant 0 \qquad \text{if}<,a_{K2}=0 \tag{18-38d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}=L-a_{L1}y_1-a_{L2}y_2\geqslant 0 \qquad \text{if}>,w=0 \tag{18-39a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}=K-a_{K1}y_1-a_{K2}y_2\geqslant 0 \qquad \text{if}>,r=0 \tag{18-39b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}=f^1(a_{L1},a_{K1})-1\geqslant 0 \qquad \text{if}>,\lambda_1=0 \tag{18-40a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2}=f^2(a_{L2},a_{K2})-1\geqslant 0 \qquad \text{if}>,\lambda_2=0 \tag{18-40b}$$

注意关系(18-37)。这些正是形成前章对偶线性规划的约束的非正利润条件。它们表明，如果极大值点使得利润对任一种商品是负的，那么，这种商品产出为 0。

关系(18-38)是要素使用的边际条件。因为 $f^j(L_j,K_j)$ 是 1 次齐次，则 f^j_L 是 0 齐次。因此：

$$f^j_L(L_j,K_j)\equiv f^j_L\left(\frac{L_j}{K_j}\right)\equiv f^j a_{Lj}\left(\frac{a_{Lj}}{a_{Kj}}\right)$$

将方程组(18-38)除以 y_j，可得：

$$\frac{\lambda_j}{y_j}\frac{\partial f^j}{\partial a_{Lj}}-w\leqslant 0$$

等等，或：

$$\frac{\lambda_j}{y_j}\frac{\partial f^j}{\partial L_j}-w\leqslant 0 \qquad \text{if}<,L_j=0 \tag{18-41a}$$

$$\frac{\lambda_j}{y_j}\frac{\partial f^j}{\partial K_j}-r\leqslant 0 \qquad \text{if}<,K_j=0 \tag{18-41b}$$

方程组(18-41)与(18-38)等价。如果将 (λ_j/y_j) 解释成 y_j 的边际成本，(18-41)与(18-38)都是要素使用的通常的边际条件，方程组(18-38)或(18-41)表明，如果极大值点使得任一要素的边际产值少于它的报酬(或租用价格)，则此要素不会被使用。否则，边际产值等于报

酬率。

再次考虑(18-35)提出的极大值问题和相关的拉格朗日函数(18-36)。这个极大化问题有六个选择变量,即 $y_1, y_2, a_{L1}, a_{K1}, a_{L2}$ 和 a_{K2}。极大化分两阶段实现是可能的。记住,利润极大化隐含着,在既定产量下,极小化成本。然后利润极大化的产出水平由二阶段极大化程序的第二部分决定。

在目前的模型中,总收益极大化(受资源约束)的假定能被分为两个阶段实现。首先,可以找到单位等产量线上"正确的"投入组合。即保持 $y_j=1, j=1,2$,我们选择使得每个产业总要素成本最小的 a_{ij}。这导致要素间的边际技术替代率等于要素价格比值。那么,给定这个相切条件,产出沿着扩张线变动(在这个例子中,是沿着通过单位产量线上点 (a_{Lj}^*, a_{Kj}^*) 的射线移动)直到找到 y_j^*。

这个过程可通过拉格朗日函数如下重排于代数上显现:

$$\mathcal{L}=p_1y_1+p_2y_2+wL+rK-[y_1(a_{L1}w+a_{K1}r)+\lambda_1(1-f^1(a_{L1},a_{K1}))]$$
$$-[y_2(a_{L2}w+a_{K2}r)+\lambda_2(1-f^2(a_{L2},a_{K2}))] \tag{18-42}$$

λ 的极大值是 $NNP^*=p_1y_1^*+p_2y_2^*$。先将 y_1 和 y_2 视作参数,极小化方括号项。这等价于两个独立的极小化问题:

最小化

$$y_1(a_{L1}w+a_{K1}r)$$

满足约束

$$f^1(a_{L1},a_{K1})=1 \tag{18-43a}$$

及最小化

$$y_2(a_{L2}w+a_{K2}r)$$

满足约束

$$f^2(a_{L2},a_{K2})=1 \tag{18-43b}$$

这两个问题拉格朗日函数恰是(18-42)中的方程号项。另外,这些极小化问题等价标准的成本极小化问题。如(18-43)所示。将目标函数乘以 y_1 或 y_2。既然 $y_1a_{L1}=L_1$ 等,并且由线性齐次性 $y_jf^j(a_{Lj},a_{Kj})\equiv f^j(y_ja_{Lj},y_ja_{Kj})\equiv f^j(L_j,K_j)$,这些方括号项分别等价于:

$$(wL_1+rK_1)+\lambda_1(y_1-f^1(L_1,K_1)) \tag{18-44a}$$
$$(wL_2+rK_2)+\lambda_2(y_2-f^2(L_2,K_2)) \tag{18-44b}$$

(再次,由齐次性 $f^1(a_{L1},a_{K1})=1$ 等价于 $f^1(L_1,K_1)=y_1$,等。)

拉格朗日函数(18-44)正是来自以下问题:

最小化

$$wL_1+rK_1=C_1$$

满足约束

$$f^1(L_1,K_1)=y_1 \tag{18-45a}$$

及最小化

$$wL_2+rK_2=C_2$$

满足约束

$$f^2(L_2,K_2)=y_2 \tag{18-45b}$$

其中，y_1 和 y_2 在此处是参数。问题(18-43)和(18-45)因此是等价的。(18-45)是极小化成本以实现某产量 y_i 的经典问题。目标函数 C_i 是实现产出的总成本，且 λ_i 是产出的边际成本。然而(18-45)和(18-43)中的 λ_i 并不相同，这是因为约束条件的单位是不同的。

与子模型(18-43a)相联系的拉格朗日函数是：

$$\mathcal{L}=y_1(wa_{L1}+ra_{K1})+\lambda_1(1-f^1(a_{L1},a_{K1})) \tag{18-46a}$$

注意，既然 y_1 在这里被视作常数，极小化 $y_1(wa_{L1}+ra_{K1})$ 产生与极小化 $wa_{L1}+ra_{L1}$ 相同的解和比较静态结果。从(18-46a)中得到的一阶条件是：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_{L1}}=y_1w-\lambda_1\frac{\partial f^1}{\partial a_{L1}}=0 \tag{18-47a}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a_{K1}}=y_1r-\lambda_1\frac{\partial f^1}{\partial a_{K1}}=0 \tag{18-47b}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda_1}=1-f^1(a_{L1},a_{K1})=0 \tag{18-47c}$$

方程(18-47)恰恰分别是关系(18-38a)、(18-38b)和(18-40a)(不考虑角点解)。

从子模型(18-43b)中可得相似的结果。产业 2 的拉格朗日函数是：

$$\mathcal{L}=y_2(a_{L2}w+a_{K2}r)+\lambda_2(1-f^2(a_{L2},a_{K2})) \tag{18-46b}$$

可得一阶条件：

$$y_2w-\lambda_2\frac{\partial f^2}{\partial a_{L2}}=0 \tag{18-48a}$$

$$y_2r-\lambda_2\frac{\partial f^2}{\partial a_{K2}}=0 \tag{18-48b}$$

$$1-f^2(a_{L2},a_{K2})=0 \tag{18-48c}$$

这些方程分别与(18-38c)、(18-38d)和(18-40b)一样。因此，这两个子优化问题解释了整个模型 10 个一阶方程中的 6 个。这 6 个方程决定了每个产业的单位产量线上极小化成本的投入组合(a_{L1}^*,a_{K1}^*)、(a_{L2}^*,a_{K2}^*)和两个产业的边际成本函数(λ_1^*/y_1^*)和(λ_2^*/y_2^*)。下面要决定的 4 个变量是 y_1^*，y_2^*，w，r。

四方程模型

让我们从(18-47)、(18-48)中解出 a_{ij}^*。将(18-47a)除以(18-47b)，(18-48a)除以(18-48b)可得：

$$\frac{\partial f^1/\partial a_{L1}}{\partial f^1/\partial a_{K1}}=\frac{w}{r} \tag{18-49a}$$

$$\frac{\partial f^2/\partial a_{L2}}{\partial f^2/\partial a_{K2}}=\frac{w}{r} \tag{18-49b}$$

方程(18-49a)和(18-47c)代表由不确定的 a_{L1}，a_{K1} 和变量 w/r 构成的两个方程。同样，(18-49b)和(18-48c)代表由不确定的 a_{L2}，a_{K2} 和变量 w/r 构成的两个方程。因此，我们可将(18-47)和(18-48)的解写作：

$$a_{ij}=a_{ij}^*\left(\frac{w}{r}\right) \qquad i=L,K \qquad j=1,2 \tag{18-50}$$

$$\frac{\lambda_j}{y_j}=\frac{\lambda_j^*}{y_j^*}(w,r) \qquad j=1,2 \tag{18-51}$$

这些方程是此模型中非常重要的特点。第一，他们表明投入系数仅是要素价格比率的函数。具体而言，a_{ij}^* 不是任一种要素禀赋的函数。第二，边际成本函数(18-51)不是产出水平的函数而仅是要素价格的函数。这是因为生产函数的线性齐次性质。第 9 章中已表明产出的边际成本与成本函数无关，证明如果 $y=f(x_1,x_2)$ 是线性齐次的，成本函数能写成 $C^*=yA(w_1,w_2)$，$\partial C^*/\partial y=A(w_1,w_2)$，这正是方程组(18-51)。方程组(18-50)成立是因为对线性齐次函数而言，任一产量曲线描绘了整个函数。无论产量为 y_j^0 时发生的什么都只不过是 $y_j=1$ 时所发生的扩张或收缩。

由一般比较静态理论可知：

$$\frac{\partial a_{Lj}^*}{\partial w}<0 \tag{18-52a}$$

$$\frac{\partial a_{Kj}^*}{\partial r}<0 \tag{18-52b}$$

单位投入产出要素水平线对其自身价格来说是向下倾斜的。因为 a_{ij}^* 是比值 w/r 的函数，$a_{ij}^*(w/r)$ 是 w 和 r 的 0 次齐次函数。由欧拉定理：

$\partial a_{Lj}^*/\partial w<0$ $\qquad$ $\dfrac{\partial a_{Lj}^*}{\partial w}w+\dfrac{\partial a_{Lj}^*}{\partial r}r\equiv 0$

因

$$\frac{\partial a_{Lj}^*}{\partial r}>0 \tag{18-52c}$$

相似地，可以证明：

$$\frac{\partial a_{Kj}^*}{\partial w}>0 \tag{18-52d}$$

以后我们将用到这些结果。

如果我们将这些解代入到(18-47)和(18-48)6 个方程中去，整个 10-方程模型(10 个一阶条件)能被简化为 4 个未知数 y_1，y_2，w 和 r 的 4 个方程。最初 10 个方程余下的 4 个是(18-37a)、(18-37b)、(18-39a)和(18-39d)。将解(18-50)代入到这些方程(再次，我们忽略角点解的可能性)，可得：

$$a_{L1}^*w+a_{K1}^*r=p_1 \tag{18-53a}$$

$$a_{L2}^{*}w+a_{K2}^{*}r=p_2 \tag{18-53b}$$

$$a_{L1}^{*}y_1+a_{L2}^{*}y_2=L \tag{18-54a}$$

$$a_{K1}^{*}y_1+a_{K2}^{*}y_2=K \tag{18-54b}$$

整个模型现已被压缩成 4 个方程。另外，这些正是线性规划模型中得到的两个 0-利润条件(18-53)和两个资源约束条件(18-54)。然而，这里 a_{ij}^{*} 不是常数。正如方程组(18-50)所示，它们是要素价格比值 w/r 的函数。

虽然上述情况是 4 个方程、4 个未知数，这些方程的结构很特别。变量 w 和 r，参数 p_1 和 p_2 只出现在前两个方程(18-53)中。变量 y_1 和 y_2，参数 L 和 K 只出现在方程组(18-54)中。因此，这些方程是可分解成两个双未知数双方程的子方程组。正如在线性模型中一样，第一个子方程组(方程(18-53a)和(18-53b))的系数矩阵(a_{ij}^{*})是第二个子方程组(方程组(18-54))系数矩阵的转置。

作为此可分性的结果，方程组(18-53)的求解独立于(18-54)，这是因为 a_{ij}^{*} 仅是 w/r 的函数：

$$w=w^{*}(p_1,p_2) \tag{18-55a}$$

$$r=r^{*}(p_1,p_2) \tag{18-55b}$$

在另一方面，虽然从(18-54)能解出以 L 和 K 表达的 y_1 和 y_2，这些解将涉及 a_{ij}^{*}，它们是w/r的函数，且由(18-55)，它们也是 p_1 和 p_2 的函数。因此，解(18-54)且将(18-55)代入产出供给函数可得：

$$y_1=y_1^{*}(p_1,p_2,L,K) \tag{18-56a}$$

$$y_2=y_2^{*}(p_1,p_2,L,K) \tag{18-56b}$$

这正和无齐次性条件的最初模型中一样。如前，$\partial y_1^{*}/\partial p_1,\partial y_2^{*}/\partial p_2>0$ 仍然是正确的。每个产业的供给曲线是向上倾斜的。

要素均等化定理

方程组(18-55)是要素价格均等化定理的基础，此定理是国际贸易理论的基本结果。考虑在两个国家的情况下，每个国家生产相同的两种商品且与另一个国家进行贸易往来。在贸易发生前，给定两国不同的边际生产成本，即不同的生产可能性边界，两国产品的价格一般是不同的。(当然，即使两国的边际成本函数相同，两国消费者口味的不同也会导致产出价格的不同。)然而，当开放贸易后，产品价格趋向于相同。在没有运输或其他交易成本的情况下，仅当两国产品价格相同时，即每个国家的消费者面对相同的产品价格时，可从贸易往来中获得的收益才能完全实现。给定"宁多勿少"的假定下，这个结果是被隐含着的。

一个较不明显的问题是，产品价格趋同化对要素价格的影响。如果要素可在两国间无成本自由流动，很明显，两国的要素价格将不得不相同。要素将流向高报酬的国家，降低那里的报酬率或租用费并且提高流出国的报酬率或租用费。但如果要素不能从一个国家向另

一个国家，会出现什么情况？即假定产品能从一个国家移向另一个国家，但要素不能。那么当产品价格趋同时，要素价格如何变化？

方程组(18-55)表明，在某些条件下，尽管要素无法流动，当两国产品价格相同时，要素价格也将是相同的。这个惊人的结果被称作要素价格均等化定理，其依赖于方程组(18-55)的形式。那些方程表明，要素价格仅是产出价格的函数。要素禀赋并不进入这些方程的右边，因此，并不参与决定要素价格。然而，$w^*(p_1,p_2)$和$r^*(p_1,p_2)$具体的函数形式将取决于经济中基本的生产函数。如果生产技术，即基本的生产函数，在两国中是相同的，即贸易发生是因为两国要素禀赋不同或消费者口味不同，那么，方程组(18-55)的函数形式在两国将是相同的。因为，它们以同样的方式依赖于产出价格，而产出价格在两个国家是相同的。不久以后将会探讨一个与两国间不同相对要素强度有关的额外限制。注意，此结果极为依赖产业生产函数的线性齐次假定。正是此假定，使得一阶条件可用要素强度变量a_{ij}表示，而一阶条件反过来允许a_{ij}的解仅由相对价格比率w/r表示。正是因为相对要素强度仅依赖于要素价格才使得方程组(18-53)，0-利润条件，可得出仅由产业价格表示的要素价格。没有每个产业中的规模报酬不变，以上的步骤根本无法贯彻。

Stolper-Samuelson 定理

现在让我们考察产出价格变化对要素价格的影响。既然方程组(18-53)是要素价格的行列式，该模型这部分的比较静态结果可以从方程组(18-53)对产出价格的微分得到。让我们将这些方程对p_1微分，记住解$w^*(p_1,p_2)$、$r^*(p_1,p_2)$已经代入这些方程，而且a_{ij}^*是要素价格的函数，因此是产出价格的函数。因此，(18-35a)微分可得：

$$a_{L1}^*\frac{\partial w^*}{\partial p_1}+w^*\frac{\partial a_{L1}^*}{\partial p_1}+a_{K1}^*\frac{\partial r^*}{\partial p_1}+r^*\frac{\partial a_{K1}^*}{\partial p_1}\equiv 1$$

$$a_{L1}^*\frac{\partial w^*}{\partial p_1}+a_{K1}^*\frac{\partial r^*}{\partial p_1}\equiv 1-w^*\frac{\partial a_{L1}^*}{\partial p_1}-r^*\frac{\partial a_{K1}^*}{\partial p_1} \tag{18-57a}$$

相似地，微分(18-53b)可得：

$$a_{L2}^*\frac{\partial w}{\partial p_1}+a_{K2}^*\frac{\partial r^*}{\partial p_1}\equiv -w^*\frac{\partial a_{L2}^*}{\partial p_1}-r^*\frac{\partial a_{K2}^*}{\partial p_1} \tag{18-57b}$$

然而，(18-57a)和(18-57b)右边的后两项加总为0。考虑生产函数$f^1(a_{L1}^*,a_{K1}^*)\equiv 1$，将其对$p_1$微分可得：

$$\frac{\partial f^1}{\partial a_{L1}}\frac{\partial a_{L1}^*}{\partial p_1}+\frac{\partial f^1}{\partial a_{K1}}\frac{\partial a_{K1}^*}{\partial p_1}\equiv 0 \tag{18-58}$$

利用一阶条件：$\partial f^1/\partial a_{L1}=y_1w/\lambda_1$，$\partial f^1/\partial a_{K1}=y_1r/\lambda_1$，且消去每项中的因子$y_1/\lambda_1$，可得：

$$w^*\frac{\partial a_{L1}^*}{\partial p_1}+r^*\frac{\partial a_{K1}^*}{\partial p_1}\equiv 0 \tag{18-59a}$$

相似的步骤可证明：

$$w^* \frac{\partial a_{L2}^*}{\partial p_1} + r^* \frac{\partial a_{K2}^*}{\partial p_1} \equiv 0 \tag{18-59b}$$

因此，方程组(18-57)简化为：

$$a_{L1}^* \frac{\partial w^*}{\partial p_1} + a_{K1}^* \frac{\partial r^*}{\partial p_1} \equiv 1 \tag{18-60a}$$

$$a_{L2}^* \frac{\partial w^*}{\partial p_1} + a_{K2}^* \frac{\partial r^*}{\partial p_1} \equiv 0 \tag{18-60b}$$

方程组(18-60)表明了产出价格变化导致要素价格变化，且其结构与决定线性模型中这些变量的方程组一样。(在 a_{ij} 为常数情况下，微分形式的式(18-60)直接等价于未微分的形式(18-53)。) 因此，此模型关于这些变量的分析，在此线性模型中是相同的。

与前相同，令：

$$A = \begin{vmatrix} a_{L1}^* & a_{K1}^* \\ a_{L2}^* & a_{K2}^* \end{vmatrix}$$

利用克莱姆法则求解，可得：

$$\frac{\partial w^*}{\partial p_1} = \frac{a_{K2}^*}{A} \tag{18-61a}$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial p_1} = -\frac{a_{L2}^*}{A} \tag{18-61b}$$

以同样的方式，如果方程组(18-53)对 p_2 微分，可得：

$$\frac{\partial w^*}{\partial p_2} = -\frac{a_{K1}^*}{A} \tag{18-61c}$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial p_2} = \frac{a_{L1}^*}{A} \tag{18-61d}$$

让我们考察这些关系。首先，仅当 $A \neq 0$ 时这些解是正确的。事实上这是隐含数定理的充分性条件。当充分性条件成立时，$w^*(p_1, p_2)$、$r^*(p_1, p_2)$是局部有定义的。因此，这个条件也为要素价格均等化定理所要求，如果：

$$\frac{a_{L1}^*}{a_{K1}^*} > \frac{a_{L2}^*}{a_{K2}^*} \tag{18-62a}$$

$$\frac{a_{L1}^*}{a_{K1}^*} < \frac{a_{L2}^*}{a_{K2}^*} \tag{18-62b}$$

成立，在此两要素、两商品情况下，行列式 A 将是非 0 的。这些方程等价于：

$$\frac{L_1^*}{K_1^*} > \frac{L_2^*}{K_2^*} \tag{18-63a}$$

$$\frac{L_1^*}{K_1^*} < \frac{L_2^*}{K_2^*} \tag{18-63b}$$

换句话说，如果一个产业比另一个产业劳动密集度高，即它的资本-劳动比率低于另一个产业的资本-劳动比率，那么将要素价格定义仅为产出价格函数的方程组是有意义的。同样

地，显示要素价格对产出价格变化如何反应的比较静态关系(18-61)也是有定义的。

关于比较静态关系(18-61)，某个产业劳动密集度高是一个严格的局部条件。尽管比较静态意味着对不同的均衡进行比较，所有比较静态方程事实上仅是在某点取值的偏导数。定义选择函数的函数仅需在某点邻域上有定义，即它们必须有可微的种种性质，非 0 的雅可比行列式等，使得选择函数在某点存在。

然而，要证明要素价格均等化，$L_1/K_1 \neq L_2/K_2$ 的局部性条件不够强。要素价格均等化定理基本上是一个全局断言。即它宣称，从两国产出价格不同开始，当产出价格收敛时，要素价格也将收敛。但这应发生在价格的完整路径上。因此，要素强度上严格局部的条件不足以保证要素的收敛性。如果要素价格不管初始产出价格和要素禀赋如何都收敛，那么某个产业将一直不得不比另一个产业劳动(或资本)密集度更高。就是说，对所有的产出价格，我们必须有 $L_i/K_i > L_j/K_j$。如果产业 1 最初是劳动密集度高的产业，当产出价格变化时，该产业必须仍然是劳动密集度高的产业。如果某个产业从相对劳动密集转为相对资本密集，要素价格对产出价格变动反应的方向将是相反的。在方程组(18-61)中，分母将全部变号。这意味着，比如说，如果产业 1 在某些产出价格是劳动密集型，当产出价格收敛时，工资和租金将向同一个方向移动。然而，对不同的禀赋而言或如果产出价格使得产业 1 是资本密集型，当两国产出价格收敛时要素价格将反向变动。为了证明要素价格均等化，(除了像线性齐次等的假定外)所需要的是全局条件。对所有可能产出或生产边界上的产出组合，$L_i/K_i > L_j/K_j$ 成立。严格局部性条件是不够强的。

如果每个部门的生产函数是线性齐次的，要素强度的转变不可能发生。转变意味着图 18-4 中所画的曲线将与连接两原点 O_1 和 O_2 的对角线相交。但是，对角线将不得不是每个生产函数的扩张路径，契约曲线不得不是对角线自身。当要素强度是常数且相等时，例如，如果每个行业的生产函数是相同的柯布-道格拉斯函数，就会发生这种情况。

现在假定产业 1 是劳动密集高的产业，即 $a_{L1}/a_{K1} > a_{L2}/a_{K2}$，(为了简略起见，略去星号。)那么 $A>0$，且从方程(18-61a)和(18-61b)可知：

$$\frac{\partial w}{\partial p_1} > 0 \tag{18-64a}$$

$$\frac{\partial r}{\partial p_1} < 0 \tag{18-64b}$$

这些结果是一般的 Stolper-Samuelson 定理。它们再次说明，如果劳动密集型产业的价格增加，名义工资率会上升，而资本租金率会下降。如果 p_1 上升，那么，我们知道，当经济沿着生产可能性边界时，y_1 增加且 y_2 减少，即 $\partial y_1/\partial p_1 > 0$，$\partial y_2/\partial p_1 < 0$。因此，在这种情况下，劳动密集型行业在扩张，而资本密集型行业在收缩，这导致对劳动总需求的净增加和资本总需求的净减少。因此，劳动价格上升而资本价格下降，一般而言，生产要素的价格当该要素密集度最高、行业产品的价格上升时也上升，当使用该要素密集度最小、行业产品的价格上升时它的价格下降。

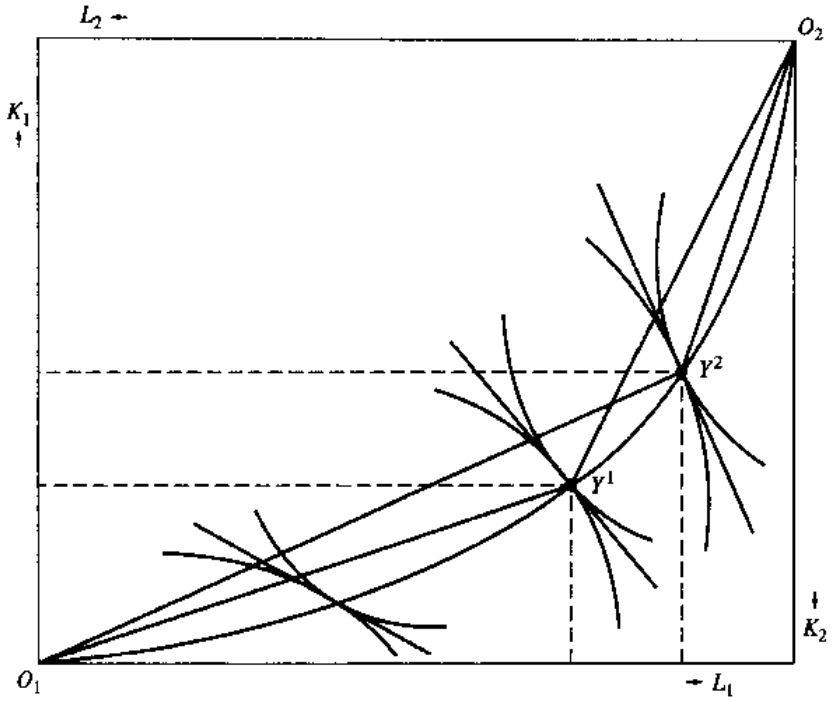

图 18-4　Stolper-Samuelson 定理的图示：可变比例。考虑与图 18-2 相似的 Edgeworth 图，水平轴代表劳动，竖轴代表资本。连接两原点的契约线 O_1O_2 已画出。它有一个特别的形状，它是凸向过 O_1 的劳动轴，即契约线以递增速率向 O_2 上升。正是这种形状保证产业 1 将一直比产业 2 劳动密集度高。考虑 O_1O_2 线上点 Y^1 弦 O_1Y^1 的斜率是 K_1/L_1。连接 Y^1 和 O_2 的弦，Y^1O_2 的斜率是 K_2/L_2。如图中所示，$K_1/L_1<K_2/L_2$ 或 $K_1/L_1>K_2/L_2$。另外，在契约线上任一点这都成立。产业 1 一直比产业 2 的劳动密集度高。

现在考虑等产量线穿过契约线时的斜率。在 O_1 点附近，契约线与劳动轴相近，等产量线较平坦，即它们斜率的绝对值较低。当某人沿着 O_1O_2 移向 O_2 时，与契约线相交的等量线在交点的斜率是递增的，如 Y^1 和 Y^2 点所示。等产量线的斜率是 w/r，即工资与租金的比值。因此，因为产业 1 劳动密集度一直较高，当产出 y_1 因 p_1 上升而扩张时，工资率相对租金率上升。这与方程组(18-61)和后来的分析一致。然而，实际的工资增加不易在几何上表出。注意，当 p_1 上升、因此 y_1 增加时，两个产业劳动密集度都下降(虽然产业 1 劳动密集度仍比产业 2 高)。例如，当产出从 Y^1 移到 Y^2，资本-劳动比值上升，对产业 1 而言，它是用弦 O_1Y^2 的斜率衡量，对产业 2 而言，是用 Y^2O_2 的斜率衡量。即劳动-资本比值减少，或两个产业劳动密集度都较低。这可视作对实际工资率上升和实际资本租金率下降的反应。

然而，以前的价格分析仅属于名义价格变化，如果 p_1 和 w 都上升，实际工资会上升吗？即在这两个价格变化后，劳动所有者在更高的工资率上能否购买更多的商品，很明显，资本所有者的货币价格已经下降，实际或名义上情况都更差一些。

劳动所有者的实际收入当工资率上升时将会上升。工资率比产出价格增加更高的百分

比，即：

$$\lim \frac{\Delta w/w}{\Delta p_1/p_1}=\frac{\partial w}{\partial p_1}\frac{p_1}{w}>1 \tag{18-65}$$

如果劳动所有者仅消费产业 1 的产品，那么方程(18-65)保证更高的购买力。如果劳动所有者也消费一部分 y_2，那么由于 y_2 的价格没有变化，(18-65)代表实际收入更大的增加。(取极限时，如果仅有 y_2 被消费，那么 w 的任何增加由于 p_2 不变将是实际收入的增加。)

从方程(18-61a)，可得：

$$\frac{\partial w}{\partial p_1}=\frac{a_{K2}}{A}>0$$

从 0-利润一阶条件(18-53a)：

$$p_1=a_{L1}w+a_{K1}r$$

$$\frac{p_1}{w}=a_{L1}+a_{K1}\frac{r}{w}$$

因此：

$$\frac{p_1}{w}\frac{\partial w}{\partial p_1}=\frac{a_{K2}a_{L1}+(r/w)a_{K1}a_{K2}}{a_{K2}a_{L1}-a_{K1}a_{L2}}>1 \tag{18-65a}$$

正如固定系数情况一样，同样的步骤表明：

$$\frac{p_2}{r}\frac{\partial r}{\partial p_2}>1 \tag{18-65b}$$

即既然产业 2 是资本密集型，p_2 的增加不仅将增加资本的名义租金率而且也增加资本的实际租金率。

另一系列结果是产出价格变化对要素强度的影响。比如说，考虑当 p_1 增加时每个产业的劳动-资本比值如何变化。如前假定产业 1 是劳动密集型，在行业 j 中的劳动-资本比值是 $L_j/K_j=a_{Lj}/a_{Kj}$。具体而言，a_{ij} 是要素价格 w 和 r 的函数，w 和 r 是产出价格的函数，可知：

$$\frac{a_{Lj}}{a_{Kj}}=g(w^*(p_1,p_2),r^*(p_1,p_2))$$

利用商的链导法则，可得：

$$(a_{Kj})^2\frac{\partial(a_{Lj}/a_{Kj})}{\partial p_1}=a_{Kj}\left(\frac{\partial a_{Lj}}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial p_1}+\frac{\partial a_{Lj}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p_1}\right)-a_{Lj}\left(\frac{\partial a_{Kj}}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial p_1}+\frac{\partial a_{Kj}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p_1}\right)$$

重排可得：

$$(a_{Kj})^2\frac{\partial(a_{Lj}/a_{Kj})}{\partial p_1}=\left(a_{Kj}\frac{\partial a_{Lj}}{\partial w}-a_{Lj}\frac{\partial a_{Kj}}{\partial w}\right)\frac{\partial w}{\partial p_1}$$

$$+\left(a_{Kj}\frac{\partial a_{Lj}}{\partial r}-a_{Lj}\frac{\partial a_{Kj}}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial p_1}<0 \tag{18-66a}$$

这个结果来自成本极小化子模型(18-43)中得到的比较静态关系。那些模型的比较静态产生以下结果，对两个产业：

$$\frac{\partial a_{Lj}}{\partial w}<0 \qquad j=1,2 \tag{18-52a}$$

$$\frac{\partial a_{Kj}}{\partial r}<0 \qquad j=1,2 \tag{18-52b}$$

$$\frac{\partial a_{Lj}}{\partial r}>0 \qquad j=1,2 \tag{18-52c}$$

$$\frac{\partial a_{Kj}}{\partial w}>0 \qquad j=1,2 \tag{18-52d}$$

将这些符号和方程组(18-64)即$\partial w/\partial p_1>0$，$\partial r/\partial p_1<0$代入(18-66a)，立即可得，当 y_1 是劳动密集时：

$$\frac{\partial(a_{Lj}/a_{Kj})}{\partial p_1}<0 \qquad j=1,2$$

相似地，关于 p_2 的变化，我们有：

$$(a_{Kj})^2\frac{\partial(a_{Lj}/a_{Kj})}{\partial p_2}=\left(a_{Kj}\frac{\partial a_{Lj}}{\partial w}-a_{Lj}\frac{\partial a_{Kj}}{\partial w}\right)\frac{\partial w}{\partial p_2}$$
$$+\left(a_{Kj}\frac{\partial a_{Lj}}{\partial r}-a_{Lj}\frac{\partial a_{Kj}}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial p_2}>0 \tag{18-66b}$$

在(18-66b)和(18-66a)间惟一的不同是$\partial w/\partial p_2$，$\partial r/\partial p_2$ 代替了$\partial w/\partial p_1$ 和$\partial r/\partial p_1$。既然这后两项与前两项符号分别相反，则有：

$$\frac{\partial(a_{Lj}/a_{Kj})}{\partial p_2}>0 \qquad j=1,2$$

注意，方程组(18-66)表明，如果劳动密集商品(这里是 y_1)的价格上升，那么劳动-资本比率在两个产业将下降。当 p_1 上升时，将生产更多劳动密集的商品和更少资本密集的商品。这导致了对劳动需求的净增加。然而，经济中的总劳动量是固定的。经济对劳动需求的增加以如下两种方式反应。劳动价格 w 上升，同时资本租金价格下降，这些与方程组(18-64)一致。为了节约目前价格较高的劳动，两个产业减少生产中劳动相对价格的比例。这种情况已在图 18-4 中绘出。这些结果不能在固定系数的模型中观察到。在那里，a_{ij} 是常数，因此不能被产出价格改变。

Rybczynski 定理

现在让我们转向两要素、两商品可变比例模型，当禀赋变化时的比较静态结果。在要素价格均等化定理的假定设条件下，劳动或资本(或两者)资源禀赋的变化对要素价格并无影响。(方程组(18-50))$a_{ij}=a_{ij}^*(w/r)$和方程组(18-53)隐含要素价格仅是产出价格的函数(方程组(18-55))。因此，第一个结果是：

$$\frac{\partial w}{\partial L}=\frac{\partial w}{\partial K}=\frac{\partial r}{\partial L}=\frac{\partial r}{\partial K}=0 \tag{18-67}$$

不要忘记在这些关系中，产出价格是被固定的。只有资源禀赋是变动的。当资源禀赋变化时，图 18-3 中所画的 NNP 平面平行移动并且与新的生产边界相切，产出价格保持不变。既然产出价格保持不变，在给定假定下要素价格不变。

现在让我们考虑劳动禀赋变化对产出水平的影响。既然方程组(18-53)仅涉及价格，从方程组(18-54)中可得到的比较静态关系如下：

$$a_{L1}^{*}y_1+a_{L2}^{*}y_2=L \tag{18-54a}$$

$$a_{K1}^{*}y_1+a_{K2}^{*}y_2=K \tag{18-54b}$$

这两个等式是此模型最初的资源约束，其中生产函数线性齐次的假定已经用来将 a_{ij} 仅表示为要素价格 w 和 r 的函数。现在如果 L 或 K 变化，因为：$\partial a_{ij}^{*}/\partial L=[\partial a_{ij}^{*}/\partial(w/r)][\partial(w/r)/\partial L]=0$，$a_{ij}$ 保持不变。因此，对此模型关于禀赋变化的比较静态而言，a_{ij}^{*} 甚至能在这个可变比例模型中被当作常数。

让我们将方程组(18-54)对 L 偏微分。(再次，为了记法简便略去星号。但不要忘记执行这些运算所需的条件。)偏微分可得：

$$a_{L1}\frac{\partial y_1}{\partial L}+a_{L2}\frac{\partial y_2}{\partial L}\equiv 1$$

$$a_{K1}\frac{\partial y_1}{\partial L}+a_{K2}\frac{\partial y_2}{\partial L}\equiv 0$$

因此，利用克莱姆法则，如线性规划模型中一样：

$$\frac{\partial y_1}{\partial L}\equiv\frac{a_{K2}}{A}=\frac{a_{K2}}{a_{L1}a_{K2}-a_{L2}a_{K1}} \tag{18-68a}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial L}\equiv-\frac{a_{K1}}{A}=\frac{-a_{K1}}{a_{L1}a_{K2}-a_{L2}a_{K1}} \tag{18-68b}$$

在产业 1 是劳动密集的假定下，$A>0$，因此 $\partial y_1/\partial L>0$，$\partial y_2/\partial L<0$。将式(18-54)对 K 微分可得：

$$\frac{\partial y_1}{\partial K}\equiv-\frac{a_{L2}}{A}=\frac{-a_{L2}}{a_{L1}a_{K2}-a_{L2}a_{K1}} \tag{18-68c}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial K}\equiv\frac{a_{L1}}{A}=\frac{a_{L1}}{a_{L1}a_{K2}-a_{L2}a_{K1}} \tag{18-68d}$$

再次假定产业 1 是劳动密集型，(18-68c)表明 $\partial y_1/\partial K<0$，并且(18-68d)表明 $\partial y_2/\partial K>0$。

这些结果，被称作 Rybczynski 定理。表示在要素价格均等化定理假定下，比如说(保持产出价格不变)，劳动禀赋的增加将增加劳动密集产业的产出并且减少资本密集型产业的产出。同样地，资本禀赋的增加将增加资本密集产业的产出并且减少劳动密集产业的产出。在我们的强假定下，所有这些反应都不会影响要素价格。这些结果在图 17-5 的线性模型中显示出来。

方程组(18-68)事实上可从以前的结果得出。记住，交互条件(18-25a)和(18-25b)是从没有齐次限制的一般模型中导出：

$$\frac{\partial y_1}{\partial L}=\frac{\partial w}{\partial p_1}\quad\frac{\partial y_2}{\partial L}=\frac{\partial w}{\partial p_2} \tag{18-25a}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial K}=\frac{\partial r}{\partial p_1}\quad\frac{\partial y_2}{\partial K}=\frac{\partial r}{\partial p_2} \tag{18-25b}$$

方程组(18-61)和(18-68)可确定这些交互关系。例如，从(18-61a)和(18-68a)：

$$\frac{\partial w}{\partial p_1}=\frac{a_{K2}}{A}=\frac{\partial y_1}{\partial L}$$

Rybczynski 定理事实上仅是 Stolper-Samuelson 定理的对偶关系。在要素和产出价格间的关系，等于要素和产出实物之间的关系。关于要素价格的所有结果可类推到要素自身，反之亦成立。

具体而言，弹性关系(18-65)对要素的自身而言有对应的结果。因为比较静态公式(18-61)和(18-68)是同样的，两个代数关系是等价的。例如，假定劳动禀赋增加，产业 1 是劳动密集型。那么，产业 1 的产出将不仅增加，而且将以劳动增加更快的速率增加，即：

$$\frac{L}{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial L}>1$$

如前，因为　　$L=a_{L1}y_1+a_{L2}y_2$，$L/y_1=a_{L1}+a_{L2}(y_2/y_1)$

故：

$$\frac{L}{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial L}=\frac{a_{K2}a_{L1}+a_{K2}a_{L2}(y_2/y_1)}{a_{K2}a_{L1}-a_{K1}a_{L2}}>1 \tag{18-69a}$$

相似的步骤表明：

$$\frac{K}{y_2}\frac{\partial y_2}{\partial K}>1 \tag{18-69b}$$

18.4　两商品、两要素模型的应用

Stolper-Samuelson 定理能用来决定税收政策在收入分配上的影响。考虑一个被该定理所有假定化的经济。假定该经济体与世界其余部分自由贸易，即对商品流动无限制。假定该经济体规模小到它是价格的接受者，而且运输成本较小。外生给定的商品 1 和 2 的世界价格记作 p_1^0 和 p_2^0。假定在自由贸易下，商品 1、劳动密集商品被进口，而资本密集商品被出口。

现在假定政府对进口的外国商品施加关税，记从价关税率为 t。国内价格变为：

$$p_1=(1+t)p_1^0 \tag{18-70a}$$

$$p_2=p_2^0 \tag{18-70b}$$

这两个方程表明，作为关税的结果，商品 1 的价格相对商品 2 增加。既然商品 1 是劳动密集型，由 Stolper-Samuelson 定理(以任一种商品表示的)表明实际工资率增加而实际租金率下降。因此，我们有如下结论：关税将有利于进口部门所用较密集的要素而损害另一种要素。

下面导入 Rybczynski 定理两个简单应用。首先，再次考虑刚刚讨论的小型开放经济。该经济的生产可能性边界由图 18-5 的曲线 AB 表示。在该经济中的公司面临外生给定的世界价格 p_1^0 和 p_2^0。MN 代表斜率为 $-p_1^0/p_2^0$ 世界价格线。如图 18-3 所示，生产点在曲线 AB 和价格线 MN 的切点 E。现在假定通过聚积，经济体的资本禀赋增加，而劳动禀赋不

变。在拥有更多的资本禀赋时，当某一种商品生产固定时，能生产更多的另一种产品。资本禀赋更多时的生产可能性边界，因此移到图 18-5 中的曲线 CD。新的生产点切点为曲线 CD 与新的世界价格线 PQ(其斜率为 $-p_1^0/p_2^0$)的切点。因为该经济体是小型的，世界价格并不受该经济资本积聚的影响，这意味着 PQ 与 MN 平行。

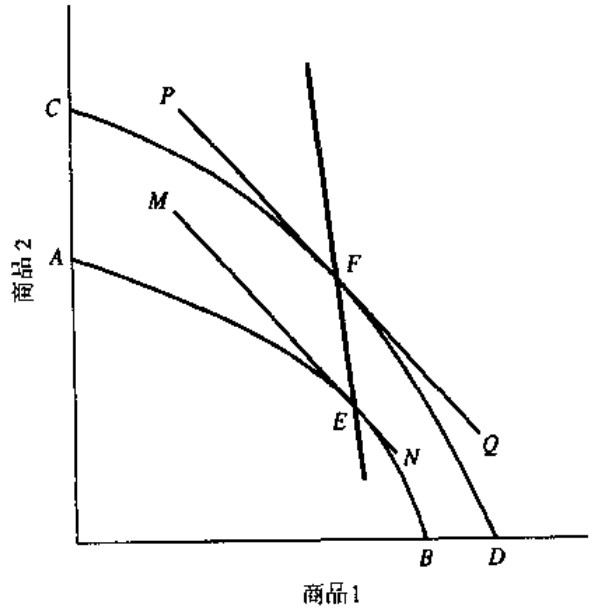

图 18-5 当一个国家积聚资本时，它的生产边界线向外移出。令商品 1 是劳动密集型，世界价格不变(以 MN 和 PQ 的斜率表示)，商品 1 的产出扩张，而商品 2 的产出收缩。生产点的轨迹 EF 是线性的，这是因为投入-产出系数仅是产出价格的函数。

由 Rybczynski 定理，资本密集型商品 2 的生产必须增加而劳动密集型商品 1 必须减少。这意味着点 F 位于 E 点西北处。线 EF 是资本存量增长时生产点的轨迹。它事实上是线性的。为了看清这一点，注意商品 2 产出的变化与引起其变化的商品 1 产出的变化的比值为 dy_2/dy_1。利用方程(18-68c)和(18-68d)，

$$\frac{dy_2}{dy_1}=\frac{\partial y_2/\partial K}{\partial y_1/\partial K}=-\frac{a_{L1}}{a_{L2}} \tag{18-71a}$$

既然 a_{ij} 仅是产出价格的函数，轨迹的斜率是常数(全是负数)。既然点 F 必须位于价格线 NM 上，EF 必定比 MN 更陡。轨迹线 EF 有时被称作(资本的)Rybczynski 线。

以上的分析可以用来表明劳动禀赋增加的产出影响，劳动的 Rybczynski 线有斜率

$$\frac{dy_2}{dy_1}=\frac{\partial y_2/\partial L}{\partial y_1/\partial L}=-\frac{a_{K1}}{a_{K2}} \tag{18-71b}$$

因为产业 2 是资本密集的，则：

$$\frac{a_{L1}}{a_{L2}}>\frac{a_{K1}}{a_{K2}}$$

这隐含着 Rybczynski 资本线比 Rybczynski 劳动线更陡。事实上，Rybczynski 劳动线比价格线 MN 更平缓。

Rybczynski 定理也可用来证明 Heckscher-Ohlin 定理，这个定理被广泛用在国际贸易

理论中，解释两交易方的贸易模式。考虑两个国家 A 和 B，并且将两国中的劳动和资本禀赋记为 L^i 和 K^i，$i=A,B$。国家 B 相对国家 A 来说是资本-多余（或劳动-缺乏），当且仅当：

$$\frac{K^B}{L^B}>\frac{K^A}{L^A}$$

Heckscher-Ohlin 定理如下。假定：

a. 有两种可交易的商品：1 和 2；两种要素：劳动和资本。

b. 两个国家某个部门的生产函数相同时，就说两国间技术相同。

c. 两国有相同和同位的偏好，这些偏好以一个拟凹的递增的（社会）效用函数表示。

d. 每个部门的生产函数是规模报酬不变。

e. 要素在部门之可流动但不能在国家之间流动。

f. 所有市场是完全竞争的。

g. 部门 1 在任何要素价格下相对部门 2 都是劳动密集型。

那么每个国家将出口使用其多余要素更密集的商品。

这个定理证明如下。假定目前两国有同样的技术、偏好和要素禀赋。那么，两国的生产可能性边界是相同的且能用图 18-6 中的曲线 AA' 表示。每个国家自足均衡点 P，为 AA' 与一无差异曲线的切点。AA' 在点 P 的切线斜率等于经济独立国家商品 1 的相对价格。明显地，在这些条件下，这两个国家没有动机进行贸易。

现在假定国家 B 有更多的资本，这隐含着国家 B 资本多余而国家 A 劳动多余。进一步假定 B 的相对价格不变；那么由 Rybczynski 定理可知，生产点将移动到点 Q，Q 位于 P 的左上方。国家 B 的生产可能性边界由曲线 BB' 表示。如以前解释的一样，曲线 BB' 完全在 AA' 之上。因为同位偏好，消费点将移到点 C，点 C 为 BB' 上 Q 点切线与从原点经过 P 点射线的交点。结果，在原先价格比值下，国家 B 存在对商品 1 的过量需求和对商品 2 的过量供给。这意味着在自给自足经济下，商品 1 的相对价格在 B 国更高或商品 2 的相对价格在 A 国更高。因为自给自足经济价格的不同，有时可说 A 国相对 B 国在商品 1 有比较优势，在商品 2 处于比较劣势。

现在考虑两国间贸易。每个国家将出口在自给自足经济下更便宜的商品。这意味着 A 国将出口商品 1，而 B 国将出口商品 2。因此，我们已经证明这个定理：资本多余的国家出口资本密集商品，而劳动多余的国家出口劳动密集的商品。虽然证明假定 B 国有更多资本但劳动数量与 A 国相同，这假定对定理并不是必需的。只要 B 国是资本多余的，生产点 Q 必须在消费点 C 的左方，并且对商品 1 的过量需求和对商品 2 的过量供给在自给自足经济下，在最初价格下会发生。

正如这个模型最后的应用，考虑一个使用劳动 L 和资本 K 生产一般消费品 C 的经济。在该经济中，资本较多。生产函数分别是 $C=f^C(L_C,K_C)$ 和 $K=f^K(L_K,K_K)$。假定消费品和资本价格 p_C 和 p_K 是外生决定的，产出值的极大化一阶条件包括：

$$\lambda_K=\text{资本租金率}=p_K\frac{\partial f^K}{\partial K_K}=p_C\frac{\partial f^C}{\partial K_C}$$

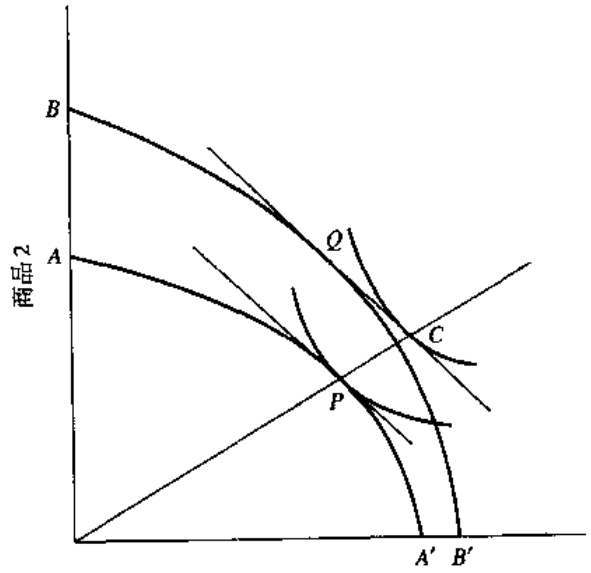

图 18.6 Heckscher-Ohlin 定理。假设有两个初始条件相同的国家 A 和 B，令 B 积累资本。A 国的生产边界是 AA'；B 国的生产边界是 BB'。在自给自足经济条件下，B 国劳动密集型商品 y_1 的相对价格将会上升，而在 A 国则会下降。随着两国贸易的展开，每个国家都会以最低（国内的）相对价格出口这种劳动密集型产品，而 B 国则会出口资本密集型产品。因此，根据 Heckscher-Ohlin 定理，每个国家都会出口那些密集使用大量生产要素的产品。

假定资本永远有效，利息率等于资本租金率除以资本价格：

$$i=\frac{p_K\partial f^K/\partial K_K}{p_K}=\frac{\partial f^K}{\partial K_K}$$

即此模型中的利息率是生产资本品的资本的边际产值。（某些模型中用的字母“r”意味着实际利息率，在另一些模型中，它意味着资本的租金率。不要混淆不同的概念。）在这个模型中，利息率由资本品与消费品的相对价格决定。目前，假定资本品产业是相对资本密集，那么，资本品价格的外生增加可更大比例增加资本租金率。因此，为了保持一阶条件，资本边际产值必须上升，这导致了更高的实际利息率。然而，如果消费品产业是资本密集型，利息率将下降。因此，我们看到在这样一个两部门模型，利息率的决定是一个稍微复杂的过程，部分取决于资本品和消费品产业的相对资本强度。

18.5 总结

现在让我们简短总结一下两商品、两要素模型的结果和基本假定。基本假定是在一个

竞争性经济下，要素所有者将互相交易来极大化国民收入值。这个看不见的过程不是经济中任一个人的目的。当交易成本为 0 时，逐利的资源所有者在极大化所有者收益时会竭尽贸易中可获得的所有可能收益。这必须将经济置于生产可能性边界上，并且处于每种商品的消费者边际评价等于每种商品的边际生产成本的点。这发生在线或平面 $NNP, z=p_1y_1+p_2y_2$ 和生产可能性边界的切点。

既然要素在两个产业间可自由移动，要素价格在两个产业相同。要素价格作为与资源约束相关的拉格朗日乘子出现。虽然工资率和资本租金率由模型内生决定，这些要素价格对构成每个产业相对小的、相同的厂商来说是外生给定的。每个厂商的同时行动才改变要素价格和总产出水平。

在这些一般性条件下，可能证明产出供给曲线 $y_j=y_j^*(p_1,p_2)$ 对其自身价格来说是向上倾斜的。这是生产可能性边界凹向原点的直接结果。生产边界的这种形状表明每个产业的边际成本是递增的（因此有向上倾斜的供给曲线）。这些问题在 18.2 节中讨论过。

最后，对一般的模型而言，出现了某种交互条件，方程组(18-24)到(18-26)。这些关系表明实物数量和它们各自的价格间存在着对偶关系。产出和资源禀赋间的关系与资源价格和产出价格间的关系相同。这些结果独立于任何关于生产函数的齐次假定。

在 18-3 节，每个产业是规模报酬不变的假定被加到模型中去。这允许生产函数仅用单位等产量线来表示（因为所有等产量线都是其他等产量线的放射性膨胀或收缩）。数学上，令 a_{ij} = 生产 1 单位产品 j 所用投入 i 的数量，其中 $i=L,K$，$j=1,2$，生产关系变成 $f^1(a_{L1},a_{K1})=1$ 和 $f^2(a_{L2},a_{K2})=1$。这些 a_{ij} 是较受限制模型的基本量。当我们使用以前的生产关系和一阶边际条件(18-38)时，a_{ij} 被证明仅依赖于要素价格、格朗日乘子 w 和 r。具体而言，即 $a_{ij}=a_{ij}^*(w/r)$。这关键性的一步允许模型由两个独立的方程组，即方程组(18-53)和(18-54)定义。前一个方程组指出每个产业的利润为 0，即用生产 1 单位 y_1 所用的劳动量乘以劳动价格，加上用于生产 1 单位 y_1 所用的资本量与资本单位价格的乘积正好等于 y_2 的单位价格。相似地，y_2 的总单位要素成本等于 y_2 的单位价格。第二个方程组构成了最初资源约束，其中 a_{ij} 仅是 w/r 的函数。因为 a_{ij} 仅依赖于 w/r，此模型的比较静态与 a_{ij} 技术是固定时的结果一样。可变比例模型（包括线性齐次生产函数的假定）得出与固定比例线性规划模型相同的比较静态结果。

方程组(18-53)仅涉及价格，可解出方程组(18-55)，其中要素价格仅表达为产出价格的函数。在每个国家中有一个产业劳动密集度一直比另一个高的假定下，这个结果导出了要素价格均等化定理。这个定理表明如果两个国家互相贸易，那么当产出价格在两个国家收敛时，每个国家的要素价格将仅是产出价格的函数并且不依赖于要素禀赋。如果两国的生产函数相同，$w=w^*(p_1,p_2)$，$r=r^*(r_1,r_2)$ 在两国将是相同的。那么，既然自由贸易下两国将面对相同的产出价格，即使要素在两国间不能流动，两国的要素价格将仍然相等。

方程组(18-53)的微分，导出了称作 Stolper-Samuelson 定理的一系列结果。在方程组(18-61)和(18-65)中表明，如果劳动密集型产业产品的价格上升（导致该产业的扩张），名义

和实际工资将上升并且资本租金率将下降。同样地，如果将资本密集产业产品价格上升，资本密集产业扩张，劳动密集产业收缩，因此名义和实际租金率上升且工资率下降。如果劳动密集产业产品价格上升，两个产业的劳动密集度都会降低，如果资本密集产业产品价格上升也会导致相似的结果。

关于实物数量相似的结果称为 Rybczynski 定理，利用交互关系(18-24)至(18-26)，可证明 Rybczynski 定理中的代数关系与 Stolper-Samuelson 定理中的相同。这些结果可从定义模型的第二个方程组资源约束中导出。在方程组(18-68)和(18-69)中，表明了如果整个经济可利用的劳动数量增加，劳动密集型产业不仅将扩张而且将以比劳动增加更高的比例增加。资本的自动增加也会有相似结果。

这就完成了我们两商品、两要素模型的讨论。让我们简短评论一下此模型的多商品、多要素扩展。这扩展事实上极为复杂且超出本书范围。受资源约束的 NNP 极大化一般模型向前进展并无困难。以同样的方法可导出向上倾斜的供给函数和类似(18-24)至(18-26)的交互条件。困难开始于要素均等化定理、Stolper-Samuelson 定理和 Rybczynski 定理。一般而言，如果商品数目超过要素数目，某种商品将不会被生产。相似地，如果要素数目超过商品数目，某种商品也不将被使用，与之相关的拉格朗日乘子等于 0。要素价格对产出价格变化的关系由于涉及高阶行列式，更为复杂。然而，在严格限制的条件下，要素均等化定理仍有效。但是，简单的要素强度法则无法导出与 18.3 节中结果类似的结果。

习题

1. 在 n 种商品、m 种要素模型下，y_i^* 是第 i 种产业的产出。证明 $\sum_{j=1}^{n} \epsilon_{ij} = 0$，其中 $\epsilon_{ij} = (p_j / y_i^*)(\partial y_i^* / \partial p_j)$；

   证明因此在两商品模型中 $\partial y_1^* / \partial p_2 > 0$。
2. 证明当生产函数为线性齐次时，在 n 种商品和 m 种要素的模型中(极大的)总产值等于总要素成本。
3. 解释为什么从推导 Stolper-Samuelson 和 Rybczynski 定理来看，技术系数 a_{ij} 仅依赖于要素价格而不是要素禀赋是关键性的。解释模型中什么假定得出这个结果。
4. 解释要得出要素价格仅依赖于产出价格需要的假定。是否仅从要素价格仅依赖于产出价格的结果就可得出当两国交易无成本时，两国要素价格相同？为什么？
5. 生产可能性边界是先将一个产出水平(比如说 y_1)固定，然后利用资源极大化 y_2 的产出水平导出的。当 y_1 变动时，生产可能性轨线也就画出了。
   (a) 建立两商品和两要素模型并解释拉格朗日乘子。
   (b) 证明在此情况下，生产边界并不必然是凹的。什么使得这些假定与课文中所用的不同(在课文中已隐含了生产边界的凹性)？
   (c) 证明如果两个生产函数都是凹的，生产可能性边界则是凹的。

6. 考虑 NNP 极大化模型，其中 $y_1=L_1^{1/3}K_1^{2/3}$，$y_2=L_2^{2/3}K_2^{1/3}$。

(a)证明产业 1 的资本-劳动比率一直将是产业 2 资本-劳动比率的 4 倍。

(b)导出此模型的(18-50)。即验证每个 a_{ij}^* 仅是要素价格比值的函数。

(c)证明 $\partial a_{Li}^*/\partial w_i<0$，$\partial a_{Ki}^*/\partial r<0$ 直接来自 a_{ij}^* 的方程。

(d)在每个产业要素强度的基础上，当 p_1 上升，你预期哪一个要素价格将上升，哪一个将下降？

(e)找出显函数 $w=w^*(p_1,p_2)$ 和 $r=r^*(p_1,p_2)$。并验证前面(d)中的预期。

(f)在要素强度基础上，当劳动禀赋增加，哪一个产业将增加产出，哪一个产业将减少产出？

(g)应用(18-54)验证这个结果。

7. 在两商品、两要素模型中利用交互关系从 Stolper-Samuelson 定理中导出 Rybczynski 定理。

8. 假定一个经济的 NNP 函数如下：

$$\left(a_1p_1+a_2p_2+b\frac{p_1^2}{2p_2}\right)(a_LL-a_KK)+\left(c_LL+c_KK+d\frac{L^2}{2K}\right)(\beta_1p_1+\beta_2p_2)$$

(a)证明 NNP 函数是 p_1 和 p_2 的线性齐次函数，并且也是 L 和 K 的线性齐次函数。

(b) 如果要求 NNP 函数是 p_1 和 p_2 的凸函数、L 和 K 的凹函数，对 b 和 d 需要有什么符号限制？

(c) 得出商品 1 和 2 的供给函数。证明这些函数是价格的 0 次齐次函数并且是要素禀赋的线性齐次函数。

(d) 得出 L 和 K 的影子价格。证明这些函数是价格的线性齐次函数并且是要素禀赋的 0 次齐次函数。

9. 定义部门的单位成本函数为：

$$c^i(w,r)=\min\{wa_{Li}+ra_{Ki}:f^i(a_{Li},a_{Ki})\geqslant 1\}$$

其中 a_{Li} 和 a_{Ki} 分别是劳动和资本投入。证明下列函数等价于课文中定义的 NNP 函数。

$$g(p_1,p_2,L,K)=\min\{wL+rK:c^1(w,r)\geqslant p_1 \text{ and } c^2(w,r)\geqslant p_2\}$$

10. 利用问题 9 定义的 NNP 函数，证明：

$$w=p_1\frac{\partial y_1}{\partial L}+p_2\frac{\partial y_2}{\partial L}$$

$$r=p_1\frac{\partial y_1}{\partial K}+p_2\frac{\partial y_2}{\partial K}$$

11. “国际贸易必然降低以任一商品表示的相对稀少要素的实际报酬。”对其评论。

部分参考文献

Arrow, K. J.; "Economic Equilibrium," International Encyclopedia of the Social Sciences. Vol. 4, pp. 376-388. The Macmillan Company and the Free Press, New York. 1968.

Debreu, G.: "Theory of Value," Cowles Foundation Monograph 17, John Wiley & Sons, Inc., NewYork, 1959.

Dorfman, R., P. A. Samuelson, and R. M. Solow: Linear Programming and Economic Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

Edgeworth, E. Y.: Mathematical Psychics, Routledge & Kegan Paul, Ltd., London, 1881.

Hicks, J. R.: Value and Capital, 2d ed., Oxford University Press, New York, 1946.

Jones, R. W: "Duality in International Trade: A Geometrical Note," Canadian Journal of Economics and Political Science, 31:390-393, 1965.

——: "The Structure of Simple General Equilibrium Models," Journal of Political Economy, 73: 557-572, 1965.

Koopmans, T. C. (ed.): "Activity Analysis of Production and Allocation," Cowles Commission Monograph 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

——: Three Essays on the State of Economic Science, McGraw-Hill Book Company, NewYork, 1957.

Patinkin, D.: Money, Interest, and Prices, 2d ed., Harper & Row, Publishers, New York, 1965.

Quirk. J., and R. Saposnik: Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

Rybczynski, T. M.: "Factor Endowment and Relative Commodity Prices," Econometrica, 22: 336-341, 1955.

Samuelson, P. A.: "Prices of Factors and Goods in General Equilibrium," Review of Economic Studies, 21:1-20. 1953-1954.

Walras, L.: Elements of Pure Economics, trans. W. Jaffe, Richard D. Irwin. Inc., Homewood, IL. 1954.

第 19 章　福利经济学

19.1　社会福利函数

在整本书中，我们不断强调，任何经验科学的目的都是就可观察的某些现象提出可证伪的命题。经受多次检验而未被证伪的可证伪命题构成了科学赖于建立的重要基石。（当然，将真正可证伪的命题称为可证伪假设更易理解。）

与沿着上述方向发展的经济学同时产生的还有一门学科，称为福利经济学。它的目的不是为了解释观察到的各类事件，而是为了评价其他制度和可能导致的经济选择的可行性和满意度。比如，通常我们认为在海中“过度”捕鱼、关税和其他特种税收导致了资源的“非有效”配置（征税项目“过低”的产出），在大都市造成污染和拥挤“过度”等。在本章中，我们将考察这些结论的基础，并对这些结论的经验内容作出评述。

常常可以听到古典经济学家提到“对社会的利益”、“工人阶级”的利益及其他类似的词语。这些词语说明，在相关阶层的成员间存在充分一致的利益，因此，可将这些成员称为一个团体。今天，我们仍经常能听到某个人“代表消费者的利益”或某些人站在“大商业集团”的立场诸如此类的说法。

Kenneth Arrow 在其经典论文“A Difficulty in the concept of social welfare”（社会福利概念中的困难）[1] 中曾指出，集团偏好或利益这个概念中的难点。这种词语的运用，暗示存在很好定义的个人偏好函数或是代表一个集团的效用或“福利”的效用函数。这样的函数最早由 Bergson[2] 在 1938 年明确提出。Bergson 给出的社会福利函数具有形式：

$$W=F(U^1,\cdots,U^m) \tag{19-1}$$

其中，$U^1,\cdots,U^m$ 是所考虑的整体中 m 个人的效用函数，而这个整体可能是整个经济。Bergson 考虑了经济中存在资源约束条件下，W 最大化的各种一阶边际条件。

Arrow 构建了一个集体偏好函数的例子（已有 200 年的历史），来展开对这些问题的讨论。这个例子是与多数人投票问题有关的，投票是集体决策时非常普遍的作法。假定一个人想以集体中的大多数投票作决定这一原则为基础，定义一个集合偏好。设有三个选择 a，

1　*The Journal of Political Economy*, 58: 328-346, 1950. 这一论文是一项更大研究的一部分，*Social Choice and Individual Values*, 2d ed., *Cowles Commission Monograph* 12, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

2　Abram Bergson, “A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics,” *Quarterly Journal of Economics*, 52: 310-334, February 1938.

b 和 c，团队中有三个人。令 P 代表“优于”，从而 aPb 意味着 a 比 b 好。

现在，设这三个人的偏好如下：

个人 1： aPb，bPc

个人 2： bPc，cPa

个人 3： cPa，aPb

同时，为了与序数效用理论保持一致，假定这些消费者的偏好是可传递的。即对于 1 而言，aPb 和 bPc 意味着 aPc。那么可以很快看到，大多数准则下的社会福利函数具有不可传递的属性，这很不令人满意。比如，考虑选择 a，大多数投票者即 2 和 3，更偏好于 c 而不是 a。同样的，大多数人(1 和 3)偏好于 a 而不是 b，而另一个，不同的多数人(1 和 2)又偏好于 b 而非 c。无论选择哪一种，多数人都会偏好于另外一种选择。这样，基于多数人愿望的社会福利函数就表现出这样的性质 aPb，bPc 和 cPa。[3]

让我们总结一下 Arrow 关于社会福利函数的定理。Arrow 利用了一个更弱的偏好关系形式：令 aR_ib 代表“个人 i 更偏好于 a(与 b 相比)或 a 和 b 无差异”。假设社会中有 n 个人，那么，社会福利函数的含义是，对应于社会中的 n 个人对所有社会现象做出的个人排序 $R_1,\cdots R_n$ 的一种关系 R。即给定政府中所有人的偏好顺序，存在某种代表“整个社会”对所考虑选择的评价和排序的社会排序 R。

Arrow 接着罗列了 5 条他认为几乎任一合理的社会福利函数都应具备的性质。第一条是，社会福利函数应该定义在遵守某些个人行为假设(如通常的凸的无差异曲线假定等)的所有个人排序集之上。

条件 1 社会福利函数定义于任何一对可行的个人排序 R_1，R_2 上。

第二条，社会排序应该描述有或没有福利，用 Arrow 的话说，即“illfare”。社会福利函数应该与个人价值的变化做同方向变化，至少不能与之相反。

条件 2 若社会状态 a 上升或没有在每个人的排序中下降，同时没有改变其他的排序，且如果变化前对任一其他选择 b 有 aRb，那么，在个人排序变化后仍有 aRb。

Arrow 的条件中最有争议的是第三条，即无关选择的独立性。考虑三个候选者 a，b 和

---

3 这个投票悖论说明了市场选择和政治选择之间的一种显著差异。前者，消费者可以通过购买不同数量商品的简单行为来表明他的偏好强度。但在政治选择中，由于普通投票者只能投一票，这时消费者无法表达他的偏好强度。上述例子中，三种选择仅仅是排了序，投票者不能说明，比如，他们偏好 a 比 b 很多而偏好 b 比 c 只一点点。在立法框架中，投票者相对较少，故人们可以在相关的问题上交易投票权。假如个人 1 有着上述的偏好强度而个人 2 在 a，b，c 之间几乎毫无差异。那么，投票人 1 就可以和投票人 2 订合同或者进行交易，答应他在以后的其他事情中投票给 2 强烈偏好而 1 没有强烈偏好以获取 2 投票给 a。通过这种交换，悖论便消失了。但是，对于个人而言多交易并不一定优于少交易，投票人 3 可能会因这样的政治交易而受损害。正是因为这些理由，许多人认为特殊利益法规更应该由立法机构颁布，而不是通过全民投票表决再实施。但是这样的投票交易也保护了那些对某些事物强烈偏好的少数派免受“多数人专政”。政治交易中的交易收益问题在 James Buchanan 和 Gordon Tullock，*The Calculus of Consent*，University of Michigan Press，Ann，Arbor，1963 中得到强调。

c 的选择。假如一个人的偏好为 aR_ibR_ic。假定选举前，候选者 b 死了。那么，我们会期望观察到 aR_ic。同样，我们期望社会福利函数中，对任两种选择的排序，不会受到添加或减少某个其他选择的影响。

条件 3　令 R_1，R_2 和 R'_1，R'_2 为两个个人的排序集合。令 S 为整个可供选择的集合。假设，对每个人及 S 中的所有选择 a，b，有 aR_ib 当且仅当 aR'_ib。那么，不管个人排序为 R_1，R_2 或 R'_1，R'_2，从 S 中所做的社会选择是相同的。

Arrow 给出的条件 4 和 5 等于说个人的偏好是有用的。即在确定社会福利函数时，要考虑个人的偏好值。条件 4 与 5 说明社会福利函数不是强加的，也不是独裁的。一个社会福利函数被称为是强加的，如果对于某一对选择 a，b，对所有的个人排序 R_1，R_2，即无论个人排序 R_1，R_2 如何，都有 aRb，其中 R 是对于 R_1，R_2 的社会排序。同样，一个社会福利函数称为是独裁的，如果存在个人使得对所有 a，b，只要 aR_ib，那么，不管除此之外其他所有人的排序如何，都有 aRb，其中 R 是对应 R_i 的社会偏好排序。

条件 4　社会福利函数不是强加的。

条件 5　社会福利函数不是独裁的。

Arrow 成功地证明了这 5 个条件不可能同时成立。特别地，他证明了任何满足前 3 个条件的社会福利函数不是强加的，就是独裁的。这一非常强的结果被称作可能性定理。[4] 它说明了无论用多么复杂的方案设计确定社会偏好集合，社会排序 R 都不可能满足 1 到 5 的所有条件。我们不可能像在(19-1)式中描述的那样，构造一个类型为 $W=f(U^1,\cdots,U^m)$ 的福利函数，即遵循前述条件的个人效用水平的某个函数。

可能性定理的另一种解释是在社会效用中，个人间的比较被排除了。从非强加及非独裁的意义上来说，从富人手中拿走一块钱给一个穷人不可能使整个社会变得更好。效用间的个人比较问题是序数效用代替基数效用想法的媒介。

从一个略不严格但更直观的基础上而言，可行的社会福利函数不可能存在的原因，是它们在最根本上与多多益善的原则相抵触。在任何既定时刻，对消费者而言，在任何社会中都存在可能性边界。沿着边界的任何移动都意味着某些个人获益而其他人受损。如果无法在个人间比较这些获益与损失，“社会福利”一词是毫无意义的。（我们将在 19.3 中更仔细的讨论这些问题。）

可能性定理的严格证明已超出了本书的范围，但可以在引用的参考文献中找到。注意，尽管可能性定理成立，仍有成百上千的经济学杂志文章用到了社会福利函数。事实上，一个全新的数理神学领域已经产生。但是，正如 Samuelson[5] 所说，“福利经济学中的定理，从技术角度而言不是有意义的假设命题，因为它们代表的是关于现实的可证伪假设的演绎应用，自身并没有意义。”

4　作者本来应称之为不可能定理。

5　*Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947, pp. 220-221.

19.2 帕累托条件

面对着不可能构建一个有意义的社会福利函数这种情况，经济学家选用了更弱的准则，用以评价备选情形。这一准则，即所知的帕累托条件，因意大利经济学家 Vilfredo Pareto 首先使用故有此名。帕累托条件是指，如果至少有一个人在 a 时好于在 b 时，而没有人在 a 时比在 b 时坏，那么社会状态 a 优于 b。更多人将可能在更加特定的社会排序类型上（其中有些人受损，其余人获益）接受这一判断，从这个意义来说，这仅是一个较弱的价值判断。状态 a 在帕累托意义上优于状态 b，称为 a 帕累托占优于 b。人们可以想像经济中的可能状态集边界，其中没有帕累托占优点，即沿着这个边界，任何移动都会导致至少一个人受损。不存在帕累托占优状态的点，称为是帕累托最优的。

通常，我们会发现帕累托最优点集是相当大的。这些点在指导政策时是否有用，存在争议。甚至有人认为，经济应当处于帕累托最优状态是一种价值判断，所以是道德哲学的一部分，而非经济学这种经验科学的一部分。但是，我们能像经济学家一样，考察在什么情形下可以得到各种理想的帕累托最优状态。这一部分中，我们将考察可以达到帕累托最优的某些著名情形。在讨论中，请记住前述 Samuelson 的话中所表达的观点，这将非常有用。

纯交易

考虑一种经济，两个人消费两种商品 x 和 y。令 x_i, y_i 代表第 i 个人消费的 x, y 的量，第 i 个人的效用函数是 $U^i(x_i, y_i)$。假定 x, y 的总量是固定的，即 $x_1+x_2=x, y_1+y_2=y$，其中 x, y 为常数。在什么情形下，x, y 在两人间的分配是帕累托最优的呢？

这个问题的数学形式表述如下：

$$\begin{aligned} &\text{最大化} && U^2(x_2, y_2) \\ &\text{满足约束} && U^1(x_1, y_1)=U_0^1 \\ & && x_1+x_2=x \qquad y_1+y_2=y \end{aligned} \tag{19-2}$$

意图使两人的效用同时最大化是毫无意义的。[6] 相反，我们首先将任一个人的效用固定在任一水平；然后使另一位的效用最大化。采用这种方法，可以保持这样的状况，即任一方都不可能在不降低其他人效用情况下使自己的效用得到改善。

前述问题的拉格朗日函数为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}=&U^2(x_2, y_2)+\lambda(U_0^1-U^1(x_1, y_1))+\lambda_x(x-x_1-x_2) \\ &+\lambda_y(y-y_1-y_2) \end{aligned} \tag{19-3}$$

6 我们把这种构造留给那些渴望找到“为最大多数人寻找最优”的经济系统的人。

对 x_1, y_1, x_2, y_2 及拉格朗日算子进行微分得到：

$$\mathscr{L}_{x_2} = U_x^2 - \lambda_x = 0 \tag{19-4a}$$

$$\mathscr{L}_{y_2} = U_y^2 - \lambda_y = 0 \tag{19-4b}$$

$$\mathscr{L}_{x_1} = -\lambda U_x^1 - \lambda_x = 0 \tag{19-4c}$$

$$\mathscr{L}_{y_1} = -\lambda U_y^1 - \lambda_y = 0 \tag{19-4d}$$

以及

$$\mathscr{L}_\lambda = U_0^1 - U^1(x_1, y_1) = 0 \tag{19-5a}$$

$$\mathscr{L}_{\lambda_x} = x - x_1 - x_2 = 0 \tag{19-5b}$$

$$\mathscr{L}_{\lambda_y} = y - y_1 - y_2 = 0 \tag{19-5c}$$

其中，$U_x^i = \partial U^i / \partial x_i$，等等。结合等式(19-4)可给出：

$$\frac{U_x^1}{U_y^1} = \frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{U_x^2}{U_y^2} \tag{19-6}$$

式(19-6)是消费者的无差异曲线具有同样斜率的相切条件。对两位消费者而言，x 对 y 的边际替代比率是相等的。这是一个熟悉的条件，即对交易中获得的收益进行全部分配所必须遵循的条件。如图 19-1 所示，满足(19-6)式(和约束)的所有点的集合称为合同曲线。该图即 Edgeworth 方盒，我们最早在一般均衡理论中见过。(那里，虽然坐标轴代表的是生产要素的数量，而不是这里的最终产品的数量，但是毫无疑问，其中的数学含义是一样的。)

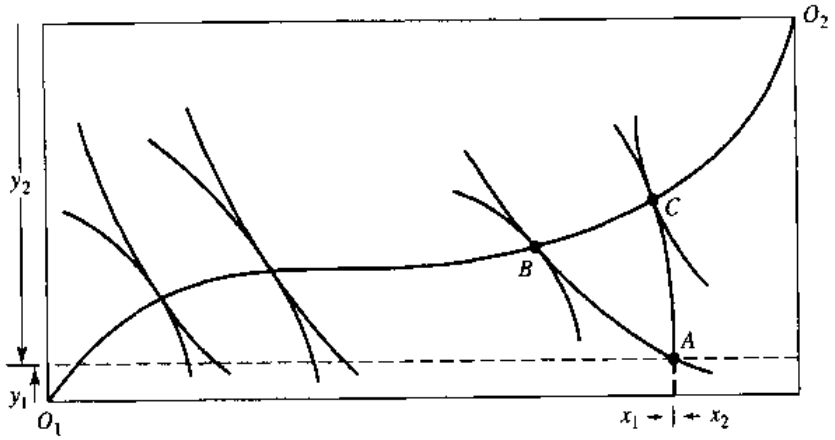

图 19-1　Edgeworth 方盒在描述纯粹交易及零成本世界中的帕累托最优点集时非常有用。盒的两个维度分别代表得到的商品 x 和 y 数量。个人 1 的效用函数按正常的方向从原点 O_1 处开始画，个人 2 的效用函数从原点 O_2 处沿反方向(从右往左往下)画。所有使得 U^1 和 U^2 的斜率相等，即 U^1 的等水平曲线相切于 U^2 的等水平曲线点的集合，称为契约曲线，记为 O_1O_2。这个曲线代表了那些交易收易完全分配的点的集合，有时候它也会被称为冲突曲线，因为沿着 O_1O_2 的移动代表了利益的冲突：一个人获益而另一个人损失。因此，这是经济中的帕累托最优点。

帕累托最优点的集合是满足交易收益完全分配的集合。如果消费者间的分配方式不同，即如图 19-1 的点 A，那么没有交易成本时，我们预计它们将移到合同曲线 O_1O_2 上的某个点。如果交易是自发的，则最终的分配必定在最初的两条无差异曲线之间（或之上），即合同曲线 BC 段的某一点上。若没有进一步设定谈判过程的约束，理论上是无法确定最终的点在何处的。但在没有交易成本和强迫的情况下，自我寻求最大化者必定会停在 BC 上的某个点。

提出同(19-2)式一样的问题.事实上并非从某一特定的点（比如 A）开始，然后移动到合同曲线上。如同在(19-2)中的公式化表述一样，个人 1 的无差异水平是固定的，也就是通过点 A 的水平。该问题的答案，即(19-4)和(19-5)的解，将把经济状态置于 B 点，其中个人 2 获得了最大的效用，而个人 1 仍留在最初的无差异曲线上。所以，即使谈判过程的起始点 A 是不确定的，在(19-2)中提出的问题还是有一个惟一的答案。

个人 2 的间接效用函数可首先通过解(19-4)和(19-5)，而后将 x_2, y_2 的值代入 $U^2(x_2, y_2)$ 得到，令(19-4)和(19-5)的解表示为：

$$x_i = x_i^*(U_0^1, x, y) \qquad y_i = y_i^*(U_0^1, x, y) \tag{19-7}$$

相似地，拉格朗日算子的解为：

$$\lambda = \lambda^*(U_0^1, x, y)$$

$$\lambda_x = \lambda_x^*(U_0^1, x, y) \qquad \lambda_y = \lambda_y^*(U_0^1, x, y) \tag{19-8}$$

那么：

$$U^{2*} = U^2(x_2^*, y_2^*) \equiv f(U_0^1, x, y) \tag{19-9}$$

保持商品的总量 x, y 为常数，人们可以想见，由(19-9)定义的效应边界。从 $U_0^1 = 0$ 开始，个人 2 的最高效用水平就是 2 消费所有商品所获得的效用，即：

$$f(0, x, y) \equiv U^{2*}(x, y)$$

同样，也存在某个 U^1 的最高水平，它可以由通过 O_2 的个人 1 的无差异曲线表示，其中 $U^2 = 0$。

这一效用边界在图 19-2 中由曲线 UU 表示，其中 U^1 的下标 0 去掉了。利用包络定理和(19-4)式，可得：

$$\frac{\partial U^{2*}}{\partial U^1} = \lambda = -\frac{U_x^2}{U_x^1} = -\frac{U_y^2}{U_y^1} < 0 \tag{19-10}$$

假定合同曲线的切点只在正的边际效用处（向下倾斜的无差异曲线），如图所示，$\partial U^{2*}/\partial U^1 < 0$。帕累托边界不能表现出 $\partial U^{2*}/\partial U^1 > 0$，因为如果那样的话，沿着边界朝右上方移动时对两人都有益处，与帕累托最优相抵触。也不可能推断出帕累托边界 UU 是凹向原点，这是因为效用的序数性。不过，$U^1(x_1, y_1)$ 的单调转置，可以按照需要来扭曲边界，而仍保持其向下倾斜的特征。

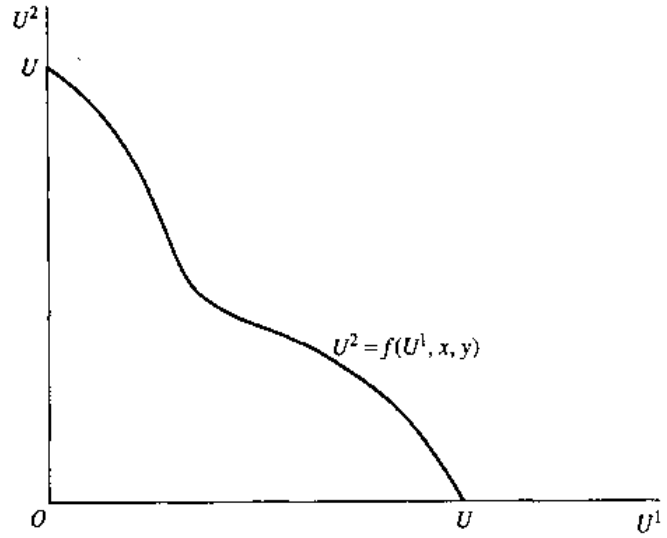

图 19-2　给定商品总量的效用边界。对任意给定数量的 x 和 y，存在一点集使得无人能够在不妨碍他人时获益。这个帕累托边界由沿着契约曲线 O_1O_2 的所有点给出的每个人的(序数)效用水平组成。由帕累托最优的定义可知，边界一定是向下倾斜的。

生产模型

现在，假设我们将前述问题推广到 x,y 是由两种要素(或更多要素)生产出来的情形。在前一章讲述一般均衡时，我们为两要素模型构造了一个 Edgeworth 方盒。为了使消费者处于消费的帕累托边界中，商品的生产必须是有效的，即位于生产可能性曲线内部的生产点不可能推出帕累托最优状态。如果产出朝着正确的方向移动到生产可能性边界上，所有的消费者都可以获得更多商品，从而有更高的效用。因此，在 x,y 是生产出来而非固定常数的情况下，为消费者定义帕累托边界问题要从确定生产的可能性边界开始。在生产边界上的点称为产出是有效的。

产出情形下的数学与前述对最终产品的分析在形式上是一样的。假设有两种生产要素，L 和 K，令 L_x 代表生产 x 时所用的劳动力的数量，等等。那么生产有效性的问题可表述为：

$$\begin{aligned} &\text{最大化} && y=f(L_y,K_y) \\ &\text{满足约束} && g(L_x,K_x)=x \\ & && L_x+L_y=L \qquad K_x+K_y=K \end{aligned} \tag{19-11}$$

其中 $f(L_y,K_y)$ 和 $g(L_x,K_x)$ 是 x 和 y 的生产函数，x 是一个参数，而非决策变量。

问题(19-11)的拉朗朗日函数是：

$$\mathcal{L}=f(L_y,K_y)+\lambda(x-g(L_x,K_x))+\lambda_L(L-L_x-L_y)+\lambda_K(K-K_x-K_y) \tag{19-12}$$

一阶条件为：

$$f_L-\lambda_L=0 \tag{19-13a}$$

$$f_K-\lambda_K=0 \tag{19-13b}$$

$$-\lambda g_L-\lambda_L=0 \tag{19-13c}$$

$$-\lambda g_K-\lambda_K=0 \tag{19-13d}$$

约束条件为：

$$x-g(L_x,K_x)=0 \tag{19-14a}$$

$$L-L_x-L_y=0 \tag{19-14b}$$

$$K-K_x-K_y=0 \tag{19-14c}$$

从式(19-13)，可知：

$$\frac{f_L}{f_K}=\frac{\lambda_L}{\lambda_K}=\frac{g_L}{g_K} \tag{19-15}$$

在产出合同曲线上，所有产品的边际生产率必须相等，这正是在图 18-2 中描述的相切条件。求解等式(19-13)及(19-14)可得：

$$L_y=L_y^*(x,L,K) \tag{19-16a}$$

$$K_y=K_y^*(x,L,K) \tag{19-16b}$$

$$L_x=L_x^*(x,L,K) \tag{19-16c}$$

$$K_x=K_x^*(x,L,K) \tag{19-16d}$$

和

$$\lambda=\lambda^*(x,L,K) \tag{19-17a}$$

$$\lambda_L=\lambda_L^*(x,L,K) \tag{19-17b}$$

$$\lambda_K=\lambda_K^*(x,L,K) \tag{19-17c}$$

等式组(19-16)给出了在两个行业中所选择的劳动力和资本的数量，把这些值代入到目标函数中即给出 g 的最大值 y^*，在 x 取任意值时：

$$y^*=f(L_y^*,K_y^*)=y^*(x,L,K) \tag{19-18}$$

利用包络定理，我们有：

$$\frac{\partial y^*}{\partial x}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}=\lambda^* \tag{19-19}$$

所以，λ^* 可解释为 x 的边际成本，因为它说明了为获得额外 1 单位 x 所必须放弃的 y^* 的数量。因 $\lambda^*=\partial y^*/\partial x$，根据定义，拉格朗日算子 λ^* 是生产可能性边界的斜率。假定要素的边际产出是正的，$\lambda^*<0$。即产出边界的斜率是负的。那么，同前，由式子(19-13)可得：

$$\lambda^*=-\frac{\lambda_L^*}{g_L}=-\frac{f_L}{g_L}=-\frac{f_K}{g_K}=-\frac{\lambda_K^*}{g_K}<0 \tag{19-20}$$

这个等式有一个有趣的解释，即如果只有劳动力变化(比例 f_L/g_L)，或只有资本变化(f_K/g_K)，或两者都变化，x 的边际成本都是相同的。在部分均衡的框架中，这种现象在下面的公

式中可以遇到：

$$MC=\frac{w_L}{f_L}=\frac{w_K}{f_K} \tag{19-21}$$

其中，w 表示对应的要素价格。这里，毫无疑问 λ_L 和 λ_K 是要素价格，是以实物产出 y 为单位测量的，即：

$$\lambda_L^* = \partial y^* / \partial L \tag{19-22a}$$

$$\lambda_K^* = \partial y^* / \partial K \tag{19-22b}$$

这种对 λ_L 和 λ_K 的解释使(19-21)和(19-20)是等价的，除了单位上有所不同。

生产可能性曲线产生了“有效”产出计划的集合，在这一边界上，生产是获得整体帕累托最优的必要条件。但是，这一条件本身是不充分的。为了完全消除交易中产生的收益，生产出来的产品必须有效地分配给消费者，这至少需要应用前面对 Edgeworth 方盒的分析，即在任意产出水平(x,y)下，消费者必须位于合同曲线上。但是，这需要另外一个相切条件：对每一位消费者，x 对 y 的边际替代率，即对 x 的边际评价(以 y 为单位计)必须等于生产 x 的边际成本(以 y 计)。这一条件说明消费者都在他们的合同曲线上，因为每一个消费者对 x 的边际评价都必须等于 x 的边际成本，现在我们看如何推导后一条件。

后一条件、最一般的问题和(19-2)中提出的第一个条件之间的差别仅在于：将 x 和 y 由固定改为它们由生产模型(如(19-18)式)导出的生产可能性边界来确定。这样，完全有效(即帕累托最优点)的点就由下述模型来定义：

$$\begin{aligned} &\text{最大化} && U^2(x_2,y_2) \\ &\text{满足约束} && U^1(x_1,y_1)=U_0^1 \qquad x_1+x_2=x \\ & && y_1+y_2=y \qquad y=y^*(x,L,K) \end{aligned} \tag{19-23}$$

将最后三个约束合并成一个式子，这样会简化计算。这三个式子确定了产出的可能性曲线，可写成隐函数的形式：

$$h(x,y)=h(x_1+x_2,y_1+y_2)=0$$

其中参数 L 和 K 没有出现，因为它们在这儿不会用到。问题于是简化为：

$$\begin{aligned} &\text{最大化} && U^2(x_2,y_2) \\ &\text{满足约束} && U^1(x_1,y_1)=U_0^1 \\ & && h(x_1+x_2,y_1+y_2)=0 \end{aligned} \tag{19-24}$$

(19-24)的拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L}=U^2(x_2,y_2)+\lambda_1(U_0^1-U^1(x_1,y_1))+\lambda h(x,y) \tag{19-25}$$

注意到$\partial h/\partial x_i=(\partial h/\partial x)(\partial x/\partial x_i)=\partial h/\partial x$ 等，可以得到一阶条件：

$$U_x^2+\lambda h_x=0 \tag{19-26a}$$

$$U_y^2+\lambda h_y=0 \tag{19-26b}$$

$$-\lambda_1 U_x^1+\lambda h_x=0 \tag{19-26c}$$

$$-\lambda_1 U_y^1+\lambda h_y=0 \tag{19-26d}$$

以及两个约束：

$$U_0^1-U^1(x_1,y_1)=0 \tag{19-27a}$$

$$h(x,y)=0 \tag{19-27b}$$

从(19-26)中消去拉格朗日算子，我们发现：

$$\frac{U_x^1}{U_y^1}=\frac{U_x^2}{U_y^2}=\frac{h_x}{h_y} \tag{19-28}$$

h_x/h_y 是生产可能性边界斜率的绝对值，即用显式形式来表示，由链式法则，有：

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{h_x}{h_y}$$

因此，(19-28)式给出了上面提到的边际条件：为达到整体(产出与消费)的帕累托最优，所有人对每种商品的边际评价必须都相同，必须都等于生产该种商品的边际成本。(该条件同样适用于 n 种商品、n 个消费者的情形，可以直接将这些结果推广开。)

整体效用边界可以通过求解(19-26)和(19-27)得到：$x_i=x_i^*(U_0^1)$，$y_i=y_i^*(U_0^1)$。把这些值代回目标函数，我们可得到：

$$U^2=U^2(x_i^*,y_i^*)=U^{2*}(U_0^1) \tag{19-29}$$

该情况的几何表示参见图 19-3，曲线 PP 表示给定资源禀赋时的生产可能性边界。在任意点上，比如 A，该边界的斜率是 x 的边际成本。从代表某一个 x 和 y 的整体数量的这一点出发，可以构造一个 Egeworth 方盒，盒内部的点代表了分配给两位消费者的 x,y 组合。曲线 OA 代表了消费者间隐含的合同曲线。在沿着 OA 的某个点或某些点上，比如

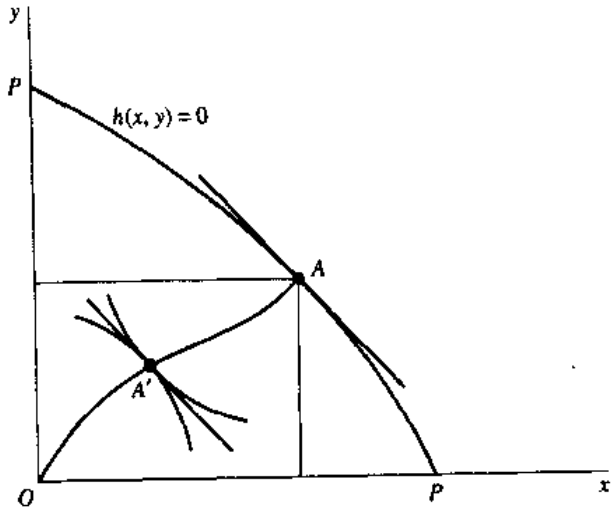

图 19-3　整体帕累托最优。曲线 PP 代表了给定资源禀赋时经济中的生产可能性边界，边界的斜率是放弃 y 生产 x 的边际成本。在任意点，比如 A，沿着边界，如图所示可以构造一个 Edgeworth 盒。盒中的点代表给两个消费者的 x,y 的分配。假定这些消费者会在契约曲线 OA 上交易。在 OA 上的某一个或一些点上，无差异曲线的斜率将等于 A 处转换曲线的斜率。这是整体帕累托有效点，因为每个消费者的 MRS 相等，且都等于边际成本。

A'、x 的边际评价(边际替代率)将等于 A 处切线的斜率,即 x 的边际成本。这就是一个整体帕累托最优的配置,即在产出及消费上都是有效的。点 A' 代表了隐含效用边界上的一个特殊点,如图 19-2 中所示,它是一个边际成本等于边际收益的特殊点。

在任何一个沿着生产可能性边界的点上,都可以画出一个 Edgeworth 方盒,并可以确定整体有效的配置。在图 19-4 中画出了一些生产点的效用边界,所有这些部分边界的包络曲线是等式(19-29)$U^2=U^{2*}(U_0^1,x,y)$。部分边界是指那些 x,y 为特定值(即常数)时的效用边界。从一般的包络情况考虑:

$$\frac{\partial U^{2*}}{\partial U_0^1}=\left(\frac{\partial U^{2*}}{\partial U_0^1}\right)_{x,y} \tag{19-30}$$

即如果 x,y 保持常数或沿着整体边界变化时,边界上任一点的斜率是相同的。

全体效用边界 UU 代表了所有帕累托最优或有效生产和 x,y 的分配的集合。选择哪一个帕累托最优点对社会最好,这是一项价值判断,也超出了规范经济学的范围。如果社会福利函数(社会福利函数可以存在,但它不会具备 Arrow 归纳出的所有特征)既定,则它的无差异曲线可以在图 19-4 上画出,并且会选择沿边界 UU 的某个最优点。有些人相信政府会像刚才所描述的那样,有意识地寻求整体最优点。事实上,用这样的模型很难解释政治行为。

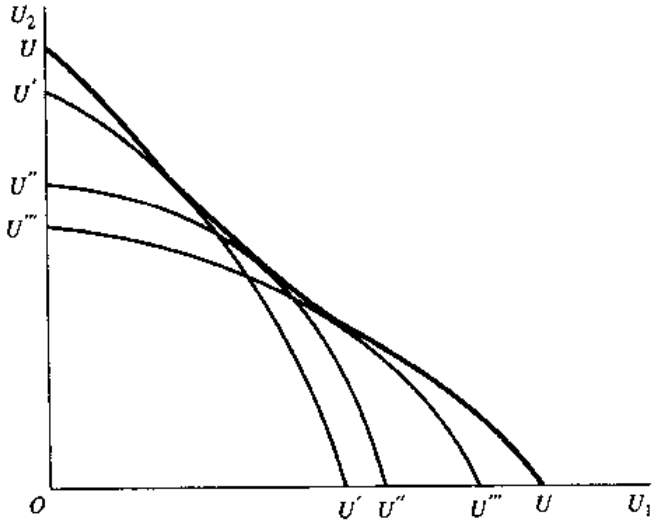

图 19-4　部分及整体效用边界。任给定 x,y,即产出可能性曲线上的某一特定点,可推出一个效用边界。图中画了几个:$U'U'$,$U''U''$,$U'''U'''$。所有这些部分边界的包络曲线就是整体或全部效用边界 UU。边界 UU 代表了给定另一个人的效用水平,消费者可以获得的最大效用。UU 上的每一点通常代表不同的产出点,虽然这里并没有说某个部分边界不能够与 UU 相切于多于一个点。

19.3 福利经济学的经典“定理”

本节，我们将列出福利经济学中的经典“定理”。这里用引号是因为下面推导出的命题事实上并不是可证伪的定理。他们代表了通常无法观测的最优化的一阶条件，即在最优处，边际收益等于边际成本。正如 Samuleson 在《经济分析基础》中所暗示的，这些命题是那些本身无法证伪的命题的逻辑应用。

第一个“定理”是：完全竞争可带来商品和服务的帕累托最优配置。这一命题只在某些特定情形下成立，确切地说，前一节中提出的问题排除了两类主要的现象，消费者效用函数的互相依赖和生产函数的互相依赖。在前面的表述中，在任一追求最大化的经济人中不存在外部效应或副作用。这样的互相依赖性可以写成：

$$y=f(L_y,K_y,x) \tag{19-31a}$$

或：

$$U^2=U^2(x_2,y_2,U^1) \tag{19-31b}$$

在情形(19-31a)中，产出 y 不仅依赖于劳动和资本的投入，也依赖于产出 x 的水平。在后面的章节中，我们会考察类似这样的一个特例，其中一个农场的产出将部分依赖于相邻农场的牛的数量，因为牛将践踏庄稼。同样，(19-31b)说明其他人的快乐能影响某人的效用。

在(19-31a)和(19-31b)的情形及垄断的情况不存在时，经济中商品和服务的价格将等于它们各自生产的边际成本。在竞争性的要素市场和竞争性的产品市场中，每个行业 h 利润最大化的条件是：

$$p_h f_i^k-w_i=0 \qquad i=1,\cdots,n \tag{19-32}$$

其中：

$$f^k(x_1,\cdots,x_n)=\text{第 } k \text{ 个企业的生产函数}$$

$$w_i=x_i \text{ 的工资}$$

$$p_h=\text{产出价格}$$

假定有 m 个企业，企业的供给函数由下式确定：

$$p_h-\frac{\partial C_k^*}{\partial y_k}=0 \tag{19-33}$$

其中，$C_k^*(y_k,w_1,\cdots,w_n)$ 是企业的总成本函数。根据(19-32)，有：

$$\frac{w_i}{w_j}=f_i^k/f_j^k \qquad k=1,\cdots,m \tag{19-34}$$

这正是经济必须处于生产可能性边界的条件。对所有企业而言，所有要素的边际产生比例都是一样的，都等于要素价格的比例。

而且，消费者的效用函数为 $U^k(y_1,\cdots,y_n)$，要使效用最大，就要使边际效用的比例等于

价格比，即：

$$U_i^k/U_j^k = p_i/p_j \qquad \text{对所有的 } i,j,k \tag{19-35}$$

因所有的消费者都将面对同样的价格，式(19-35)说明所有消费者对商品的边际评价都是相同的，这是产出给定时有效消费的条件。最后，利用式(19-33)，有：

$$U_i^k/U_j^k = p_i/p_j = MC_i/MC_j \qquad \text{对所有的 } i,j,k \tag{19-36}$$

所以，不仅所有消费者的边际评价相等，它们还等于这些商品的边际成本比率(以货币进行度量)。这个货币边际成本的比例也正是商品 i 的边际成本(用放弃的商品 j 来表示)。即转换成以商品 j 为单位可使 $MC_j=1$(注意到 MC_i/MC_j 的单位是($\$y_i$)÷($\$y_j$)$=y_i/y_j$，即生产更多的 y_i 而放弃的 y_j 数量，或 y_i 的真实边际成本。)

这样，在没有副作用(外部性)且完全竞争的状况下，整体有效的帕累托条件成立。所以，在这样的完全竞争经济中，没有人能够在不损害他人情形下改善自身。

从前面并不能得出，经济处于完全竞争是人们所希望的。考察图 19-5，其中画出了全体效用边界 UU。假定经济中有两个人现处于点 A，这是一个非帕累托有效的配置。任意从 A 开始的向右或向上移动，可以到达效用边界上 BC 间的一点，显然这是帕累托点优于 A 的。但是，向一个帕累托最优点 D 的移动却使消费者 2 受到损害。从消费者 2 这方面来讲，这并非是一种改进。所以，除了是一种价值判断，向帕累托边界的移动也可能包含损失。

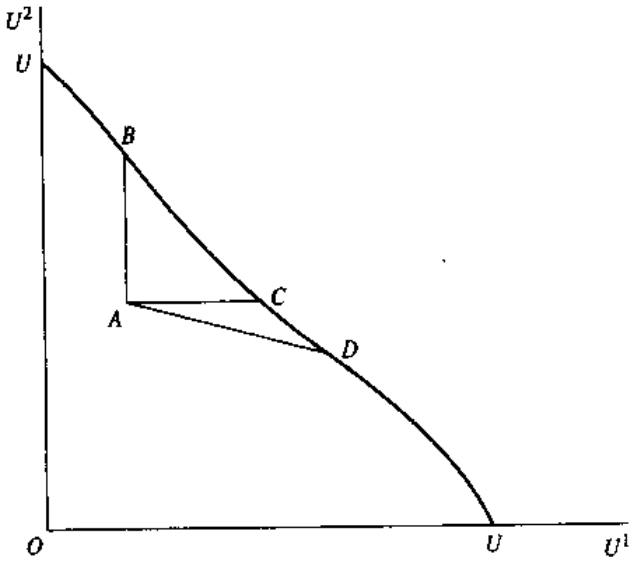

图 19-5　非帕累托有效移动。假定经济处于点 A。那么任一往右上的移动会导致帕累托更优的境况；每位消费者都会收益。帕累托边界 UU 的 BC 部分中的每一点都是帕累托点优于 A，但并非 UU 上的每一点都是帕累托点优于 A。比如点 D，就使消费者 1 变好而使 2 变坏。如果导致经济移向点 D，消费者 2 不会赞成经济是有效率的。即使在弱帕累托价值判断中，也不可以认为经济“应当”处于帕累托最优点。

经典的福利经济学的第二个"定理"是:任一整体的帕累托最优都对应一个完全竞争下的配置。即对帕累托有效边界上的任一点都存在一个竞争状况可以达到那样的最优。在效用函数和生产函数取一般形式时,该命题的证明是一个非常困难的问题,K. Arrow,[7] G. Debreu[8], L. Hurwicz[9] 及其他人曾分析过。对该问题的严格讨论无疑超出了本书的范围。

注意这个第二"定理"所没有提到的:它并没有说明,为了达到帕累托最优,经济必须是竞争的。一位博学的独裁者可以强制设定正确的价格和数量,从而经济可以达到与竞争性经济同样的状况。

为什么经济不会处于整体帕累托有效边界的两个重要原因是货物税和垄断,它们使得价格高于边际成本。对后一情形而言,一个垄断者可以通过某种或全有或全无的定价策略实行完全的歧视,以获取交易中的全部利润,但不破坏帕累托最优状况。从根本上讲,其中的原因是交易中获得的收益已经耗尽。惟一的差别在于,这里的垄断者得到了全部收益,而在开放市场中买卖双方都获得了收益。不过只要交易所得到的好处是全部分配完了,就不会存在比帕累托更优的移动选择。

19.4 一个关于税收的"非定理"

人们常常提及的一个命题是:从消费者获得最高可能的无差异曲线的角度来看,为提高既定数量的税收收入,最好的办法是通过比例货物税或收入所得税来征集。(若经济中没有储蓄,这些税是等价的。)不严格地讲,这个结论是基于这样的观察:如果 $p_j=(1+t)MC_j$,帕累托有效的条件 $p_j/p_i=MCS^i=MC_j/MC_i$ 不会改变,其中税率 t 对所有商品都为常数。但是这里有一个逻辑错误,因为帕累托最优的边际条件是必要不充分的。其他标准也有可能导致同样的条件。

这个"定理"在经验方面受到非议是因为并非对所有商品都可以容易地征税。一个人的劳动/休闲选择受到收入所得税的影响。休闲的价格就是放弃的工资,对工资收入的所得税就是对休闲的补助。而且,许多商品由于或多或少技术上的原因也很难征税。比如一个人提供给自己或其家庭的服务。在这些条件下,对所有可征税项目的比例税并不意味着所有项目的比例税。

---

7 对上述定理进行研究的主要见于 K. Arrow, "An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics," in J. Neyman (ed.) *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, 1951。

8 Grerard Debreu, *Theory of Value*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959.

9 Leonid Harwicz, "Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Processes," in *Mathematical Methods in the Social Sciences* 1959, Stanford University Press, Stanford, CA, 1960.

且不论经验上的问题，正确地描述这一个定理也很难。即使能够按比例地对所有商品和服务征税，通常也不一定会导致帕累托有效配置，就像我们即将看到的。对这个“非定理”最著名的“证明”是 Harold Hotelling 在 1938 年提出的。[10] Hotelling 的证明本质上是这样进行的，假定一个消费者最近消费 n 种商品 $q_i, i=1,\cdots,n$，价格为 $p_i=MC_i$。消费者的收入要上税，税后的货币收入是 $m=\sum p_i q_i$。因商品束 $\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_n)$ 选择在价格 $\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_n)$ 和收入 m 处，消费者可能选择的任何其他商品束 $\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{q}+\Delta q$ 一定会更差。Hotelling 断言 $\boldsymbol{q}$ 优于 $\boldsymbol{q}'$（当然 Hotelling 没有用这个词，因为这个词尚未创造出来），如果：

$$\sum p_i q_i \geqslant \sum p_i q_i'$$

或

$$\sum p_i \Delta q_i \leqslant 0 \tag{19-37}$$

现假设价格变化了 Δp_i，代表货物税，但同时货币收入（所得税）也改变了，从而使消费者可以像以前一样有相同的机会购买商品。由定义：

$$m+\Delta m=\sum (p_i+\Delta p_i)(q_i+\Delta q_i)$$

代入 $m=\sum p_i q_i$，得到：

$$\Delta m=\sum p_i \Delta q_i+\sum \Delta p_i (q_i+\Delta q_i)$$

整理有：

$$\sum p_i \Delta q_i=\Delta m-\sum p_i (q_i+\Delta q_i) \tag{19-38}$$

考虑最后一个等式，项 $q_i+\Delta q_i$ 代表征税后的售出的 q_i。所以，最后一项代表了从货物税 $\Delta p_i, i=1,\cdots,n$ 中得到的全部税收收入。Δm 项代表了收入所得税的变化。因此，这个表达式说明，如果货物税的变化导致收入绝对大于或等于收入所得税的变化，那么有 $\sum p_i \Delta q_i \leqslant 0$。人们认为，在这种情况下，因为价格设置于边际成本处，故用货物税替代收入税会导致消费者购买劣于 q 的商品 q'。所以，Hotelling 说：[11] 如果政府收入来自于某种货物税的系统，那么在社会上的个人之间存在一种个人所得税的可行分布，可以废除货物税并代以所得税，会产生同样的收益，同时仍使每个人都处于比以前更令人满意的境地。

不过，这个“证明”看起来仅仅是一个关于显示性偏好的定理。无论从任何价格集出发，做刚才所描述的价格和收入的变化会使消费者受损害。在“证明”中没有一处用到条件 $p_i=MC_i$，故这个边际条件与结论是无关的。结论中也不包含关于生产的任何假设，仅仅用

10　H. Hotelling, “The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and Railway and Utility Rates,” *Econometrica*, 6: 242-269, 1938, reprinted in *A. E. A. Readings in Welfare Economics*, Richard D. Irwin, Homewood, IL, 1969.

11　在 Hotelling 的论文中在收入所得税、比例货物税和一次性或个人税收之间没有明显区别。

到了有关偏好的假设。如果最初设定 $p_i \neq MC_i$，而 Δp_i 和 m 的变化最终使 $p_i = MC_i$，则类似“证明”。

19.5 次优理论[12]

若不考虑税收的最终目标，最优货物税的问题是没法解决的。假设有 3 种商品——其中两种为私人物品 x 和 y，另一种是政府服务 z。如果政府服务是可以正常定价的服务，比如邮政服务，那么最优的税收为 0。政府只要按边际成本出售服务，同时 x, y 也以各自的边际成本出售，就可以达到帕累托最优。最优税收问题仅仅在某些商品，如政府服务，因某种原因不能够以边际成本出售时才有意义。在某些情况下，比如国防，这样做（即以边际成本出售）是很困难的。还有一类重要的商品即所谓的公共物品，将于下一节中讨论。它的边际成本就小于其平均成本——具有下降的 AC（平均成本）曲线。要想以边际成本出售这些商品而不征税予以补贴是不可能的。问题于是变成：假定某商品 z 不以边际成本出售，如果剩余的商品以比例于其边际成本的价格，即通过比例货物税或收入税出售，还可能推出消费者会处于最高的无差异曲线上吗？答案是否定的，下面的讨论会给出说明。

考虑一名消费者的简单情形，消费者在生产可能性边界上使其效用最大化，或者写成：

$$\begin{aligned} &\text{最大化} && U(x,y,z) \\ &\text{满足约束} && g(x,y,z)=0 \end{aligned}$$

拉格朗日函数为：

$$\mathscr{L}=U(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

得到一阶条件为：

$$U_x+\lambda g_x=0 \quad U_y+\lambda g_y=0 \quad U_z+\lambda g_z=0$$

$$\frac{U_x}{U_y}=\frac{g_x}{g_y} \qquad \frac{U_z}{U_y}=\frac{g_z}{g_y} \tag{19-39}$$

边际替代率分别等于各自的边际成本。假设现在 z 不是以 MC 出售，此简单约束条件可以表示为 $U_z = kg_z$，其中 $k \neq U_y/g_y$。现在除了满足资源约束 $g(x,y,z)=0$ 之外，我们也在满足这个约束时最大化 $U(x,y,z)$。该问题的拉格朗日函数是：

$$\mathscr{L}=U(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu(U_z-kg_z)$$

最大化的一阶条件（不包括约束）为：

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_x &= U_x+\lambda g_x+\mu(U_{xz}-kg_{xz})=0 \\ \mathscr{L}_y &= U_y+\lambda g_y+\mu(U_{yz}-kg_{yz})=0 \\ \mathscr{L}_z &= U_z+\lambda g_z+\mu(U_{zz}-kg_{zz})=0 \end{aligned}$$

12 R. G. Lipsey and K. Lancaster, “The General Theory of the Second Best,” *Review of Economic Studies*, 24: 11-32, 1956.

因约束 $U_z - kg_z$ 是紧的，故 $\mu \neq 0$，解得边际替代率为：

$$\frac{U_x}{U_y} = \frac{-\lambda g_x - \mu(U_{xx} - kg_{xx})}{-\lambda g_y - \mu(U_{xy} - kg_{xy})} \tag{19-40}$$

类似可以求得 U_x/U_z 和 U_y/U_z 的表达式。

等式(19-40)左边是 x 和 y 之间的边际替代率 MRS。但我们推断不出这个 MRS 应当等于 $MC_x/MC_y = g_x/g_y$。对任意值的交叉偏导数 U_{xx}，g_{xx}，U_{xy}，g_{xy}，对 x，y 征收的不成比例的货物税通常会满足(19-40)。你可能会注意到，若这些交叉偏导为 0，Hotelling 的“定理”成立，但这是一个特例。

所以，通常不可以认为如果经济中的某些扭曲即 $p_i \neq MC_i$ 消除，但其他扭曲不变时，消费者会更靠近帕累托有效边界。如果包括的行业是不相关的，会出现上述交叉偏导为 0 的情形，此时消除这些扭曲可以达到更有效的配置。

Hotelling 对没有扭曲的或一次性的税收给出了正确的结论。正如前面提到的，收入所得税是对休闲的一种补助，所以它扭曲了劳动/休闲之间的选择。人头税是一次性税收的例子，更精确地说，我们更主张一种存在税(existence tax)。但即使这种类型的税，我们仍将会发现，从长期来看，存在愈少的孩子，救生设备上的花费愈少等。从实践的目的上看，没有事情像一次性税收一样，这种结论可能比较保险。

19.6　公共物品

有一类重要的物品，它们的特征是：不止一个人消费。这些物品，即所知的公共物品，是没有饱和性的物品。普通的私人商品的饱和性如此严重，以至只有一个人可以消费。

最著名的公共物品可能就是国防服务。通常国家的对外政策和军事实力提供给每个人的保护不会因为有更多的人享受服务而受到实质性影响。同样地，在空闲的高速公路上开车，在空的剧院里观看电影或戏剧，或者看电视都属于这样的服务。为增加的每一位消费者提供服务的边际成本(从所用资源方面说)实质上为 0。这些商品是那种平均成本永远下降的极端情形的例子。

在福利经济学中为什么考虑这样的商品呢？这是因为，只有在所有商品和服务的出售价格等于边际成本时，经济才能达到帕累托边界。如果公共物品以边际成本出售，那就没有收益可以用子筹资以生产那些商品了。如果公共物品生产的资金来自于其他物品税收的收入，那么其他商品卖给消费者的价格就不是它的边际成本了，这就会使经济偏离帕累托边界。刚才谈到的次优问题就适用于这些商品。

先不管融资的问题。假定公共物品以边际成本即 0 的价格出售，那么商品生产水平如何呢？即可以产生多少不拥挤的高速路、召开多少场音乐会呢？公共物品的生产不是免费的，但这些物品是“免费”的，这仅仅是从增加一位消费者的边际成本为 0 这个意义上讲是成

立的。在私人物品情形中，这种问题不会发生(除了在平均成本是下降的情形时)。这些商品会由利润最大化的企业生产并以边际成本的价格出售。但是没有一个私人企业会生产一种公共物品，并满足帕累托条件 $p=MC=0$。

假定有两个消费者，其效用函数为 $U^1(x_1,y_1)$ 和 $U^2(x_2,y_2)$，其中 x 是公共物品，y 是普通的私人物品。由公共物品的定义，所有消费者都可以消费生产出来的所有的 x 商品。这样：

$$x_1=x_2=x \tag{19-41}$$

与以前一样，对私人物品，有 $y_1+y_2=y$。假设有一个转换面 $g(x,y)$ 定义了经济中的生产可能性边界。那么，帕累托最优的实现可以通过解下面的最优化问题：

$$\begin{array}{lll} \text{最大化} & & U^2(x,y_2) \\ \text{满足约束} & U^1(x,y_1)=U_0^1 & g(x,y)=0 \end{array} \tag{19-42}$$

其中 $y_1+y_2=y$。拉格朗日函数为：

$$\mathscr{L}=U^2(x,y_2)+\lambda_1(U_0^1-U^1(x,y_1))+\lambda g(x,y) \tag{19-43}$$

对 x,y_1,y_2 及拉格朗日算子求微分。注意到 $g_{y_i}=g_y(\partial y/\partial y_i)=g_y$，$i=1,2$，我们有 $U_{x_j}^i=U_x^i$ 等等，

$$\mathscr{L}_x=U_x^2-\lambda_1 U_x^1+\lambda g_x=0 \tag{19-44a}$$

$$\mathscr{L}_{y_1}=-\lambda_1 U_y^1+\lambda g_y=0 \tag{19-44b}$$

$$\mathscr{L}_{y_2}=U_y^2+\lambda g_y=0 \tag{19-44c}$$

及约束条件：

$$\mathscr{L}_{\lambda_1}=U_0^1-U^1(x,y_1)=0 \tag{19-45a}$$

$$\mathscr{L}_\lambda=g(x,y)=0 \tag{19-45b}$$

从(19-44c)，有 $\lambda=-U_y^2/g_y$，把该式代入(19-44b)，得到 $\lambda_1=-U_y^2/U_y^1$，把这两个表达式带入(19-44a)可得到：

$$U_x^2+\frac{U_y^2}{U_y^1}U_x^1-\frac{U_y^2}{g_y}g_x=0 \tag{19-46}$$

除以 U_y^2，得到：

$$\frac{U_x^2}{U_y^2}+\frac{U_x^1}{U_y^1}=\frac{g_x}{g_y} \tag{19-47}$$

对(19-47)式的解释非常有趣。U_x^1/U_y^1 和 U_x^2/U_y^2 分别是公共物品 x 的边际替代率或边际评价，表达式 g_x/g_y 是将 y 转化为 x 的边际比率或以放弃的私人物品衡量的公共物品的边际成本。因为两个消费者都消费了全部生产出的 x，公共物品对整个社会的边际收益是每个消费者边际收益之和。等式(19-47)因此说明当经济达到帕累托边界时，全部的消费者的边际收益等于边际成本。通常的边际收益等于边际成本的推理保持不变。这个准则适合于具有联合消费特征的商品。

等式(19-47)说明，为找到公共物品的市场需求曲线，需要将个人需求曲线垂直相加，如

图 19-6 中所示。而普通物品的市场需求却是个人需求的水平相加，因为每个消费者只消费了整体的一部分。但对公共物品，每个人都参与了整体消费。在图 19-6 中，个人消费曲线的高度 D^1 和 D^2 是公共物品 x 的边际评价[13]。D^T 是曲线 D^1 与 D^2 的垂直加总，代表 x 对两位消费者总体而言的边际收益。D^T 与生产 x 的边际成本曲线交于数量为 x^* 的地方，满足生产公共物品的帕累托条件。

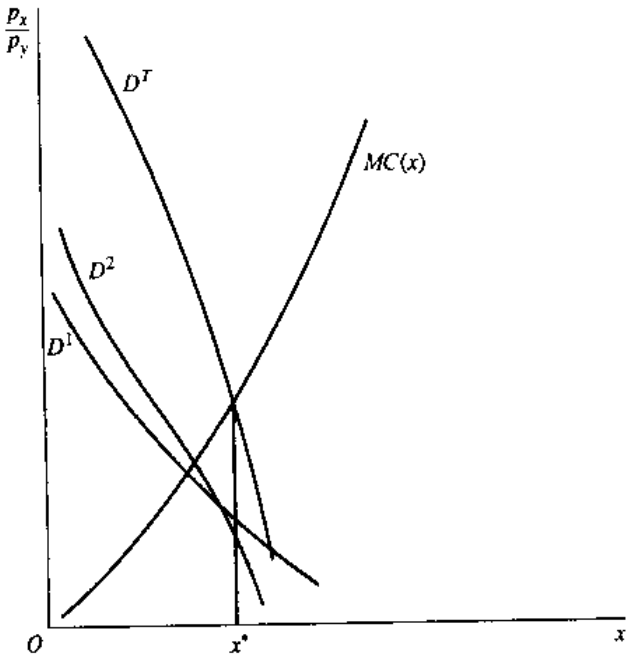

图 19-6　公共物品的市场需求。如果 D^1 和 D^2 是对公共物品的个人需求曲线，那么，总需求 D^T 是 D^1 和 D^2 的垂直加总。即 D^T 代表了每个消费者对公共物品边际评价的加总。可以进行这样的垂直加总是因为所有消费者都消费了产出的所有公共物品。D^T 与生产 x 的边际成本曲线的交点 x^* 代表了帕累托边界上的消费。

前述分析可直接推广到 K 位消费者的情形，此时，公共物品生产的帕累托条件将成为：

$$\sum_{i=1}^{K} MRS^i = MC \tag{19-48}$$

公共物品的私人生产，问题在于，普通的市场交易无法产生帕累托有效配置。为了使 x 的生产水平达到 x^*（其中 $\sum MRS^i = MC$），必须知道每个消费者的不同的边际评价。但是，消费者并没有机会显示这些偏好。而对于私人物品，消费者可以通过他们在市场上的选择显示他们的偏好，即购买更多的商品直至边际评价下降到市场价格水平。但市场上没有对

13　在这些需求曲线上，收入保持常数，并等于由转换表面 $g(x,y)=0$ 给出的 x 和 y 的总价值。

应的评价公共物品的机制。每个消费者消费了所有产出，而每人对商品都有不同的边际评价。而且，因为商品总体上是分散的，对消费者而言，低估商品的收益是有益处的，以免政府以每个消费者的个人收益评估为基础利用税费分配商品。最后，对每单位公共物品收取使用费会导致这些商品消费"过少"。考虑一个并不拥挤的大桥，当需要收取费用时，如果消费者对收益的边际评价大于 0 而小于收费，他就不会从桥上过。但因为消费者使用桥梁的资源成本为 0，将无法达到理想的帕累托最优。这样，市场上公共物品生产的普通合同不可能在理想的帕累托意义上达到资源的有效分配。

19.7 作为福利收益和损失度量尺度的消费者剩余

前面我们考察了对交易收益进行定义（以货币收入为单位）的有关问题。这些测度的最重要应用之一，是评价可选税制的成本收益或公共物品生产的益处。让我们首先简略概述这些问题，再把这种分析方法应用到公共物品的生产问题中。

自从马歇尔的《原理》出版之后，经济学家就试图通过对消费者需求曲线之下的区域进行某种计算，从面测量消费的益处。在图 19-7 中，消费者需求曲线上每一点的高度代表了对该商品的边际评价，以放弃的其他商品为单位进行表示。因此，很容易想到对这些边际收益进行积分或加总，以求得消费某个水平（而非完全不消费）的商品所得到的全部收益。不过，我们已从第 11 章知道这是不可能的。如果图 19-7 中显示的是希克斯需求曲线，或者说是效用不变需求曲线，区域 $OACD$ 代表的是消费者愿意为得到 OA 单位的 x 所支付的最大美元数。同样对这些需求曲线，ABC 代表消费者为获得以单位价格 OB 消费 x 的权力所愿意支付的最大数量。如果入门费确实支付了，购买的会是 OD，而消费者会在购买前后处于同一无差异曲线上，根据 ABC 的定义，即消费者所愿意支付的最大入门费用。这个测度具有很好定义的必需性质，而且至少在原则上是可观测的。

而在另一方面，假如图 19-7 中的需求曲线是货币收入不变的需求曲线，则区域 ABC 并不代表可观测的数量。与最终的价格 OA 和 OB 相关的效用货币价值是由线积分生成的，这通常都是依赖于路径的。不同的价格调整（能导致同样的最初和最终的价格收入向量）通常会导致对消费者效用收益的不同的货币评价。这是非同势效用函数不可避免的指数数目问题。仅仅在同势效用函数的情形下，对任意的初始价格集，效用的变化和收入的变动才是成比例的。

消费者消费 x 的边际收益恰好等于他对原来用于生产 x 的资源在生产其他东西时的评价——即 x 的边际机会成本，从这个意义上讲，数量 OD 是特殊的。如果经济中没有来自其他边际成本的价格"扭曲"，这正是帕累托条件的一部分。但是，如果有价格不同于 MC 的其他商品使得这样有效的消费水平没有出现，那么，我们也无法得到下面的结论：以 MC 出售商品 x 可以使经济更靠近帕累托边界。通常，如果一种商品不以 MC 出售，比如，因为在

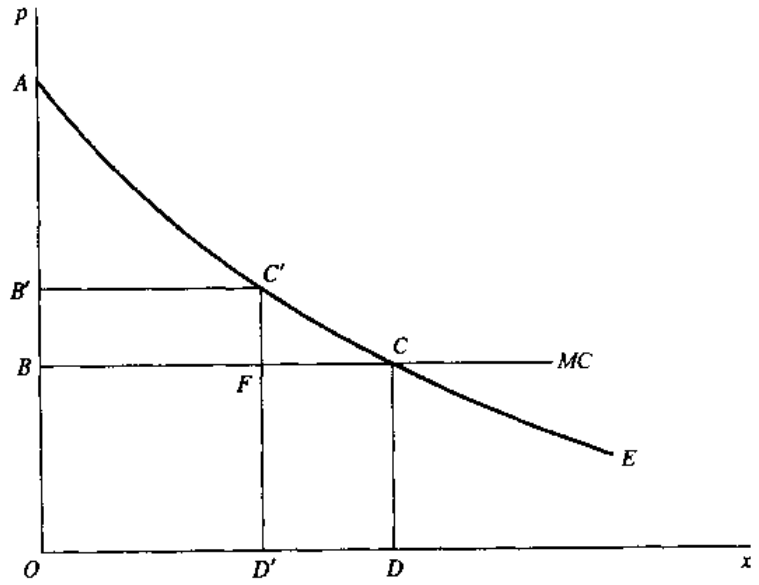

图 19-7　用消费者剩余测量福利损失的尝试。对福利损失的分析相当于为不在边际成本处出售商品产生的效用损失寻找货币测度的尝试。令 $OB=x$ 的边际成本 MC，假设 $OD'=B'C'$ 量的 x 以价格 OB' 出售。传统分析认为消费 OD 的收益为梯形 $OACD$。在价格为 OB' 时，总收益假定为 $OAC'D'$。两者之间的差异 $D'C'CD$ 被划分成了 $FC'C$ 和 $D'FCD$，后一区域是花费在其他商品（假定以边际成本出售）上的收入数量。剩下的区域 $FC'C$ 称为重负损失，是由于价格扭曲 BB' 而引起的损失的货币测度。这种扭曲通常归因于货物税或 x 的专卖。如果 AE 是真实收入或效用不变需求曲线，那么尽管因这些测度保持效用不变使得这些区域代表了面对不同价格时支付意愿的良好定义的测度，它们仍然不能很好地测量效用变化。

该商品上征收了货物税，那么经济中能达到帕累托有效边界的几种商品的货物税集合 $(t_1\cdots,t_n)$ 不可能包含其他商品的零税率，同时它们也不必全都和各自的边际成本成比例。在给定某种商品偏离 MC，或为了给政府服务融资时，确定引导经济趋向帕累托有效边界的最优税收集 $(t_1^*,\cdots,t_n^*)$，这个步骤太长，因而不在这里讨论了。

依照早期法国经济学家 Dupuit 的做法，以及受马歇尔对消费者剩余讨论的巨大启发，与消费 OD'（而不是 OD）单位的 x 有关的福利损失，对此的货币评价通常由图 19-7 中的三角区域 $FC'C$ 给出。消费 x 的全部好处下降了 $D'C'CD$。但是，其中的矩形区域 $D'FCD$ 代表了花在其他商品上的收入，假定位于其他商品的边际成本处，就消除了这种区域作为福利损失一部分的可能性。以价格 $OB'>MC$ 出售 x，无谓损失只是区域 $FC'C$，把所有商品的这些区域全部加总，就得到与偏离边际成本的这些价格相联系的福利损失。

补偿变体：

$$M^*(p,u)=-\int_{p_1+t_1}^{p_1}\sum x_i(p,U)\mathrm{d}p_i \tag{19-49}$$

代表了面对价格 p_i 而非 p_i+t_i，$i=1,\cdots,n$ 时，消费者愿意支付的货币数量。（如果某个 $t_i<0$ 且 $M^*<0$，则 M^* 代表消费者为自愿接受 p_i+t_i 而不是 p_i，$i-1,\cdots,n$ 所必须支付的数量。）利用 M^* 作为对效用增加的收益的测度，存在的问题是 M^* 仅仅依赖于一个无差异的水平。在积分(19-49)中，效用是常数，这可能导致不恰当的福利排序。

在图 19-8 中，我们不妨令 $p_y=1$。因为，在这个情形中，垂直方向的截距为 $M/p_y=M$，收入的变化可以直接从纵轴直接读出。消费者最初面对的 x 的价格为 p_x，收入 OA，预算线从 A 发出。从图中可知，消费者为了将 x 的价格降到 p'_x，会愿意支付 AB。而为了将价格降至 p''_x，会愿意支付数量 AC。假设 $AB=\$10$ 和 $AC=\$20$，并假设消费者事实上将必须支

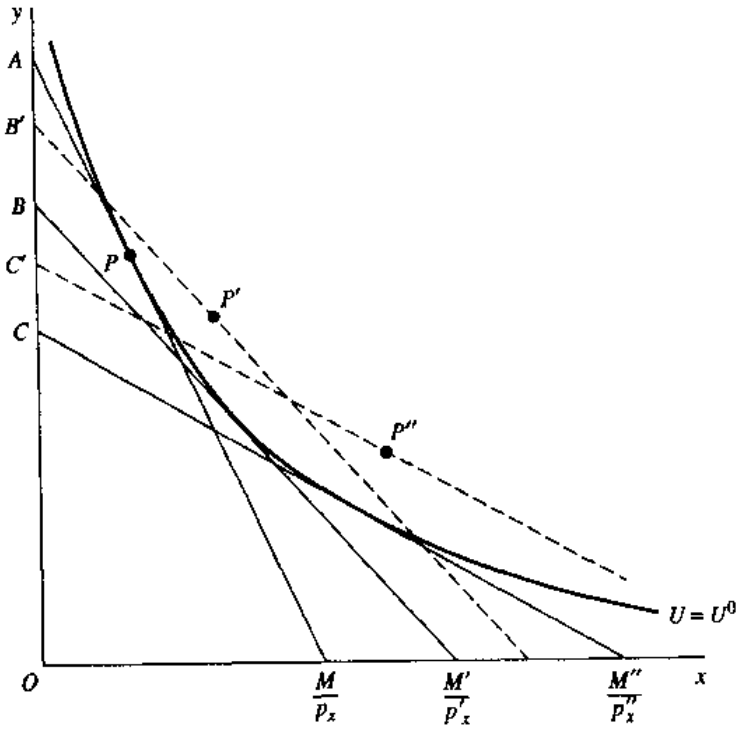

图 19-8 通过补偿变体测量交易收益。消费者收入为 M，价格 p_x，$p_y=1$。因预算线与 y 轴交于 $M/p_y=M$，货币收入因此可作为沿着竖轴的距离是可以测度的。在价格 p_x 处，消费者在点 P 处消费的效用为 U^0。根据图示，消费者愿意支付数量 AB，AC 以求得更低的价格 p'_x，p''_x。假如消费者仅需支付 AB'，AC'就可以得到这些低价，并设消费者愿意支付和实际支付间的差异即 BB'和 CC'是不等的。比如可设 $BB'<CC'$能推出第二种情况下消费者的无差异曲线更高吗？否。第一种情形中，消费者面对价格 p'_x，收入 OB'，最终处于某点 P'，第二种情形中，消费者面对价格 p''_x，收入 OC'，最终处于某点 P''。通常，没有办法说明 P'或 P''处在一个更高的无差异水平上。除了仅有的确定的无差异曲线是 $U=U^0$，并没有更多的关于偏好的无差异水平居于何处（除了凸性）的信息。所以，两个互相排斥的计划的补偿变化和真实成本之间的差异是消费最终收益的不可靠的测度。

付\$5(AB')以使 p_1 下降到 p'_1 或将支付\$14(AC')使 p_2 降至 p''_2。假定 AB' 和 AC' 代表两种互相排斥的可选公共项目计划的成本。这些数据是否足够回答哪个项目能使消费者达到更高的无差异水平，并从这个方面评估这些计划呢？尽管第二项计划的收益(用补偿变体测量)减去成本后更大一点，但人们不能下结论说消费者会有所改善。第一个计划中，将 p_1 降至 p'_1，消费者会在预算线(从 B' 出发，斜率为 p'_1)上的某点 P' 结束。而对于第二个计划，消费者会在预算线(从 C' 出发，斜率为 p'_2)上的某点 P'' 处停止。在一个较大的价格变动范围里，没有方法确定，到底 P' 是优于还是劣于 P''。理由是除了一个可导出所有补偿变体的无差异曲线 $U=U^0$ 外，我们对消费者的效用函数一无所知。因此，具有形式(19-49)的积分不可能是交易收益的可靠测量，因为它们是保持效用不变的。

19.8　所有权和交易成本

我们已经对经济有效性的帕累托条件在没有任何制度框架下的情形进行了分析。我们假设生产、交易以及消费是没有冲突的。但是事实上，在互利基础上的生产和交易并不是一个普遍认可的原则，在世界上的很多地方，这样的行为是被政府法令严格禁止的。没有一个社会在字面上允许互利的交易。但更重要的是，在不同商品间，不同国家间，参与交易的能力或成本有实质上的差异，交易的程度依赖于个人对资源拥有的权力以及交易的成本。

Robinson Crusoe 总可以得到给定偏好时的有效产出：他会在满足生产约束时使效用最大化。另一个个人的进入，Friday，会给 Crusoe(和 Friday)更多的考虑"余地"，通过专业化获得好处是可能的，但专业化需要交易方面的协议以及合同的强制性。交易常常总包含着"不对称信息"。通常人们会对放弃什么比将收到什么更清楚一些。Crusoe 和 Friday 将会担心对方是否会照合同的规定行事。在现代社会，商品有许多属性是难以完全测量的。生产和交易可能与许多人有关联，每个人都有各自的利益，也可能存在一些会偷走商品的入侵者。但是，列出耗尽全部的交易收益所必须满足的边际条件，这可能是非常有用的第一步，虽然这些收益的经验实现要受监管行业的社会法律制度及生产交易中的交易成本的影响。专业化是不易发生的，如果(比如偷盗)无法受到约束。

近些年，经济学家重新恢复了对所有权和经济活动间关系的兴趣。虽然帕累托条件通常是不可观测的，但在某些情形下或缺乏某些情形时会使达到帕累托有效边界是不可能的，要证明这一点还是可以的。对交易成本的研究，以及合同结构如何变动以适应在不同约束时实现的交易收益，是经济学中重要的一个新领域。交易成本与税收是不同的，通过把供给曲线移动税收这么大小的距离，我们能够以通常的方式来分析税收。但交易成本是因为交易中控制不完全，由讨价还价中所获得的不确定性引起的交易收益的损失。

资源是"私人的",如果它具有以下三个特征:[14]

1. 排它性——个人具有排除他人使用的权力。

2. 收入所有权——个人可以得到(和保留)资源产生的收入。

3. 可转移性——个人可以按议定价格把资源转移给其他人。

在现代社会中,这些权力可能会因政府的介入而得到不同程度的加强(和削弱)。这些权力总是不完全的。在美国,大多数非政府所有的土地按前述意义是私有的,但比如说,土地的使用和转移可能会受到地方法律的限制,移动地下矿物的权力也可能受到限制。在19世纪开发美国西部时,"家园法案"将土地权利给了个人,但那些人必须自己在土地上工作而且通常在10年之内不能重新出售土地。工厂排放污染削弱了我们呼吸新鲜空气的权力,好吵闹的邻居侵犯了我们享受家带来的好处的能力,从而降低了家的"私人性"程度。随着私人所有权强制力的变化,经济活动在许多重要的方面也有许多变化。

完全丧失排它的权力就是一个极端的重要例子。在这种情况中,没有人拥有资源,它被称为是公用产权,一个明显的例子便是深海渔业。在一个国家的领海限制以外(从离岸3海里到200海里不等)的海洋资源特别是渔业资源,除非是特别对待的,通常都不受有效的所有权限制。即使签订了条约,对捕捞能力的政策限制,比如在太平洋,还是可能受到严重的限制(即无效的)。在某些国家,私人的土地所有权也是受到严格限制或是禁止的。在这样的情形中,我们通常可以预测,资源的利用水平将超出帕累托条件隐含的使用水平。

假定,日常饮食的生产是使用劳动 L 和土地 K 通过某一生产函数 $y=f(L,K)$ 得到的,产出 y 是以竞争性价格 p 出售的。图19-9画出了劳动的边际和平均生产(产值)曲线。假定工人的工资是 w,这个工资代表的是食品生产中劳动的机会成本,即工人能够每天生产价值 w 的非农产出。对每一位农业工人而言,每天放弃了数量为 w 的非农产出。

现在考虑两类所有权的"典型"系统。

私人产权 假定某人私人拥有固定地段的一片土地。私人所有者将使土地租金最大化,即

$$\text{最大化} \qquad R=pf(L,K)-WL$$

租金最大化的一阶条件是:

$$pf_L=w$$

或图19-9中的投入 L_2。因为,在边际产出安排下的区域是全部产出,在 pf_L 之下工资线 w 之上的阴影区域代表了土地的最大日租金。

这一产出的重要性质是满足帕累托条件:交易收益完全耗尽。对满足 $0\leqslant L\leqslant L_2$ 的劳动投入,$pf_L\geqslant w$。这样,增加的农业产出就超过了经济中其他部门的产出损失。超出 L_2 时,放弃的非农产出就超过了食品生产所得,在土地上使用更多工人也不能实现进一步的

14 对私人产权的这种分类最早来自于 Steven N. S. Cheung"A Theory of Price Control," *Journal of Law and Economics*, 17(1): 53-72, April 1974. 它类似于 Armen Alchian and William Allen 的 *Exchange and Production*, Wadsworth, Belmont, CA, 1964 第一版中的分析。

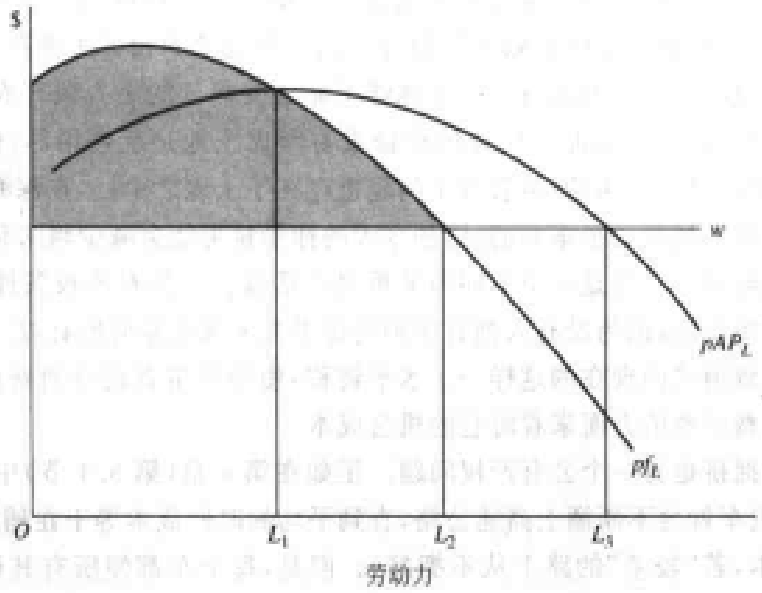

图 19-9　在私人和公共产权下的资源配置。劳动边际成本为 w 时，某种资源比如土地的私人所有者会雇佣数量 L_2 的工人，其时 $pf_L = w$。这是一个有效的配置，因为生产商品的边际价值等于在别处劳动的边际价值，任何其他的劳动重新配置都不能增加产出。在公共产权下，工人会不断地进入土地工作，直到他们的回报，包括地租的一部分等于他们在别处的机会成本。在这样的系统里，$pAP_L = w$ 时，数量 L_3 的工人会在土地上工作。这是一个无效的配置，因为工人只给农场增加了价值 pf_L，少于他们在别处的机会成本。

互利。“看不见的手”在起作用。私人所有权会使社会得到最大的产出收益，虽然土地的所有者既不知道也没有打算有多少产出。

公有产权　现在假设进入土地是不受限制的，任何人都可以成为一个“擅自占地者”。比如，可以假设组成一个农业“合作团体”，没有进入限制。任何人都可以加入这个团体并且同等分享产出。因工人平等的分享产出[15]，每个人得到的都是平均产出的价值。为确定是否要参加团体等选择，工人会比较可能的工资 w 和农场的平均产出。当劳动投入水平低于 L_3 时，工人可在农场上赚得更多。这个特殊的额外收入来自于当工人加入团体后获得的土地所有权租金。但没有进入限制时，土地租金是非排他的收入。工人们会为收入的所有权互相竞争直到在边际上它不再存在（或超出获取它的成本）。在这个例子中，工人会继续加入团体直到加入的边际收益（平均产出）等于他们可能的其他收入 w，当 $pAP_L = w$ 时，全部产出 $= wL =$ 全部要素成本，租金就没有了。

15　我们忽略了“偷懒”的问题，这可能是这类企业不普遍的主要原因。

这个产出是非有效的。即从交易中获得进一步的好处是可能的。当劳动投入大于 L_2 时，工人从事种植对产出的边际贡献 pf_L 低于工人在其他处获得的可能产出 w。资源被配置在使产出下降而不是上升的地方。如果能够引导这些额外的工人离开农场，原则上产出会增加，并使每个人都有所改善。[16]前述的论证没有考虑土地是否会用尽，但对海洋捕鱼这样的例子，这可能是很有关系的(尽管这个问题也存在于土地之中)。在深海捕鱼的例子中，保护鱼储量以备将来捕获是很重要的，增加今天的捕捞量可能会减少将来鱼的储量，从而提高将来捕鱼的边际成本。这是一个不同但又重要的话题。在公有产权条件下，有价值的东西会变少甚至可能灭绝，因为没有人拥有保护资源带来未来收益的所有权。在那种情形中，财富最大化会导致消费向现在的这样一个水平转移：使得消费者现今消费的边际价值低于从放弃的未来消费的现值方面来看时它的机会成本。

高速公路的拥挤是另一个公有产权问题。正如在第 8 章(第 8.4 节)中所说明的，若没有进入的限制，汽车就会不断涌上高速公路，直到平均的时间成本等于在辅路上所花的边际成本(或平均成本，若"较差"的路上从不拥挤)。但是，每个车都使所有其他车变慢了。这样，所有司机边际时间成本的总和就超过了任何一个进入高速公路的司机的获益。随着司机们进入高速公路为获得租金进行竞争(从节约时间方面)，交通速度的减缓使得那些租金耗尽了。如果有些汽车能从辅路上走，资源便可以节约。在私人产权时，通过收费可以达到有效产出。但在公共产权时，高速公路被过度利用了。

价格控制通常会形成非排它的收入。假定汽油的市场价格为每加仑\$1.50，但为了将租金转移给消费者，政府将价格确定在\$1.00。若油箱可装油 10 加仑，则价格控制相当于在每次加满油后给每个司机\$5.00 的礼物。但是，这种收入不是排它的。只要加满油箱就可以得到，汽车车主会为了这个礼物进行竞争。尽管采取的竞争形式依赖于价格控制中附加的法律和经济限制，但典型的反应，就如 20 世纪 70 年代那样(除了些许暴力)，通常是让司机们竞相排队购买。这样的话，\$5.00 的收益至少就会有部分因为要放弃增加效用的其他可能行为(可能包括休闲)而减少消失了。如果消费者有另一可选择的相同的时间成本，比如给定了每小时\$5.00 的边际工资率，那么等候的队伍就会有 1 小时长，而租金也会全部消失。通过发放可自由交易的定量票据可防止租金消失。在这种情形下，汽油的价格仍然会是\$1.50，\$1.00 为现金，\$0.50 为放弃的未将票据出售给他人的收益，通过给予\$0.50的收益排他性的权力，租金可以实实在在地转移给消费者。[17]

---

16 其他类型的合法的所有权形式会导致不同的资源错误配置。比如，"社会合作"企业中，现在雇佣的工人决定投入的劳动并平均分摊产出，这将最大化平均产出(如图 19-9 中的 L_1)，但会导致过少的农业产出。

17 不过，更省事的方法就是简单地对每加仑油收\$0.50 的税收，然后，通过某种与消费者个人购买无关的一次性付税将收入返还消费者。

科斯定理

最早系统性地阐述交易成本在资源配置中所扮演的角色问题，是 Ronald Coase 的开创性论文“社会成本问题”。[18]错误配置的背景就是各式各样的“技术外部性”——这种情况下，一种物品的生产是某个其他商品生产的负投入。最早被引用的例子是广为人知的经典例子：迷途的牛。农场主养了牛，却使邻居的庄稼遭到了永久性的伤害。

下面是 A. C. Pigou 对该问题所做的福利经济学的经典处理。参见图 19-10，不考虑受害庄稼，牛的边际私人成本被标为 MC^p。这个曲线描述了所有常见的放弃的产出机会，可表述为喂食、土地、牛圈、护栏等等的成本，但它也给社会带来了另外一种生产成本，每多饲养一头牛都会破坏一些庄稼，从而降低相邻农场的产出。若将这种损害也看成养牛的一

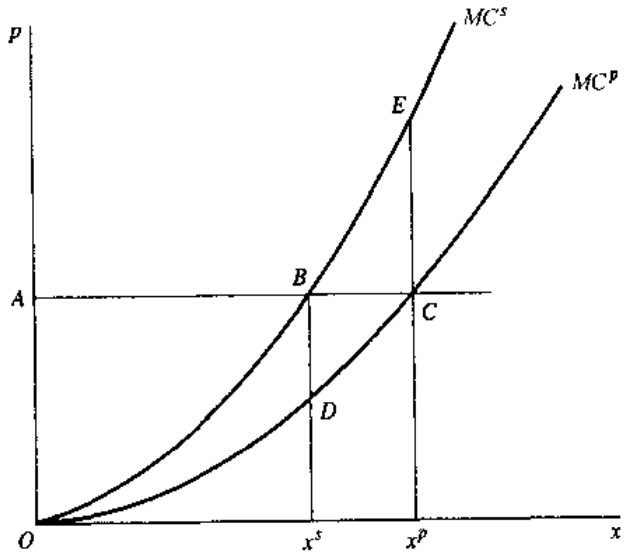

图 19-10　私人和社会边际成本。这一类型的图可用于说明社会和私人成本间的差别。在这个例子中，由于没有包括受破坏的庄稼的成本，曲线 MC^p 错误设定了生产的边际成本。对庄稼的边际破坏，副作用，或外部性可表示为 MC^s，即社会的或真实的边际成本和 MC^p 之间的垂直差异。以前认为，如果畜主不必为损坏的庄稼负法律责任，产出会是 x^p，这种分析没有说清楚为什么最大化的个人无法达到契约曲线。为了分析最终产出的数量，必须给定合同订立的成本，即对畜主和农场主的约束。如果交易成本为 0，两人实际上是一个人，他们永不会允许 x^p 来代替 x^s，因为增加的净利润 BCD 少于庄稼遭受的破坏 $BECD$。如果畜主不必为破坏负责，农场主会愿意订立合同支付畜主多于 BCD（但少于 $BECD$）的数量以使其生产 x^s 而非 x^p。因双方都有利可图，这种合同是隐含的。

18　Ronald Coase, “The Problem of Social Cost,” *Journal of Law and Economics*, pp. 1-44, October 1960。

种成本，则可画出社会的边际成本曲线 MC^s，其中的差别 $MC^s(x)-MC^p(x)$ 便是对庄稼的边际损害。

假定牛的价格为 OA，传统的（庇古）福利分析认为，除非农场主要对庄稼损害负责，否则，农场主将不会考虑边际社会成本：饲养的牛的数量会是 x^p，其中 $p=MC^p$。这样资源将被错误配置，即生产出了太多的牛（太少的食物）。帕累托最优的边际条件要求生产的数量为 x^s，其时 $p=MC^s$，因为 MC^s 代表了养牛的真实边际成本函数。

如果产量为 x^p，则私人总成本为区域 $OCxp$，对庄稼的全部损害为在两个成本曲线之间的区域 OEC，所以，生产的总成本是区域 $OExp$。在这样的产出水平时，资源的配置是不恰当的；当产出水平高于 x^s 时，产出的边际机会成本大于给予消费者的边际收益（由价格 OA 来衡量）。产量若是 x^p 而不是 x^s，会导致数量为 BEC 的损失。

科斯的贡献在于，他指出了只有当养牛者和相邻的农场主不能进一步订立合同时，前面的讨论才是正确的。资源的错误配置意味着来自交易中某些互利的东西损失掉了。如果交易成本为 0（这里交易成本并不特指什么），追求最大化的个人就不可能在合同曲线之外的某点上达成一致，如果两个人能就非帕累托有效的资源配置（或错误的）达到一致，那就是对多多益善的一种否定。

给乱走的牛指定法律上的责任，仅仅是禀赋的一种设定。任何不用为受践踏的庄稼进行赔偿的养牛者，会变得更富有。这是养牛者所有权的延伸和农场主所有权的削弱。同样，法庭下令养牛人要对受损庄稼负责也只是资产的一种转移，从养牛人转移到了农场主身上，而非生产可能性及偏好的改变。没有理由解释为什么禀赋的变化会阻止合同曲线，即帕累托有效边界的移动。福利经济学的经典定理说明，无论禀赋点处于 Edgeworth 方盒中的哪一点，个人都会移向合同曲线。

得到一个非帕累托有效的解答的错处在于，错误地考虑了个人，即前例中的养牛人和农场主之间可能的合同范围。如果养牛人要对受害庄稼负责，那便不需要进一步的合同。国家力量保证了养牛者必须为庄稼的损害赔偿农场主的合同一定会履行。但如果养牛人不必负责，那就仍有可考虑的选择。农场主可签订合同，通过给养牛者一些费用以降低牛的产量。观察图 19-10，生产 x^p 而不是 x^s 引起的对庄稼的损害是区域 $DBEC$，但养牛者从这额外的产出得到的净利润仅是区域的一部分 DBC，因为生产 x^p（而非 x^s）给农场主带来的损失比起给养牛者带来的好处，多 BEC 的数量，农场主就可以给养牛者多出其所得的 DBC，而少于 $DBEC$ 的费用，以使其将产出下降到 x^s。没有交易成本时，这一合同是隐含着的，因双方都会因此有所改善。在超过 x^s 水平的任何产出中，对农场主的损害超出了养牛人增加的收益。通过合同双方都能获益，合同中农场主可以支付给养牛者居于两个数量之间的一些东西，以将牛的产量降低至 x^s。

如果交易成本不是 0，交易中的收益就可能会有所损失。为说明这个问题，这儿只能开个头。交易相关各方仍有理由考虑其他形式的合同，以获取其中互相有利的东西。不同的合同有不同的谈判和强制成本。兼并或一方彻底收购另一方可用于诸如将损坏庄稼的副作

用内部化的问题。通过兼并或彻底收购，养牛者会饲养 x' 的牛，因为，现在遭破坏的庄稼也是他自己的。我们会看到，人们设计各种契约以最大限度地获取来自交易中的互惠收益。事实上，这个假设正是基于最大化行为的一个新兴的契约理论的基础。[19]

佃租理论：科斯定理的应用

科斯定理的最早经验应用可能是 Steven N. S. Cheung(张五常)[20]对佃租的分析。佃租是一种农业租金的支付形式，其中地主得到的土地租金是产出的某个预定比例，而不是固定的绝对数量。这种形式的租金合同，比起固定租金合同来，是许多社会改革者们所不熟悉的。

佃租作为租金支付的一种合同形式，受到了各类不同的经济家的攻击，因为他们认为相比固定租金合同，它会对资源进行错误的配置。在新古典的框架中，人们认为付给地主的租金相当于对佃农征收了货物税，从而使佃农把产出下降到低于产出边际价值，等于佃农可选的工资的水平。

看图 19-11，上面的曲线是劳动边际产出曲线。在固定租金或固定工资合同情况下，雇

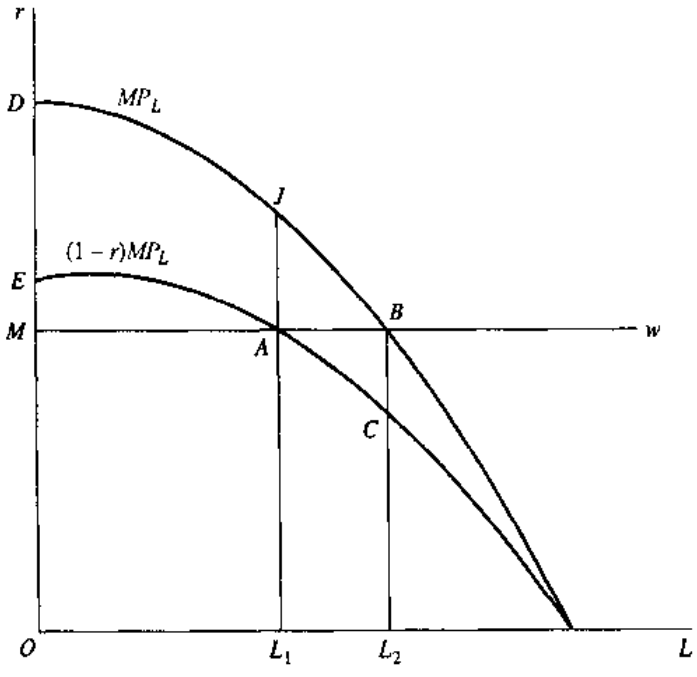

图 19-11　佃租的税收等价方法。这个图曾用于说明佃租是一种没有效率的合同。类比税收，如果 MP_L 是劳动的边际产出，佃户产出的百分之 r 作为租金，那么佃户的净边际产出为 $(1-r)MP_L$。面对这样的一种税收，佃户会在 L_1 生产，其时真实的边际收益 MP_L 超过了由工资 OM 测量的劳动的边际成本。这一说法，虽然对于劳动上的货物税而言是正确的，但却不能简单地推广到佃租的情形中。在一个分担合同中，除了分享股份之外，更多的变量也是给定的，农场规模，非劳动投入以及劳动投入一般都是可以谈判的。在地主满足以劳动的机会成本来竞争获得劳动的约束下寻求租金最大化的基本假设之下，可以推出帕累托条件 $MP_L = w$。(引自 S. N. S. Cheung The theory of Share Tenancy Uniuersity of Chicago Press Chicago 1969 P43)。

19　Coase 也证明了当交易成本不为 0 时，不能事先推断某种责任的分担会引发进一步的配置错误。考察熟知的铁路例子，由于铁路轨道上的火星偶尔会使轨道边的田地发生火灾，如果铁道部门要对所有损失负责，农场主就会丧失通过不在特别靠铁道边的地方种植易燃庄稼从而减少损失的动机。将靠近铁路的土地作为防火隔离区可能会发挥它最高的价值。而在另一方面，如果铁道部门不负责，那么通过的火车会过多，也即产生超过 $MC^x = P$ 的点。一种可能的合同是铁道部门购买铁路边的土地。这可以消除大多数(如果不是所有)的问题。

20　Steven N. S. Cheung, *The Theory of Share Tenancy*, University of Chicago Press, Chicago, 1960。

用的劳动投入为 L_2，此时，劳动的边际产出等于它可选的工资 OM。但若假定合同中支付给地主的租金是产出的百分之 r，那么较低的曲线 $(1-r)MP_L$ 才代表了承租人除去租金支付后的边际生产曲线。这似乎引导人们认为，在这种情况下，佃农的收入水平是 L_1。这是个没有效率的点，因为，真正的劳动边际产出要高于它的次优使用，即用工资 w 所测量的。[21]

到此为止的讨论都是正确的。对佃户产出收取 r %的税收，的确会导致佃户在 L_1 处生产。错误在于将税收分析应用于佃租，一种地主与佃户自愿签订协议的情形。这里再一次牵涉到科斯提出的根本性问题：为什么效用最大化的人们会走到一起而不把交易益处全部分配完呢？如果使用 L_1 代替 L_2，总的产出损失为 L_1JBL_2，而这一劳动差 L_2-L_1 的社会成本是 L_1ABL_2，所以，互利部分 JAB 损失了，为什么地主愿意放弃这更多的土地租金呢？

把税收分析应用于佃租，实际上假定了能够设定的惟一变量是租金率或是工资率。但一个合同中不必只包含一个条款，在合同中可以指定不止一个的变量。（要不然，合同为什么会存在呢？）即便是在普通的工资合同中，小时工资也不是惟一确定的事物，通常还有雇主和雇员间的不正式的协议。雇主希望工人按时上班，至少以某个强度工作一定的时间等等。如果合同中仅规定了工资，最大化行为就意味着工人只需上班而无需做任何工作。现实生活中，佃租合同也规定了类似的这些事情，比如耕作的土地数量，佃户提供的非劳动投入，“投到（地主）土地上的（水牛）粪便”等等[22]。在这些情形下，税收分析是不能简单套用的，因为情形是完全不同的。

佃租作为一种合同形式，它与帕累托情形是一致的。证明如下：假定地主拥有的土地数量（资本）为 K。劳动可以工资率 w 获得，代表了劳动的选择价值。地主可把其土地分成 m 块备租农场，其中 m 是一个选择变量。同样的，对地主而言，租金率 r 也不是固定的，也是个选择变量。令供给每个佃户农场的劳动数量为 L，分给每个农场的土地数量是 $k=k/m$，佃户的生产函数因而可写成 $y=f(L,k)=f(L,K/m)$。

地主会寻求使租金 $R=mry$ 最大化，但这不是一个无约束最大化问题。地主必须为佃户竞争，在这个竞争约束下，给佃户的工资部分不可以低于他备选的工资劳动收入，模型于是成为：

$$\underset{m,r,L}{\text{最大化}} \qquad R=mrf(L,k)$$

使得：

$$wL=(1-r)f(L,k) \tag{19-50}$$

从约束条件：

$$rf(L,k)=f(L,k)-wL$$

可知，消去 r 后问题可以变为无约束的形式：

$$\underset{m,L}{\text{最大化}} \qquad R=m[f(L,k)-wL] \tag{19-51}$$

---

21 非常奇怪的是，社会学中许多对佃租的批评是基于地主对佃农过分的盘剥的，正如我们所将要看到的，这可能是比上述在经济学意义上的讨论更为机敏的观察。

22 Cheung，同上。

微分，并令 $k=K/m$，我们有

$$\frac{\partial R}{\partial m}=m\frac{\partial f}{\partial k}\left(-\frac{K}{m^2}\right)+[f(L,k)-wL]=0 \tag{19-52a}$$

$$\frac{\partial R}{\partial L}=m\frac{\partial f}{\partial L}-mw=0 \tag{19-52b}$$

从式(19-52b)，我们立即可看出，地主会与佃户签订合同，以使劳动的边际产出(的价值)等于劳动的选择成本。这样，图 19-11 中的劳动投入就会是 L_2，而非 L_1。帕累托条件得到了满足。把 $w=2f/\partial L$ 代入等式(19-52a)，有：

$$\frac{\partial f}{\partial k}k+\frac{\partial f}{\partial L}L=f(L,k) \tag{19-53}$$

式(19-53)是对产出分配的一种描述(不是欧拉表述，那是个恒等式)。投入的土地(资本)价值(用边际产出来度量)乘以土地投入量加上劳动的类似表达式，等于农场的全部产出。

从最初的(19-50)中的约束和(19-53)，我们可以知道，地主得到的产出部分 $rf(L,k)$ 是：

$$rf(L,K)=f(L,K)-\frac{\partial f}{\partial L}L=\frac{\partial f}{\partial k}k \tag{19-54}$$

地主所得正是农场的估计价值。在图 19-11 中这正是区域 MDB，当选择 r 使土地租金最大化时，地主的所得部分也可由区域 $EDBC=MDB$ 来表示。不过 $EDBC$ 不是取任意 r 时地主的所得，而仅是租金最大化 r 的部分。由(19-54)，租金最大化时的地主所得是：

$$r^*=\frac{f_k k}{y}$$

这个份额不是由习惯或传统所决定的。它是合同规定的数量，它会随着土地肥力、劳动成本以及合同中确定的其他变量的改变而变化。

不过，说明佃租与帕累托条件一致只是陈述了一个规范性的条件。实证经济分析中有意义的问题在于，为什么合同形式会变化。即为什么有时候是固定租金，有时候又是分摊合同？读者可以参考 Cheung 的书来获得这个问题的详细解答。这里我们仅指出部分原因：这依赖于合同成本和风险厌恶等因素，分摊合同可能是实施成本更高的。再举个农业中的例子，如果由于天气原因，产出的变化很大，地主和佃户可以通过分摊合同来分担不确定性的风险。事实上，来自台湾的经验证据表明，在小麦种植中，分摊合同比稻米种值更为普遍，因为小麦比稻米有更高的产出变异系数。

仅仅说明某些经济行为是没有效率的，一般而言，这是没有意义的。如果能将福利分析的规范性陈述用于考察为什么这些理想的边际条件被违背了，那么，规范性陈述可能是最有用的。因而，这个分析就成了实证的而非规范的。于是，人们不再宣称某个行为是非理性或非有效的，而是断定参与者会寻求签订合约以进一步分配掉交易中的互惠收益，或者从那里推导出可证伪的性质。

习题

1. 解释为什么为最多数的人寻找最多最好的商品是没有意义的。
2. 假定两位消费者的效用函数为 $U^1=x_1^{1/3}y_1^{2/3}$，$U^2=x_2^{2/3}y_2^{1/3}$。$x=x_1+x_2$，$y=y_1+y_2$ 代表可得到的所有商品数量。求代表这些消费者合同曲线的方程。
3. 假定有两种商品 x，y，都是公共物品。有两个人，他们的全部消费由这两种商品组成，生产可能性边界是 $g(x,y)=0$。求满足帕累托条件的 x，y 生产水平的边际条件。
4. 假定经济中只有一个企业是完全歧视的垄断者，其他企业都是完全竞争的。解释为什么帕累托条件仍能满足。企业不是完全竞争时，收入的分配和分布会有什么差别？
5. 两个农场主 A，B 分别住在离河 8 和 12 里的地方，沿着河流的方向，他们之间的距离是 15 里。河流是他们水的惟一来源，每个抽水站的成本为 P，且必须设在河上。输水管道的成本是\$100/里，一旦装好输水管道和抽水站，得到水就不需要额外的成本了。
   (a) 农场主有得到水的总成本最小化的动机吗？
   (b) 如果一个抽水房可用于供给两个农场主，证明它应该建于河上离农场 A 最近点的 6 里处(可以用积分或相似三解形)。每个农场主和整个的水的成本是多少(用 P 来表示)？
   (c) 假定农场主建自己的抽水站，那么每个的成本为多少，整体成本又为多少？
   (d) 证明当抽水站成本在一定范围内时，若交易成本足够低，一个农场主会引导另一位共同分享抽水站。(先简单假设平均分摊抽水站成本，而后放松假设。)
6. 解释为什么效用边界必须是向下倾斜的？为什么从效用函数的基本性质上讲效用边界不必凸向原点。
7. “个人效用函数间的互相依赖或生产函数间的互相依赖会导致资源非帕累托有效地配置”，评价之。
8. 当市场对资源配置比理想的帕累托情形没有效率时，通常称为市场失灵。
   (a) 为什么政府配置资源比帕累托理想情形缺乏效率时不称为政府失灵。
   (b) 在什么情形下会有市场失灵？
   (c) 引用一个有名的例子，假定在某个地方有个种苹果的和一个养蜂的，而蜜蜂是以苹果花为食物的。如果种苹果的提高苹果产量，养蜂人一定也会增加蜜产量。单独行动的种苹果者不会觉察到苹果树真正的边际产出从而引起资源的错误配置。为该问题设计一个模型，养蜂人和苹果种植者之间真实合同的存在是否会影响你对市场失灵是生产外部性或互相依赖性的必然后果这一结论的判断？

部分参考文献

Arrow, K. J.: “An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics,” in J. Neyman (ed.) *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, 1951.

_____: *Social Choice and Individual Values*, 2nd ed., *Cowles Foundation Monograph* 12, John Wiley

& Sons, Inc., New York, 1963.

Bator, F.: "The Simple Analytics of Welfare Maximization," *American Economic Review*, 47: 22-59, 1957.

_____: "The Anatomy of Market Failure," *Quarterly Journal of Economics*, 72: 351-379, 1958.

Bergson, A.: "A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics," *Quarterly Journal of Economics*, 52: 310-334, Februry 1938; reprinted in K. Arrow and T. Scitovsky (eds.), *Readings in Welfare Economics*, Richard D. Irwin, Homewood, IL, 1969.

Buchanan, J., and G. Tullock: *The Calculus of Consent*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1963.

Cheung, S. N. S.: *The Theory of Share Tenancy*, University of Chicago Press, Chicago, 1969.

_____: "The Fables of the Bees: An Economic Investigation," *Journal of Law and Economics*, 16: 11-33, April 1973.

_____: "A Theory of Price Control," *Journal of Law and Economics*, 17(1): 53-72, April 1974.

Coase, R. H.: "The Problem of Social Cost," *Journal of Law and Economics*, 3: 1-44, October 1960.

Davis, Otto A., and Andrew B. Whinston: "Welfare Economics and the Theory of Second Best," *Review of Economic Studies*, 32: 1-14, 1965.

Demestz, H.: "Information and Efficiency, Another Viewpoint," *Journal of Law and Evonomics*, 12: 1-22, April 1969.

Gordon, H. Scott: "The Economic Theory of a Common Property Resource: The Fishery" *Journal of Political Economy*, 52: 124-142, April 1954.

Harberger, A. C.: "Monopoly and Resource Allocation," *American Economic Review Proceedings*, 44: 77-87, May 1954.

_____: "Taxation, Resource Allocation and Welfare," In *The Role of Direct and Indirect Taxes in the Federal Revenue System*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1964.

_____: "Three Basic Postulates for Applied Welfare Economics: An Interpretive Essay," *Journal of Economic Literature*, 9: 785-797, September 1971.

Hotelling, H.: "The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and Railway and Utility Rates," *Econometrica*, 6: 242-269, 1938.

Lerner, A. P.: *The Economics of Control*, The Macmillan Company, New York, 1944.

Lipsey, R. G. and K. Lancaster: "The General Theory of the Second Best," *Review of Economic Studies*, 24: 11-32, 1956.

Little, L. M. D.: *A Critique of Welfare Economics*, 2d ed., The Clarendon Press, Oxford, 1957.

Misban, E. J.: *Welfare Economics*, Random House, Inc., New York, 1964.

Quirk, J. and R. Saposnik: *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics*, McGraw-Hill Books Company, New York, 1968.

Samuelson, P. A.: *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge,

MA, 1947.

_____: "The Pure Theory of Public Expenditure," *Review of Economics and Statistics*, 36: 387-390, 1954.

_____: "Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditure, "*Review of Economics and Statistics*, 37: 350-356, 1955.

Silberberg, E.: "Duality and the Many Consumers' Surpluses," *American Economic Review*, 62: 942-956, December 1972.

第 20 章　在时间上的资源配置：最优控制理论

20.1　动态的含义

比较静态理论着重于决策者面对的参数(约束)变化时选择变量的瞬时变化率。在很多情形中(可能是大多数情形)，通过归纳有限区间内的这些瞬时变化规律，可以为陈述可证伪的假设提供一个可以接受的基础。即使严格地讲，补偿价格变化的需求定律的数学推导是关于单一价格和收入向量的需求函数，附加的假设(基本的曲率性质在一定区间内保持不变)仍然可以将需求定律表示为有用的经验形式。

但在一些问题中，仅对选择变量作瞬时变化的描述是不够的。在资本理论中，这个问题最为明显。理论中最重要的数量——资本——通常是耐用的，而决策中很关心的是不同时间提供的不断变化的服务流水平。而且，大家关注的正是在不同时间上资源利用率的变化，而不仅是确定最初的变化方向。这样的决策本质上是动态的，尽管决策是现在做出的，但选择变量在未来的整个轨迹是变化的。动态模型的根本性质是，现在做出的决策将影响未来的决策。动态分析最重要的应用是在自然资源利用领域方面。如何有效利用资源(长期财富最大化)，如过度开采可能会耗尽的渔业资源，就是其中一个典型的例子。我们在讨论该类问题时，渔业资源问题有助于清楚地说明要点，我们就用它作为在时间维度上资源利用的原型。

在第 12 章，我们简要分析了费歇尔投资问题：最大化某种资源(比如树林)的现值。假定增长函数为 $g(t)$，t 代表时间。目标函数是 $P=g(t)e^{-rt}$。问题在于资源还应当增长多久。P 对 t 的最大化，可得到一阶条件 $r=g'/g$。树一直让它长着，直到每个储量价值的增长低于资本的其他可选价值(由利率 r 给出)。尽管这是个“在时间维度上”的最大化问题，它并非真正的动态问题。其中只有一个要做的决策，而且那个决策和其他要在将来做出的选择(事实上并没有)间也无联系。

甚至重复种植(所谓的 Faustmann 解)问题，即添加了附加的机会成本，通过再种植重复利用土地，本质上也是一个静态的问题。但是，该问题的解答却启发了解决动态问题的一般模式。在最初的种植后，价值为 $g(t)e^{-rt}$，“最优”的政策是重复早先的决策，这样，目标函数变为：

$$p=g(t)e^{-rt}+pe^{-rt} \quad 或 \quad p=\frac{g(t)e^{-rt}}{1-e^{-rt}}$$

求解财富最大化的种植时间，得到的是比当种植后土地的机会成本为 0(就像 Fisher 最初的

模型中的那样)时短的成长期。略加推广可知,使今天某个收入流(可能是无限期的)的价值(在这个例子中是财富)最大化的政策,必须满足在第一次种植后仍能使其后的财富最大。如果现在忽略这一点,那么,不论第一次及后续的种植点的确切位置在哪里,整个路径都不可能"最优"(该列中财富最大化),除非种植后仍然是最优的,否则,从首次行动后往前的整个决策可以得到改进,只要简单地把首次种植后的旧轨迹化为新轨迹。这个推理最早是数学家 Richard Bellman 在 20 世纪 50 年代提出的,也即所谓的最优化原理。这一原理在过去的数十年里广泛地应用于分析决策互相联系的问题,即某一时期的决策会影响将来某个相关变量的水平。在那个例子中,简单地复制过去的决策并不是最优的。每次决策都会对未来产生"外部性"。只有这样,问题才真正是动态的。

为了更具体的说明这些问题,假设一个湖,由私人拥有,初始渔业储量为 x_0。假设湖泊的价值就是其中鱼储量的价值。通常,随着不断的捕捞,鱼储量规模会不断变化,对应资源的价值也会改变。而且,湖中鱼的数量愈多,愈容易捕到鱼。因此,现在的捕捞决定还会影响未来捕鱼的边际成本,从而影响资源的现值。因为整体资源的现价就是其所有未来收益减去成本的资本化价值。"今天"所作的决策影响"明天"捕鱼的成本,这个决策将反映在资源的现值中。如果一个所有者不考虑现在所作决策的未来成本,那他在利用资源时就不可能做到财富最大化。这个情形类似于到相邻农场破坏庄稼的牛的例子(科斯提出的),选择增加牛的数量而不考虑对农场土地造成的损失成本,将导致对所有资源进行配置的价值(同时考虑农场和牛的产出)小于考虑"外部"成本时的价值。此时,外部成本就是那些可能在未来强加于同一所有者身上的成本,像现在一样。

让我们用变量 $x(t)$ 表示在任意时刻 t 湖中的鱼储量,初值 $x_0=x(t_0)$。捕鱼的力度为 $u(t)$,将由资源的所有者选择。变量 $u(t)$ 称为控制变量,它是所作决策的轨迹(该例中即为捕鱼的决策)。简化地假定鱼在市场上出售的价格为 p,并且从现在到将来都为常数。捕鱼的数量依赖于鱼的存量以及投入的劳动和其他要素。我们假设一个很好定义的且具有通常特性的成本函数 $c=(lx,u,w)$,其中 w 为要素价格向量。现在假定一个有限的决策区间以便湖的所有者可以在 t_0 和 t_1 之间最大化鱼的价值。

最大化资源(财富)现值的假设可以表示为:

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} [pu(t) - c(u(t),x(t),w)]e^{-rt}\,dt \tag{20-1a}$$

但这个模型仍是不完全的,因为还未确定未来的鱼储量对现阶段捕捉力度的依赖关系。因为 $x(t)$ 为任意时刻的鱼储量,它的导数 $x'(t)$ 代表 t 时刻存量的增减率。通常,鱼储量的变化率依赖于存量的生物增长率 $G(t)$ 和捕获率:

$$x'(t)=G(x(t))-u(t) \tag{20-1b}$$

而且还必须设定对控制变量的限制,即 $u(t)\geqslant 0$。我们通常设 $u(t)$ 必须属于某个可控制集合 U,最后还要给定端点条件,即资本的初始存量(该例中为最初的鱼储量),$x(t_0)=$

x_0，可能还要有终值条件，$x(t_1)=x_1$。

等式(20-1b)确定了这个模型及类似模型的动态过程。它被称为状态方程；$x(t)$是状态变量，$u(t)$称为控制变量。它类似于静态理论中的决策变量，这是决策制定者能选择或控制的变量(即捕捉率，在新资本上的投资率，或影响某种资源储量规模的任何其他流量)。状态变量 $x(t)$代表了 t 时刻某种资源储量的规模。当然，t_1 时刻的储量依赖于初始时刻的储量以及决策路径，即捕捞率 $u(t)$，$t\leqslant t_1$。(我们通常认为 u 的选择会影响 x 的水平，尽管基本上来讲，假定了函数合适的可逆性，选择在每个时刻的存量 x，然后推断必须获得这样存量的流量 u，这是可能的。)等式(20-1)，加上端点条件及某些特定的控制集 U，是动态最优化中的典型问题。

控制理论问题的一般形式是：

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} f(x(t),u(t),t,)\mathrm{d}t \tag{20-2a}$$

使得：

$$x'(t)=g(x(t),u(t),t) \tag{20-2b}$$

端点条件：

$$x(t_0)=x_0 \quad x(t_1)=x_1 \quad (\text{或 } x(t_1)\text{没有限制})$$

以及某个给定的控制集 $U(t)\in U$。时间区段$(t_0,\ t_1)$称为计划期，在许多重要问题中，$t_1\to+\infty$，故计划期是无限的。端点条件是变化的，通常，状态变量的初始存量是固定的，尽管最终的存量可能不是这样的。而且，还有可能存在对这些变量的限制(如非负性)及对控制的不等式约束。我们将不讨论这些更复杂的情况。

上述模型本质上不同于传统的比较静态分析问题。在所谓的静态理论中，最大化行为包括寻找独立变量的值，该值能使具有特定弯曲性质的函数最大化。尽管人们有时候可以得到由于约束条件变化所引起的选择变量变化的方向，但静态模型的经验特性并不包括对那些变量在时间上的变化率的分析。在动态模型中，问题的"解"不仅包括找到某一函数的最大值，而且还要找到一个真实函数，该函数反映了经济变量取值的时间轨迹，从而使设定在某个时间区间上的某个函数能够最大化(或最小化)。基于这个原因，(20-2a)中的被积函数 f 常常被称为泛函，即函数 $x(t)$和 $u(t)$的函数。

简要历史[1]

寻找能使某个积分最小或最大的函数的数学问题最早是 Johann Bernoulli 在 1696 年提出的。Bernoulli 向他的同事(特别是他的长兄 Jacob，Bernoulli 曾公开嘲笑他是不够格和没有竞争力的)挑战，要找出可以使小珠沿着线表面的两点间(非垂直排列的)移动最快的无摩擦金属线的形状。数学家们很快意识到这个问题的特别之处，并做出了解答。Bernoulli

1　引自 Richard Courant and Herbert Robbins, *What is Mathematics*, Oxford University Press, New York, 1941.

的解答是针对这个问题的，几乎没有可推广的地方。（得到的形状是逆转的“旋轮线”，即当硬币在平面上滚动时，由硬币边缘上的一点生成的轨迹。）第一个比较系统的解答是欧拉和拉格朗日在18世纪早期推导出来，他们为解决这些问题给出了一般化的微分方程。下面将对此作一些简单的讨论，这类数学的最初形式称为变分法。

20世纪50年代，苏联的L. S. Pontryagin和同事以及在美国的Richard Bellman等人将理论进行了推广和一般化。Pontryagin的工作是从物理科学中的问题引起的。Bellman的方向是在经济管理方面。经典的变分法可以看成是控制理论的一个特殊情形。但是，这些老技术对于某些问题仍然是最简单的，尽管它们在经济理论中常常是很难解释的。

20.2 问题的求解

我们将考察Bellman最优原理背后的原因，给出控制问题的一个启发性解答。从概念上来说，“决窍”是把整个时间段分成两个区间：“现在”，仅能持续一会儿（或某个很短的时间），即从某个 t 至 $t+\Delta t$，$\Delta t>0$；“将来”，由剩下的计划区间组成，从 $t+\Delta t$ 至 t_1。我们将像前面所描述的那样，从使湖中鱼的现值最大化方面解释控制问题。(20-2)中的被积函数 $f(x(t),u(t),t)$ 代表了捕捞率为 $u(t)$ 时的即时净收益。当做出一个捕鱼的决策时，马上就产生了数量 $f\Delta t$ 的净收益流。在这个短时间内，鱼储量的变化很少。如果湖中的鱼的产权公有，那就会像静态框架中那样，人们会为了使短期利润最大而使 $\partial f/\partial u=0$，（通常这由一些诸如 $p=MC$ 的一阶条件组成。）在这些条件下，捕鱼者将没有动机把他们现在的行为对未来的影响，也即对可获得的鱼储量和同时对捕捞边际成本的影响放在考虑范围之中。在个人没有对未来鱼储量的所有关系时，削减现时的利润以获得原则上更多的未来收益是没有任何个人好处的，因为这些未来的收益很可能会被别人获得。

但是随着捕捞的进行，鱼的储量和存量所有权的价值开始发生了变化。在竞争市场上，假定湖中的鱼仅是整个市场中可以忽略的一部分，那么任何时候湖中鱼储量的价值将是 $(p-MC)x(t)$。为方便记，设捕鱼的边际成本总为常数。即使不参考市场，也存在一个鱼储量的估计价值，它由储量 x 和鱼的净边际价值的乘积给出。鱼的净边际价值就相当于在湖中多投入一尾鱼后的储量价值的增加。就像由生物增长函数和捕捞率确定的一样，这个储量价值现在的价值可能对未来储量有个复杂的长期影响。

首先，不考虑控制问题(20-2)是如何确切求解的，而只是假定确实存在一个有限的内部解 $(u^*(t),x^*(t))$，该值代表了“最优”的控制变量（例子中的捕捞率）和状态变量（鱼储量）在时间上的轨迹。尽管我们在记号中有所简化，x^* 和 u^* 实际上是依赖于参数 x_0,t_0 等等的。把目标泛函的价值记为 $V(x_0,t_0)$，即：

$$V(x_0,t_0)\equiv\int_{t_0}^{t_1}f(x^*(t),u^*(t),t)\mathrm{d}t \tag{20-3}$$

函数 $V(x_0,t_0)$ 类似于比较静态中的间接目标函数，它被称为最优价值函数。尽管(20-2)需要我们找到一个能使积分最大的真实路径或函数，但一旦找到那个函数，那个积分就会成为普通模型中一些参数的最大值函数(我们省掉了 t，因为它与讨论的关系不十分密切)。鱼的最初储量增加时，其边际价值是 $\partial V(x_0,t_0)/\partial x_0$。更一般的，$V_x(x(t),t)$ 代表了 t 时外生状态变量 x 的增加带来的 t 时资源的边际价值，而值 $(x(t),u(t))$ 的最优路径也从那时候起一直推进，直到计划期结束。

给定 x_0，处于初始时间 t_0 和终点时间 t_1 之间的任何时刻 t 上存在储量的边际价值。记这个估计价值为 $\lambda(t)=V_x(x^*(t),t)$。储量的边际价值 $\lambda(t)$ 通常被称为主变量或伴随变量。因捕捞引起的鱼储量价值的变化是 $\mathrm{d}[\lambda(t)x(t)]/\mathrm{d}t=\lambda x'+x\lambda'$。以某个比率 $u(t)$ 捕捞的真正净收益是现在收益 $f(x,u,t)$ 和因现在采取行动引起的储量最大价值的变化的总和。只要沿着最优路径 $(u^*(t),x^*(t))$ 使真正(现在加未来)的边际净收益为 0，便可以得到最优路径(例子中指财富最大化)。这样，我们可以像所要求的那样描述控制问题答案的特征，在每一时刻 t，$t_0\leqslant t\leqslant t_1$：

$$\max_{u,x} \quad f(x,u,t)+\lambda x'+x\lambda'$$

利用等式(20-2b)，这可变成：

$$\max_{u,x} \quad f(x,u,t)+\lambda g(x,u,t)+x\lambda'$$

这里，我们忽略了对 t 的依赖，因为我们尚未找到函数 $(u^*(t),x^*(t))$ 并将它们表述成 t 的函数。对控制 u 和状态变量 x 分别微分得到：

$$f_u+\lambda g_u=0 \tag{20-4}$$

$$f_x+\lambda g_x+\lambda'=0 \tag{20-5}$$

等式(20-4)称为最大化原理，(20-5)称为主方程或伴随方程，这两个条件加上状态方程：

$$x'=g(x,u,t) \tag{20-6}$$

是整个计划期内控制和状态变量 $(u^*(t),x^*(t))$ 为最优路径的必要条件。同时确定的还有储量边际价值的路径 $\lambda(t)$。

但这些方程并不可以应用普通的代数或比较静态方法求解 x，u 和 λ。伴随方程(20-5)和状态方程是微分方程，它们通常都是不容易求解的。

等式(20-4)和(20-5)通常表述成 $H=f+\lambda g$，称为哈密尔顿方程。最大化原理即 $\partial H/\partial u=0$(假定问题存在内点解)；伴随方程是 $\partial H/\partial x=-\lambda'$。在最初的问题中，给定储量的初始值 x_0，选择 $u(t)$ 来确定 $x'(t)$，而后通过状态方程确定 $x(t)$。这样，事实上仅有一个“独立变量”u。但是，新变量 $\lambda(t)$ 的引入增加了新的自由度。就如同静态的拉格朗日分析一样，我们“假装”它比真实的问题多一个维度。

利用最大化原理(20-4)(它不是微分方程)，以及隐函数定理，可以解出 u：$u=k(x,\lambda,$

t)。再把它代入伴随方程和状态方程可得到两个一阶微分方程：

$$x' = g(x, k(x,\lambda,t), t) \tag{20-7}$$

$$\lambda' = -f_x(x, k(x,\lambda,t), t) - \lambda g_x(x, k(x,\lambda,t), t) \tag{20-8}$$

解这些微分方程，(并利用有关的端点条件以定出积分中的常数项)就得到了 x 和 λ 的最优路径，代回 $k(x,\lambda,t)$ 就可以求出控制变量 u 的最优路径。

更正式一些，考虑任一点 (x_0, t_0)，不必是初始点，只要沿着最优路径即可。目标积分的最大值(或最小值，但这里我们以最大值形式进行)为某一函数 $V(x_0, t_0)$，当我们沿某条特定路径 $(x(t), u(t))$ 前进一小段时间 Δt，马上就实现了"净收益" $f(x,u,t)\Delta t$。在那一点上，函数 V 依赖于新的坐标 $(x_0+\Delta x, t_0+\Delta t)$ 与 t_1(计划期)之间所选择的路径。因为 $V(x_0, t_0)$ 是选择最优路径时目标积分的值，故对随意的初始选择，有：

$$V(x_0, t_0) \geqslant f(x,u,t)\Delta t + V(x_0+\Delta x, t_0+\Delta t) \tag{20-9}$$

利用中值定理(或泰勒展开)对最后一项近似有：

$$V(x_0+\Delta x, t_0+\Delta t) = V(x_0, t_0) + V_x\Delta x + V_t\Delta t$$

把该表达式代入(20-9)的右边并消去 $V(x_0, t_0)$ 得到：

$$f(x,u,t)\Delta t + V_x\Delta x + V_x\Delta x + V_t\Delta t \leqslant 0$$

两边除以 Δt 并取极限，并利用状态方程 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x' = g(x,u,t)$ 有：

$$f(x,u,t) + V_x(x,t)g(x,u,t) + V_t(x,t) \leqslant 0 \tag{20-10}$$

沿着最优路径，(20-10)是一个等式；那个形式的等式即所谓的哈密尔顿—雅可比方程：

$$f(x^*, u^*, t) + V_x(x^*, t)g(x^*, u^*, t) + V_t(x^*, t) = 0 \tag{20-11}$$

将 $\lambda(t) = V_x(x,t)$ 代入(20-10)得到：

$$f(x,u,t) + \lambda(t)g(x,u,t) + V_t(x,t) \leqslant 0$$

同样，沿着最优路径 $(x^*(t), U^*(t))$，这是等式：

$$f(x^*, u^*, t) + \lambda^*(t)g(x^*, u^*, t) + V_t(x,t) = 0 \tag{20-12}$$

最后一项 V_t 是目标泛函对时间的变化率，它仅仅是 x 和 t 的函数，它与 u 是独立的。因此，给定 x 时的最优路径只要 $H = f(x,u,t) + \lambda(t)g(x,u,t)$ 沿着最优路径对 u 最大化，这就是最大化条件(20-4)。

伴随方程也可以从(20-11)导出。当代入最优路径时，这一关系是时间和系统参数的恒等式，特别是 x_0 的一个恒等式，对 x_0 求导(省掉 * 符号)有：

$$f_x\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + f_u\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right) + V_x(x,t)\left[g_x\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + g_u\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)\right] + gV_{xx}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + V_{tx}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) \equiv 0$$

整理有：

$$\left[f_x + V_x(x,t)g_x + V_{xx}g + V_{tx}\right]\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + \left[f_u + V_x(x,t)g_u\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right) \equiv 0 \tag{20-13}$$

但是，由最大化条件(20-4)及 $\lambda(t) = V_x(x,t)$ 可知，最后一个方括号中的项为 0。而且，$V_x(x,t)$ 对 t 微分有：

$$\lambda'(t)=V_{xx}x'+V_{xt}=V_{xx}g+V_{tx}$$

上式是第一个方括号中的后两项。假定$\partial x/\partial x_0\neq 0$(资本存量不是足够丰富的，即拥有越多资本将影响以后的存量水平)，式(20-12)隐含了伴随方程 $f_x+\lambda g_x+\lambda'=0$。

由方程(20-12)可得到哈密尔顿函数的一种解释，它是前两项之和。最后一项 V_t，表明了保持储量 x 不变时，这一小段时间后目标积分最大值的改变量。因此，哈密尔顿函数等于推迟一会儿开始过程的(负的)净影响。

例　考虑最优控制问题

最大化　　$$\int_0^1\left(-x-\frac{1}{2}\alpha u^2\right)\mathrm{d}u$$

使得：　　$$x'=u,x(0)=x_0,x(1)=x_1$$

$\alpha>0$，是问题的参数。问题的哈密尔顿函数是：

$$H(x,u,\lambda)=-x-\frac{1}{2}\alpha u^2+\lambda u$$

假定存在内解，必要条件是：

$$\frac{\partial H}{\partial u}=-\alpha u+\lambda=0\quad\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=-\alpha\leqslant 0$$

由假设 $\alpha>0$，故$\partial^2 H/\partial u^2<0$。解$\partial H/\partial u=0$，得 $u=\lambda/\alpha$。其他的必要条件是状态和伴随方程：

$$x'=\frac{\partial H}{\partial\lambda}=u\quad\lambda'=-\frac{\partial H}{\partial x}=1$$

利用 $u=\lambda/\alpha$ 得：

$$x'=\lambda/\alpha\quad x(0)=x_0\quad x(1)=x_1\quad\lambda'=1$$

对 $\lambda'=1$ 直接积分有 $\lambda^*(t)=t+c_1$，其中 c_1 是未知的积分常数。把 $\lambda^*(t)$代入 $x'=\lambda/\alpha$ 得 $x'=(t+c_1)/\alpha$，积分得 $x^*(t)=t^2/2\alpha+c_1t/\alpha+c_2$，其中 c_2 是另一个积分常数。c_1 和 c_2 可利用初值和终值条件 $x(0)=x_0$ 和 $x(1)=x_1$ 分别加以确定。利用 $x(0)=x_0$，在 $x^*(t)$中得 $x^*(0)=c_2=x_0$，现在利用 $x(1)=x_1$ 得到 c_1 的取值：$x^*(1)=1/2\alpha+c_1/\alpha+x_0=x_1$，故 $c_1=\alpha(x_1-x_0)-\frac{1}{2}$。把这些积分常数代入$(x^*,\lambda^*)$便得到了最优路径，然后把 λ^* 代入 $u=\lambda/\alpha$ 可给出控制的最优路径。最后给出：

$$x^*(t;\alpha,x_0,x_1)=\frac{t^2}{2\alpha}+\left[(x_1-x_0)-\frac{1}{2\alpha}\right]t+x_0$$

$$\lambda^*(t;\alpha,x_0,x_1)=t+\alpha(x_1-x_0)-\frac{1}{2}$$

$$u^*(t;\alpha,x_0,x_1)=\frac{t}{\alpha}+(x_1-x_0)-\frac{1}{2\alpha}$$

最优化条件(20-4)、(20-5)也可从离散时间的最优控制问题方面进行理解：

最大化 $$V=\sum_{t=0}^{T} f(x_t,u(t),t)$$

使得： $$x_{t+1}-x_t=g(x_t,u_t,t),\quad t=0,1,\cdots,T$$

在这种形式中，$x_{t+1}-x_t$ 代替了状态方程(20-2b)中的 $x'(t)$，连加符号代替了目标函数中的积分号。该问题的选择变量是 $x_1,\cdots,x_T$（x_0,x_{T+1} 是给定的）和 $u_0,\cdots,u_T$。给 $T+1$ 个约束的每一个约束添加一个乘子 λ_t 可得到拉格朗日函数：

$$\mathscr{L}=\sum_{t=0}^{T}[f(x_t,u_t,t)+\lambda_t(g(x_t,u_t,t)-(x_{t-1}-x_t))]$$

最大化的一阶条件是：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_1}=f_u(x_t,u_t,t)+\lambda_t g_u(x_t,u_t,t)=0\quad t=0,\cdots,T \tag{20-14}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1}=f_x(x_t,u_t,t)+\lambda_t g_x(x_t,u_t,t)+\lambda_t-\lambda_{t-1}=0\quad t=0,\cdots,T \tag{20-15}$$

显然(20-14)等价于连续时间最优控制问题的最大化原则(20-4)。同样，(20-15)也是伴随方程(20-5)的离散形式，其中 $\lambda_t-\lambda_{t-1}$ 代替了 $\lambda'(t)$。

变分法

确定最优路径问题的最初形式是找一个函数 $x(t)$ 来求解下面的问题：

最大化 $$\int_0^1 f(x,x',t)\mathrm{d}t$$

这实际上是控制问题的一种特殊形式，其中 $x'=g(x,u,t)=u$。即，存量在时间上的变化量就是控制变量，而不是可能包含存量自身及时间的一个一般函数。把状态方程 $u=x'$ 代入(20-2a)中的积分函数便可得到特定形式的控制问题表述。

这种情况下，最大(小)化的必要条件如下。最大化原理是：

$$H_u=H_{x'}=f_{x'}+\lambda g_{x'}=0$$

但因 $g_{x'}=g_u\equiv 1$，故这个条件成了：

$$f_{x'}=-\lambda \tag{20-16}$$

伴随方程是：

$$H_x=f_x+\lambda g_x=f_x=-\lambda' \tag{20-17}$$

因为 $g_x\equiv 0$。又，因为(20-17)左边是(20-16)右边对 t 的导数，这些等式可组合成：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{x'}=\frac{\partial f}{\partial x} \tag{20-18}$$

展开可得到等价形式的表述：

$$f_x=f_{x't}+f_{x'x}x'+f_{x'x'}x'' \tag{20-18'}$$

式(20-18)即定义最优路径必要条件的经典的欧拉--拉格朗日关系式。应用(20-18)(除了

一些特殊情形）可导出一个二阶微分方程，而控制理论的必要条件得出的是联立的一阶微分方程组(20-7)和(20-8)。很难说某种方法一定比另一种方法更具有计算上的优势，但相比之下，欧拉－拉格朗日方程是较难解释的，而控制理论方程通常能为经济模型的动态特征提供有用的描述。

欧拉－拉格朗日方程可能不容易求解。但在一些特殊情形中，遵循某些步骤还是有帮助的。[2] 特别地，如果目标泛函仅是 x 与 x' 的函数，即明显不包括 t，则欧拉—拉格朗日方程是：

$$f_x = \frac{\mathrm{d}f_{x'}(x,x')}{\mathrm{d}t} = f_{x'x}x' + f_{x'x'}x''$$

或

$$f_x - f_{x't}x' - f_{x'x'}x'' = 0$$

如所预计的，这是个二阶微分方程。不过可以证明 x' 是该表达式的积分因子，两边乘以 x' 可得：

$$x'(f_x - f_{x't}x' - f_{x'x'}x'') = \frac{\mathrm{d}(f - x'f_{x'})}{\mathrm{d}t} = 0$$

这样，该情形中欧拉—拉格朗日方程隐含了：

$$f - x'f_{x'} = k$$

其中 k 是积分常数。这个方程比起原形式可能（但并不总是）容易求解。

例　下面将证明每个人都知道的很直观的结果：平面上两点间的直线距离最短。这两点可以记为 (t_0, x_0) 和 (t_1, x_1)。回忆起毕达哥拉斯定理，从某点开始并在 t 方向移动 $\mathrm{d}t$，在 x 方向移动 $\mathrm{d}x$，走过的距离长度是斜边长：

$$\mathrm{d}s = [(\mathrm{d}t)^2 + (\mathrm{d}t)^2]^{1/2} = [1 + x'(t)^2]^{1/2}\mathrm{d}t$$

我们试图使这些微小部分的总和最小，或：

最小化

$$\int_{t_0}^{t_1} [1 + x'(t)^2]^{1/2}\mathrm{d}t$$

这是个特殊的例子：被积函数仅依赖于 x'。对(20-18′)式应用欧拉方程得：

$$f_{x'x'}x'' = 0$$

这样，或者 $x'' = 0$，或者 $f_{x'x'} = 0$。这里 $f = [1 + x'(t)^2]^{1/2}$；故 $f_{x'x'} \neq 0$。所以 $x'' = 0$。这个简单的微分方程有解 $x = c_1 t + c_2$，这就证明了结论。利用端点的坐标可求得积分常数为：

$$c_1 = \frac{(x_1 - x_0)}{(t_1 - t_0)} \quad c_2 = \frac{(x_0 t_1 - x_1 t_0)}{(t_1 - t_0)}$$

为了进一步理解欧拉—拉格朗日条件，考虑变分问题的离散形式：

最大化　　$V = \sum_{t=0}^{T} f(x_t, x_{t-1} - x_t, t)$

2　见 Kamien, M. I., and N. L. Schwartz: *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control In Economics and Management*, 2d ed., Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York, 1991. p. 1.5。

在这个离散时间的形式中，函数 $f(x,x',t)$ 的变量 x' 用变量 $x_{t+1}-x_t$ 代替，而积分则由连加号替代。这个问题的选择变量为 $x_1,\cdots,x_T$（x_0 和 x_{T+1} 是给定的），而最大化的一阶必要条件是通常的简单一阶条件：

$$\frac{\partial V}{\partial x_t}=0 \quad t=1,\cdots,T$$

变量 x_t 仅仅出现在目标函数中时期为 $t-1$ 和 t 的项 $f(x_{t-1},x_t-x_{t-1},t-1)$ 和 $f(x_t,x_{t+1}-x_t,t)$ 中。所以，x_t 的一阶条件是：

$$f_2(x_{t-1},x_t-x_{t-1},t-1)+f_1(x_t,x_{t+1}-x_t,t)-f_2(x_t,x_{t+1}-x_t,t)=0$$

其中 f_1，f_2 代表对第一、第二个变量的偏导数，这一等式可改写为：

$$f_2(x_t,x_{t+1}-x_t,t)-f_2(x_{t-1},x_t-x_{t-1},t-1)=f_1(x_t,x_{t+1}-x_t,t) \qquad (20\text{-}19)$$

方程的左边是从 $t-1$ 期到 t 期 f_2 的价值变化，这是 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)f_{x'}$ 在离散情形的对应表达式。方程右边很简单，是 $\partial f/\partial x$。(20-19)就是离散时间的(20-18)。

端点(横截面)条件

直到现在，对于最优轨迹的初值和终值假设对结果的影响，我们尚不十分清楚。端点条件在比较静态分析中通常不是个问题，因为解一般都假设为内点。在动态分析中，路径可能严重依赖于对初值和终值的假定。最终控制问题的分析包括要解一个二阶微分方程(或等价的两个联立一阶方程)。不管哪种情形，都会有两个任意的积分常数出现。为估计这些参数，必须做出关于最优路径的附加假设。

考虑捕鱼问题。如果把模型描述成 t_0 和有限时间 t_1 之间的最大化问题，那么模型实质上是假定在 t_1 之后便"没有时间"了；即实际上假定世界在 t_1 时结束。(而一类略微一般的模型是给最大化问题添加了残值 $S[x(t_1),t_1]$。)如果只是简单地假设鱼储量的初值 $x(t_0)=x_0$，终值 $x(t_1)=x_1$，那就没有进一步的问题；这些值可以用来估计确定最优路径微分方程的解中的任意常数。但如果在 t_1 时存在某个正值的鱼储量，它必然是没有价值的。所以必须有，若 $x(t_1)>0$，则 $\lambda(t_1)=0$。(有正的残值时 $\lambda(t_1)=\partial S/\partial x_1$)。但在许多情况下，鱼储量的终值事先并未确定；它要由最大化假设来确定。同样的推理说明，因为就目标函数 f 而言，附加的储量价值为 0，故若 $x(t_1)$ 是"自由"(即没有事先确定)的，则有 $\lambda(t_1)=0$。这个条件即为所知的横截面条件；它们是估计最优控制问题中的积分常数所需的附加条件。对于最大化问题而言，如果 $x(t_1)\geqslant 0$ 是终止时刻储量的约束，横截面条件可以陈述为：

$$\lambda(t_1)\geqslant 0 \qquad x(t_1)\geqslant 0 \qquad \lambda(t_1)x(t_1)=0 \qquad (20\text{-}20)$$

而且，在某些问题中，最终时刻 t_1 本身也是自由的。这时捕鱼会在继续行动时没有价值的时刻即不能增加目标积分 $V(x,t)$ 价值的时刻停止。由哈密尔顿—雅可比方程(20-12)，在 t_1 时有：

$$-V_t=f(x^*,u^*,t)+\lambda^*(t)g(x^*,u^*,t)=0 \qquad (20\text{-}21)$$

若 t_1 自由，对于更复杂的模型，即那些包括不等式约束及残值的，这些条件必须作一些修正。这些修正一般类似于静态最优化问题中的库恩—塔克条件。[3]

自治问题

在一般的控制问题框架中，变量 t 可以直接进入目标函数和状态方程。一般的模型设定为：

$$\text{最大化} \qquad \int_{t_0}^{t_1} f(x,u,t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{满足约束} \qquad x'=g(x,u,t) \quad x(t_0)=x_0$$

其中 t 直接出现在 f，g 中，表明它们与时间是有关系的，即由行动 $u(t)$ 产生的成本和收益不仅依赖于资源的提取和储量水平或资本的利用水平（即依赖于控制和状态变量的水平），也依赖于行动发生的确切时间。在许多（大多数，可能是）经济模型中，这种对日期的依赖仅仅体现于用以将未来的收入折现到现在 t_0 的项 e^{-rt} 中。

在目标和状态方程中不出现时间 t 的模型即：

$$\text{最大化} \qquad \int_{t_0}^{t_1} f(x,u)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{满足约束} \qquad x'=g(x,u) \qquad x(t_0)=x_0 \tag{20-22}$$

称为自治的。在这种情形中，最大化条件是 $H_u=f_u+\lambda g_u=0$，状态方程是 $x'=g(x,u)$，伴随方程为 $f_x+\lambda g_x+\lambda'=0$，导出的 x' 和 λ' 的微分方程并不直接包含 t。这些方程比直接出现 t 的方程要易于解决。因此，为了实际操作的需要，这种修正是重要的。

时间直接进入模型但只是出现在折现因子 e^{-rt} 上，模型一般也认为是自治的。因为这样的时间依赖性很容易消除。也就是说，考虑形式为：

$$\text{最大化} \qquad \int_{t_0}^{t_1} f(x,u)\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{满足约束} \qquad x'=g(x,u) \qquad x(t_0)=x_0 \tag{20-23}$$

的模型。用变量 $s=\mathrm{e}^{-rt}$ 替代时间 t，并对 s 重新定义初始和结束时间，问题立即便成了自治（自控）的了。

在形式为(20-23)的模型中，伴随变量 $\lambda(t)$ 是 t 时资本增加的边际价值的现值（即 t_0 时的）。有时候，用“现值乘子”$m(t)$ 求解这些问题会更方便，其中：

$$\mathrm{e}^{-rt}m(t)=\lambda(t) \tag{20-24}$$

最优化的必要条件是：

$$H_u=\mathrm{e}^{-rt}f_u+\lambda g_u=0 \tag{20-25}$$

$$H_x=\mathrm{e}^{-rt}f_x+\lambda g_x=-\lambda' \tag{20-26}$$

3　见 Kamien and Schwartz，同注释 2。

但若利用(20-24)则有：

$$e^{-rt}m'(t)-re^{-rt}m(t)=\lambda'(t)$$

现在如果我们将哈密尔顿方程写成现值的形式，则有：

$$\mathscr{H}=e^{rt}H=f+e^{rt}\lambda g=f+mg$$

一阶条件等价于：

$$\mathscr{H}_u=f_u+mg_u=0 \tag{20-27}$$

及

$$\mathscr{H}_x=f_x+mg_x=rm-m'(t) \tag{20-28}$$

在消去每一项的 e^{-rt} 之后，等式(20-27)与(20-28)构成自控微分方程组。即，独立变量 t 没有直接作为一个分离的变量进入。这种形式的系统更容易求解。

充分条件

欧拉—拉格朗日方程，或者最优理论的变体(20-4)和(20-5)，加上状态方程(20-6)和横截面条件是最大化或最小化问题的一阶必要条件。像静态理论一样，也有类似的如下充分条件：

若 $f(x,u,t)$ 和 $g(x,u,t)$ 对所有的 t，在 x 和 u 上是处处凹的，$g(x,u,t)$ 在 x 或 u 上非线性，且 $\lambda(t)\geqslant 0$，一阶必要条件满足，则解为最大值。

同样，若 $f(x,u,t)$ 和 $g(x,u,t)$ 处处凸，解为最小值。

在这些条件下，哈密尔顿函数将是凹的(对于最小化问题则为凸)。下面的表达式：

$$H+\lambda' x=f(x,u,t)+\lambda g(x,u,t)+\lambda' x$$

沿着最优路径在每一点上都是最大化(最小化)的，这些条件从直观上看是可能的。注意，若 $g(x,u,t)$ 在 x,u 上是线性的，那么该表达式的凹性将独立于 g，也因此独立于 $\lambda(t)$ 的符号。对于经典的变分问题，即：

$$\text{最大化} \qquad \int_{t_0}^{t_1} F(x,x',t)\,dt$$

的充分条件是，对于所有 t，被积函数 $F(x,x',t)$ 需在 x 和 x' 上为凹。而对于最小化问题，F 必须对所有 t 在 x 和 x' 上为凸。如果控制变量通过替换可以消去，从而将问题转化为变分问题，则这一条件可应用于控制问题。需要引起充分注意的是，前述的充分条件要求 f 和 g (或 F)的全局凹性(或凸性)；所以，一阶必要条件的解(如果存在的话)是全局最优的。一个稍弱一点的条件，即沿着最优路径上有 $F_{x'x'}\leqslant 0$(最小化问题为 $\geqslant 0$)，即所知的勒让德条件，是一种局部的弯曲性质。可由最大化要求推得它是必要的(注意弱不等号)。像在静态最优化问题中一样，这些条件常常是动态问题中比较静态的基础或比较动态的结果。

20.3 微分方程的解

利用类似比较静态的方法，有时候也可分析出参数变化对最优路径或静止状态值的影

响。但是，为了方便处理和实用，许多模型都简化了假设。许多有趣的控制问题都假定了特殊函数形式的目标方程和状态方程。于是，从最大化条件和伴随方程可以导出特定形式的微分方程，其解是大家所关心的。讲解完微分方程的求解，我们会简要考察一下这些解的性质。

通常，微分方程是难以求解的。一些看起来很简单的方程事实上很难处理。某些标准化的处理过程是有用的，我们会在这里简要地介绍一下。[4] 某些微分方程可通过分离变量求解。要求解 $y'=\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=y/t$，我们可将其改写成：

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

两边积分有：

$$\log y=\log t+\log k$$

为方便计，其中任意的积分常数记为 $\log k$。这样，通解可写成：

$$y(t)=kt$$

如果给定曲线必须过某点 (t_0, y_0)，则积分常数可以估计出来。能用这种方法求解的微分方程是最容易处理的。

现在考虑一阶线性微分方程：

$$y'(t)+b(t)y(t)=c(t) \tag{20-29}$$

这个方程称为是线性的，是因为方程中没有形如 $(y')^2$，yy' 等等的项。所谓方程的解，我们的意思是存在一个函数 $y=s(t)$，当它代入方程时，等式恒成立。关于确定解的性质的基本定理如下。考虑没有右边项的方程(20-29)：

$$y'+b(t)y(t)=0 \tag{20-30}$$

这称为约化方程(当方程右边没有函数时，这样的微分方程也称为是齐次的)。如果解存在，这个方程通常比(20-29)容易求解，当然解中也包括任意的常数。但是，如果可以找到(20-29)的某个特解，(20-29)的通解就是那个特解与约化方程(20-30)的通解的和。

我们首先考察 b，c 为常数而非 t 的函数时的情形。这时方程(20-29)可称为常系数一阶微分方程。此时，方程(20-30)的解总可以通过乘以 e^{bt} 而得到。注意到：

$$\mathrm{e}^{bt}(y'+by)=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{bt}y(t))}{\mathrm{d}t}=0$$

这样，约化方程的通解即为 $\mathrm{e}^{bt}y(t)=K$，其中 K 是任意常数，或者：

$$y(t)=K\mathrm{e}^{-bt}$$

通过试算，(20-29)的一个特解是 $y=c/b$(注意 $y'=0$)。故(20-29)的通解为：

$$y(t)=K\mathrm{e}^{-bt}+\frac{c}{b}$$

将这个表达式代入(20-30)，可以证实这确实是个解。

4　请注意，不要死搬硬套这些步骤，只有通过实践才能获得那种技能。

例 考虑微分方程

$$y'+y=t+1$$

未约化方程的一个特解是 $y=t$；因 $b=1$，故通解为：

$$y=Ke^{-t}+t$$

在更一般的情形中，$b=b(t)$，$c=c(t)$，此时要找到一个特解并非易事。但是，按照类似于常系数情形的方法，约化方程的通解总具有下面的形式：

$$y(t)=Ke^{-\int b(t)dt}$$

再加上(20-29)的一个特解就可以求出通解了。

同样的步骤也可用于求解二阶线性微分方程。不过，计算更为复杂。方程：

$$y''+by'+cy=d \tag{20-31}$$

的通解由整个方程的一个特解加上约化(齐次)方程：

$$y''+by'+cy=0 \tag{20-32}$$

的通解组成。为求解(20-32)，我们用形式为 $y=e^{rt}$ 的解进行"试验"，代入(20-32)得到：

$$e^{rt}(r^2+br+c)=0$$

该方程的解满足二次方程，称为特征方程 $r^2+br+c=0$ 的解。利用公式，方程的根为：

$$r_1,r_2=-\frac{b}{2}\pm\frac{(b^2-4c)^{1/2}}{2} \tag{20-33}$$

还需要分情况考虑：

1. 如果 $b^2-4c>0$，根是实的，且不同；这时(20-32)的解为：

$$y(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t} \tag{20-34}$$

其中 c_1，c_2 为任意的积分常数。注意若两个根都为负数，则 $t\to\infty$ 时，$y(t)\to0$。有这种类型解的控制理论问题会渐近收敛于某个"稳定状态"；如果有一个或两个根是正的，并且常数不为 0，则路径是发散的。

2. 如果 $b^2-4c=0$，两个根是一样的，$r_1=r_2=r$；(20-23)的解于是成为：

$$y(t)=(c_1+c_2t)e^{rt} \tag{20-35}$$

3. 如 $b^2-4c<0$，根为复数，即包含 $i=\sqrt{-1}$。这时解仍具有形式(20-34)，且两个根是不同的。但(20-34)的表述并不方便，因此，我们利用熟知的恒等式：

$$e^{it}=\cos t+i\sin t$$

分别定义特征方程根的实部和虚部，$p=-b/2$，$q=(b^2-4c)^{1/2}/2$，重新将(20-32)的解表述成：

$$y(t)=e^{pt}(c_1\cos(qt)+c_2\sin(qt)) \tag{20-36}$$

其中，c_1，c_2 为任意常数。注意，如果根的实部 p 为负，解 $y(t)$ 将在 0 附近振动，直到当 $t\to\infty$ 时，解也趋于 0。

联立微分方程

控制理论有时候也会导出联立微分方程，通常方程组中一个是关于状态变量 $x(t)$ 的，另一个是关于伴随变量 $\lambda(t)$ 的。它们的阶数一般要低于变分问题欧拉—拉格朗日方程导出的单一微分方程的阶数，但这两者是等价的。

我们仅考察一阶线性的情况

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x(t) + b_1 y(t) + f(t) \\ y' &= a_2 x(t) + b_2 y(t) + g(t) \end{aligned} \tag{20-37}$$

与一个方程的情况一样，(20-37)的解由整个系统的一个特解和约化(齐次)系统：

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x(t) + b_1 y(t) \\ y' &= a_2 x(t) + b_2 y(t) \end{aligned} \tag{20-38}$$

的通解之和组成。我们只考虑齐次系统(20-38)的解。在第一个等式中对 t 微分并把 x' 和 y' 代入(20-38)得到等价的二阶微分方程：

$$x'' - (a_1 + b_2)x' + (a_1 b_2 - b_1 a_2)x = 0 \tag{20-39}$$

这可用前面刚刚讨论过的方法求解。但我们也可以直接从(20-38)入手，并试算形式为，$x(t) = Ae^{rt}$，$y(t) = Be^{rt}$ 的解。代入(20-38)，消去 e^{rt}，得到矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} a_1 - r & b_1 \\ a_2 & b_2 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

这个方程有一个非平凡的解，当且仅当它的行列式为 0 时：

$$\begin{vmatrix} a_1 - r & b_1 \\ a_2 & b_2 - r \end{vmatrix} = 0 \tag{20-40}$$

将(20-40)展开得特征方程：

$$r^2 - (a_1 + b_2)r + (a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0 \tag{20-41}$$

显然这正是与等价的二阶方程(20-39)相关的特征方程。于是便可与以前一样进行求解。令 r_1 和 r_2 为(20-4)的根(解)，若，举例而言，$r_1 \neq r_2$，则齐次联立微分方程(20-38)的解为：

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \\ y(t) &= B_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t} \end{aligned} \tag{20-42}$$

对于自控的无限区间问题，即目标泛函的上限是无限，且时间 t 仅直接进入折现因子的，人们通常关心的是控制问题的解是否收敛于某个稳态路径(一般包括非齐次部分(20-37)的解)。如果根是负的，或复根的实部是负的，那么因 $t \to \infty$ 时 $e^{rt} \to 0$，结果可以保证。如果一个根是负的而另一个根为正，则系统有一个鞍点。比如，如果 $r_1 > 0$，$A_1, B_1 = 0$，则系统的解收敛于一个稳定状态。

20.4 解释和解答

跨期选择

我们已在第 12 章中讨论过跨期选择模型，现在我们考察其连续形式。假设消费者的效用函数为 $U(C(t))$，其中 $C(t)$ 是消费流。类似静态理论，设 $U'>0, U''<0$。个人的收入来自资本存量的收益流 iK，其中 i 是市场利率。而且，个人也可以在任何时候通过出售资本（我们已将其价格标准化为一单位）来消费资本存量。最后，假定消费者是“不耐心的”，即他或她有一个时间偏好比率 ρ，于是，跨期效用最大化的模型可以表述为：

$$\text{最大化} \qquad \int_0^T U(C)e^{-\rho t}\,dt$$

$$\text{满足约束} \qquad K'=iK-C \quad K(0)=K_0 \quad K(T)\geqslant 0$$

状态变量是资本存量；控制变量是消费流 $C(t)$，是消费者可以选择的。状态方程（约束）说明资本存量的变化（正时表示“储蓄”，负时表示“消耗储蓄”）等于收入 iK 和消费 C 之间的差额，当然，我们假定对所有 $t, C(t)>0, K(t)>0$。

哈密尔顿函数是：

$$H=U(C)e^{-\rho t}+\lambda(iK-C)$$

从中可得到最大化条件和伴随方程：

$$H_C=U'(C)e^{-\rho t}-\lambda=0 \tag{20-43}$$

$$H_K=i\lambda=-\lambda' \tag{20-44}$$

注意到，因为假设边际效用递减（$U''<0$），被积函数在 C 上是凹的；约束条件在 C 和 K 上是线性的。这样，哈密尔顿函数在 C 和 K 上也是凹的，保证了一阶方程的解代表的是最大值。

式(20-43)说明在最优消费路径的每一点上，消费边际效用的折现应当等于一单位额外资本的现值（即 $t=0$ 时的价值）。在(20-43)中对 t 求导，有：

$$U''(C)C'e^{-\rho t}-\rho U'(C)e^{-\rho t}=\lambda'$$

利用(20-43)，从(20-44)有 $\lambda'=-i\lambda=-iU'(C)e^{-\rho t}$。在上述等式右边应用这个式子，并消去 $e^{-\rho t}$ 项可有：

$$\frac{-U''C'}{U'}=i-\rho \tag{20-45}$$

(20-45)的左边是个人消费的边际效用对时间的比例变化，代表了任何时候增加消费的边际收益。这样，该等式就说明，沿着最优消费路径，边际收益等于增加消费的边际机会成本——“净”利率，即市场（真实）利率减去时间偏好率。

注意(20-45)对可观测行为的应用。因 $U'>0, U''<0, C'(t)$ 与 $i-\rho$ 有同样的符号。这

样，如果 $i=\rho$，即利率等于时间偏好率，那么像静态模型中一样，消费者会选择常数消费。同样，如果消费的市场机会成本超过了个人的时间偏好率，消费会随着时间增长；反之亦然。如果利率在某点 t 上升，消费者就会相应加速消费流量，从而用更快的速度把消费移向现在。注意(20-44)也是一个简单的线性齐次微分方程，其解为：

$$\lambda(t)=\lambda_0 e^{-it} \tag{20-46}$$

其中 $\lambda_0>0$ 是积分常数。因此，资本的边际价值的现值随时间的增加而下降，其现值 $e^{it}\lambda(t)$ 则保持常数，为 λ_0。将该等式结合(20-43)，有：

$$U'(C(t))=\lambda_0 e^{(\rho-i)t} \tag{20-47}$$

现在考虑在计划期末一定会发生的事情。回想横截面条件(20-20)，那是对终点时资本储量非负限制的结果，要求 $\lambda(T)K(T)=0$。在终点时刻，资本必须耗尽，$K(T)=0$，或者其边际价值必须下降为 0。资本不会完全使用完的惟一原因是，如果它提供的附加消费毫无价值，即如果消费者已经心满意足了，以至于在边际上的收入不再是多多益善。如果像我们所假设的那样，对任意水平的消费都有 $U'(C)>0$，那么一定有 $t=T$ 时 $k(T)=0$。这样，假定总是多多益善，则在计划期末时，资本一定会用完。

通过(20-47)，等式(20-45)描述了模型的解的特征。为了导出消费和资本的真实的使用路径，我们需要假定效用函数的具体函数形式。为说明控制模型的解的特性，我们假设，$U(C)=\log(C)$。此时，(20-45)成为：

$$\frac{C'}{C}=\left(\frac{1}{C}\right)\frac{dC}{dt}=i-\rho$$

分离变量并积分，得：

$$C(t)=C_0 e^{(i-\rho)t} \tag{20-48}$$

式(20-48)便是控制变量 $C(t)$ 的路径。为导出状态变量 K 的路径，回忆状态方程(约束)：

$$K'-iK=-C=-C_0 e^{(i-\rho)t}$$

利用积分因子 e^{-it}，上式可积：

$$e^{-it}(K'-iK)=\frac{d(e^{-it}K)}{dt}=-C_0 e^{-\rho t}$$

两边积分得：

$$e^{-it}K(t)=\left(\frac{C_0}{\rho}\right)e^{-\rho t}+A \tag{20-49}$$

其中 A 为任意的积分常数。$t=0$ 时，$K(0)=K_0$。这样就有：

$$A=K_0-\frac{C_0}{\rho}$$

类似地，利用 $K(T)=0$ 有：

$$0=\left(\frac{C_0}{\rho}\right)e^{-\rho T}+A \quad 或 \quad A=\frac{-C_0}{\rho}e^{-\rho t}$$

这样就有：

$$A=\frac{-K_0 e^{-\rho T}}{1-e^{-\rho T}} \qquad C_0=\frac{\rho K_0}{1-e^{-\rho T}}$$

因此，(20-49)的解为：

$$K(t)=K_0 e^{t}\left[\frac{e^{-\rho t}-e^{-\rho T}}{1-e^{-\rho T}}\right]$$

$$C(t)=\frac{\rho K_0 e^{(\tau-\rho)t}}{1-e^{-\rho T}}$$

收获可更新资源

与前述问题密切相关的另一个问题已经应用于收获可更新资源的问题中，诸如捕鱼等等。[5] 在这个例子中，除了时间区间是无限的，我们假设同样的目标函数。最重要的，我们假设，如果不对资源进行利用，鱼储量会以某个速度增长到最大规模；而当鱼储量超过最大规模时，总的来说鱼死去的数量会超过增长的数量，从而使鱼储量下降到稳态规模。我们将模型表述为：

最大化 $$\int_0^{\infty} U(c)e^{-\rho t}\,dt$$

使得： $$K'=g(K)-c \quad K(0)=K_0 \tag{20-50}$$

其中 K 代表可更新资源(这里是鱼)的储量，函数 $g(K)$代表了储量的生物增长；如图 20-1 所示。储量为 0($K=0$)，则无法再生，故 K 保持为 0。若 K 为正，则储量会以 $K'=g(K)$所给出的比例增长。对给定环境中的许多生物种类而言，存在"最大可持续率"K_{msy}，其中 $g'(K)=0$。我们假定 $K<K_{msy}$ 时，$g'(K)>0$；$K>K_{msy}$ 时，$g'(K)<0$，这样，$g''(K)<0$。因此，如果 K_{msy} 是现时的鱼储量，则可以永久消费 $K'=g(K_{msy})$。这是一种有效(效用最大化)的消费水平——这听起来是可能的。但考虑到模型的动态因素，特别是时间偏好的可能以及储量规模对捕鱼边际成本的影响，结论将有所改变。

(20-50)式的现值哈密尔顿函数是：

$$\mathcal{H}=U(C)+m(g(K)-C) \tag{20-51}$$

最大化条件和伴随方程是：

$$\mathcal{H}_C=U'(C)-m=0 \tag{20-52}$$

$$\mathcal{H}_K=mg'(K)=\rho m-m' \tag{20-53}$$

注意，前述假设关注的是 $U(C)$和 $g(K)$的形状，及储量边际价值的现值为正的事实，保证了哈密尔顿函数在 C,K 上的凹性；这样，一阶方程组的解就是使得目标积分最大化时的路径。像前一模型一样，最大化方程(20-52)说明资本——这里为鱼——储量边际估计价值的现值等于消费鱼的边际效用。所以方程(20-53)可重写为：

---

5 参见 C. G. Plourde, "A Simple Model of Replenishable Natural Resource Exploitation," *American Economic Review*, 60: 520-522, June 1970。

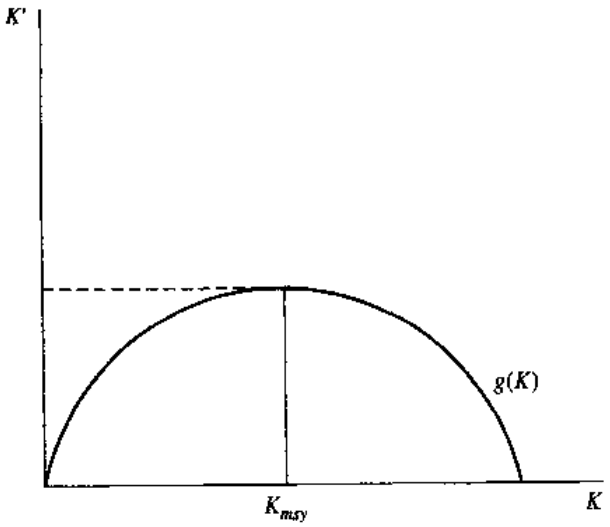

图 20-1　函数 $K'=g(K)$说明了不进行捕捞时鱼储量(资本储量)的变化率。当 $K<K_{ms}$ 时，鱼储量增加；当 $K>K_{ms}$ 时，鱼储量下降。置之不理时，在 K_{msy} 时会得到最大的持续收成(K'的最大值)。不过，这一捕捞率通常不是有效的。

$$g'(K)=\rho-\frac{m'}{m} \tag{20-54}$$

项 $g'(K)$确定了鱼储量的增长率；它是等待或延迟消费一段时间的好处。在非动态的模型中，财富或效用最大化要求这一边际收益等于资本的边际成本，这个例子中，边际成本由消费者的时间偏好率 ρ 给出。但是，由于现在的决策会影响未来，鱼的消费影响了鱼的边际价值的变化率。这一附加成本，资本损失，$-m'/m$，必须加入等待的直接成本之中。(当然，$-m'/m$可能是负的，这就抵消了时间偏好率。)

如果不给定 $U(C)$和 $g(K)$的具体形式，模型的分析解是得不到的。但是，对于这一类的自控模型，可以用大家熟悉的相图分析方法来说明解的特征，并推导比较静态结果。

从最大化条件(20-52)可得出 $U'(C)=m$。因 $U''<0$，这是个单调函数；利用隐函数定理的全局情形对它求逆，得到 $C=c(m)$。在状态方程(约束)中应用这个式子，可以得到确定模型运动的两个微分方程：

$$K'=g(K)-c(m)\quad K(0)=K_0 \tag{20-55}$$

$$m'=\rho m-mg'(K) \tag{20-56}$$

当变量保持常数时，出现稳定或平稳的状态，因此设 $K'=m'=0$ 就可以确定这些值。在前面方程中，设 $K'=m'=0$，得到：

$$g(K)-c(m)=0 \tag{20-57}$$

$$\rho - g'(K) = 0 \tag{20-58}$$

这两个方程已画在图 20-2 中。记 K 和 m 的稳态值为 K^* 和 m^*。首先考虑 $K'=0$ 时的轨迹(20-57)。因 $U'(C)>0$ 和 $U''(C)<0$,故 $c'(m)=1/U''<0$。根据假设,$g(K)$ 先增加,然后在 K_{msy} 之后下降。因此,$c(m)$ 也必须先上升再下降,以保证(20-57)中等号成立。因为 $c'(m)<0$,当 K 从原点增加时,m 自身必须先下降再上升,当 $g(K)$ 在 K_{msy} 处达到最大时,m 达到最小值。这样,$K'=0$ 时(K,m)的轨迹便是如图所示的 U 形曲线。而在另一方面,对于 $m'=0$,方程(20-58)仅是简单的一条垂直线,位于 $K=K^*$ 处。但注意到,因为 $K=K_{msy}$ 处 $g'(K^*)=\rho>0$,故 K^* 是在 K_{msy} 的左边。正的时间偏好使得稳定状态的消费向现在移动。而且,随着时间偏好率(在等价模型中,或者是市场利率)的增加,稳态的资本储量和 $m(t)$ 会下降到 K_{msy} 的左边,因此,$g'(K)>0$ 和 $g''(K)<0$。

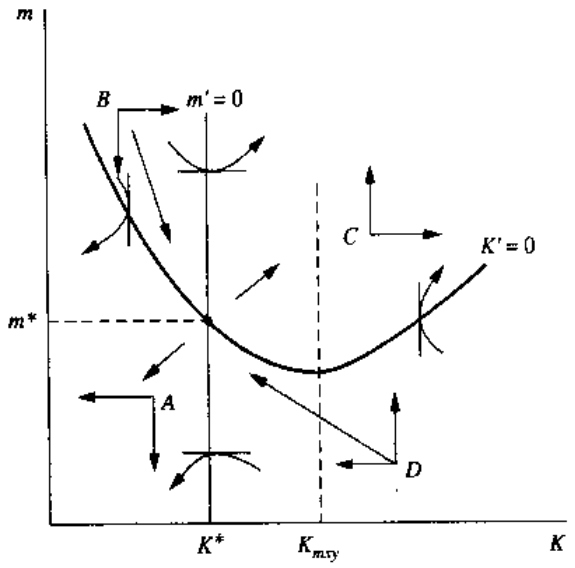

图 20-2 说明鞍点稳定性的相图。最优(效用最大化)的捕捞率发生在 K^* 处,其时 $g'(K)-\rho>0$,即在 K_{msy} 左边。稳定状态在曲线 $K'=0$ 和 $m'=0$ 的交点处。在 $K'=0$ 之上,K 随时间增加,在 $K'=0$ 之下,K 下降。同样 $m'=0$ 左边,储量的当时价值 m 减少,右边,储量当时价值增加。在 A,C 这样的点上,路径会偏离稳定态,在 B,D 这样的点上,它们会趋向于稳定态。

但是我们还没有证明对任意 K_0,最优路径最终确实会趋于稳定状态。考察被曲线 $K'=0$ 和 $m'=0$ 划分的相图中的四块区域里 K 和 m 取值的变化。在由 $K'=0$ 定义的 U 形曲线上边,$K'>0$,下边,$K'<0$。同样,直线 $m'=0$ 左边,$m'<0$,右边,$m'>0$。这样,如果 K 和 m 的取值不是(k^*,m^*),它们会向着 K'和 m'的符号所提示的方向移动,这些方向如图 20-2 的箭头所示。在点 A 和 C 上,路径会从稳定状态移开,而 B,D 这样的点开始,路径会收敛于(K^*,m^*)。因此这一平稳点是一个鞍点。确定控制问题解的特征方程包含一个正根和一个负根。当对应正根的积分常数设为 0 时,便可得到最优解。

请注意,仅仅因为系统是自控的,这一步骤才是有效的,这很重要。如果时间项直接出现于(20-55)或(20-56),即若日期相关时,仅仅知道 K 和 m 是不足以确定变量的移动的。日期即 t 值也必须给定。

稳定状态是最优路径,通常这是肯定的。有时候,人们可以通过模型中函数的弯曲特征来

证明它是正确的。比如这个例子中，如果我们假设 $C\to 0$ 时 $U'(c)\to\infty$，而 $C\to\infty$ 时 $U'(c)\to 0$，那么收敛于 0 消费的路径不可能是最优的；在 C 值较小时，消费增加的边际价值将超出付出的全部边际成本。同样地，捕鱼边际成本为正时，偏向无穷的路径也不可能是最优的。

对稳定状态解有兴趣的另一个可能的理由是，稳定而非爆发性的行为看上去与经验更相符。真实世界中看起来尚未提供资本趋于无穷的例子，而在良好定义的所有权关系中，资源用尽的情况也是不常见的。

相关的一个可再生资源利用模型是以财富最大化为目标泛函的，就像本章早些时候所介绍的那样：

$$\text{最大化}\qquad \int_0^{\infty}[pu-c(K,u)]e^{-rt}dt \tag{20-59}$$

$$\text{满足约束}\qquad K'=g(K)-u\quad K(0)=K_0$$

这个模型中，捕鱼强度为 $u(t)$，卖价为某一常数 p，成本函数同时依赖于鱼储量和利用率。（注意公式中的符号 c 代表的是“成本”而非前一模型中的“消费”）现值的哈密尔顿函数是：

$$\mathcal{H}=pu-c(K,u)+m(g(K)-u)$$

我们假设成本函数在 K 和 u 上是严格凸的，并保持 $g(K)$ 的凹性假设。这样，哈密尔顿函数本身是严格凹的，一阶必要条件也是最大化的充分条件。最大化条件和伴随方程是：

$$\mathcal{H}_u=p-c_u-m=0 \tag{20-52'}$$

$$\mathcal{H}_K=-c_K+mg'(K)=rm-m' \tag{20-53'}$$

从定义最大化条件的意义上讲，(20-52′)等价于(20-52)；这时储量的边际价值的现值 m，等于捕鱼的净现值收益——价格减去边际成本。在静态模型中，这个条件非常简单，即价格等于边际成本；在动态模型中，将未来事件的机会成本折算到现在的决策中。改写(20-53′)得到：

$$g'(K)=r-\frac{m'}{m}+\frac{c_k}{m} \tag{20-54'}$$

这一方程类似于(20-54)，只是增加了一项 c_k/m。回忆，在前面的分析中，由 $m'=K'=0$ 导出的稳定状态会在 $g'(K)=r$ 时出现（或事件偏好率 ρ）。因为 r（或 ρ）假定为正，$K^*<K_{msy}$。但是，在(20-54′)中，我们多了一项 c_k/m，它的符号是一件经验上的事情。（当然，我们假设 $m>0$；资本存量从没有负的边际价值）。这一项表明了鱼储量增加对捕鱼成本的影响。很容易想像（可能是经验的）较高的鱼储量会降低捕鱼的边际成本和总成本。那时，$c_k<0$，而且在 $g'(K)<0$ 处，有 K^* 也是可能的，从而说明 $K^*>K_{msy}$。延缓捕捞，等着储量建立，完全可能降低捕捞成本，并在将来产生足以抵销储备边际成本的巨大利益。

资本利用

我们现在来讨论目标函数更一般化的资本利用模型。想像一个资本储量 $x(t)$，它能让企业（或个人，他可能是一种人力资本）在 t 时刻获得租金 $R(x)$。简单地讲，可以归入这类

函数的，是人们或企业以某种预定的成本最小化方式将其他投入（如劳动）和资本储量结合的行为。假设资本以线性比率 bx 折旧，投资于新资本的成本为 $c(u)$，企业希望利用和获得资本，以在无限区间上最大化财富。模型可写成：

$$\text{最大化} \qquad \int_0^{\infty}[R(x(t))-c(u(t))]e^{-rt}dt$$

$$\text{满足约束} \qquad x'(t)=u(t)-bx(t) \quad x(0)=x_0>0 \tag{20-60}$$

我们假设存在内点解，并有 $u(t)>0, x(t)>0$。状态方程 $x'=u-bx$ 定义了模型的动态特征；它说明了资本存量的变化率等于新资本的获取率减去 t 时的折旧。控制变量是资本的获取率即投资率。目标函数也是自控的（从时间仅出现在折现函数意义上讲），状态和控制变量是函数可分的。这些简化假设，虽然局限了它们的理论应用，但却提供了更多的实质上的可处理性。我们还将假设 $R(x)$ 是凹的，$c(u)$ 是凸的（这样，$-c(u)$ 是凹的），以在满足一阶必要条件时保证达到最大值。注意状态方程是线性的，所以它对充分条件没有影响。

现值形成的哈密尔顿函数为：

$$\mathcal{H}=R(x)-c(u)+m(u-bx)$$

可得出最大化条件及伴随方程：

$$\mathcal{H}_u=-c'(u)+m=0 \tag{20-61}$$

$$\mathcal{H}_x=R'(x)-bm=rm-m' \tag{20-62}$$

以及状态方程：

$$x'(t)=u(t)-bx(t) \tag{20-63}$$

方程(20-61)表明，和前面的模型一样，资本存量的边际价值的现值 $m(t)$ 等于投资于新资本上的边际成本的现值 $c'(u)$。伴随方程(20-62)若写成：

$$R'(x)+m'=(b+r)m$$

则很易于解释。方程右边是储备的机会成本，由 t 时资本存量 x 价值的折旧率加上可能的投资率 r 组成。沿着财富最大化的路径，这个边际机会成本必须等于正在产生收益处的边际比率，这些边际收益有两个来源：来自资本增加的瞬时（边际）利润 $R'(x)$，加上资本收益 $m'(t)$（即发生在 t 时刻的资本边际价值的变化率，是由对未来资本存量的财富最大化的使用而导出的）。像所有动态过程一样（正是这使其成为动态），现在做出的行为的价值由两部分组成：一些即时的净收益加上未来的净收益总和。

如果在方程(20-62)两边乘以 $e^{-(b+r)t}$，并改写为：

$$e^{-(b+r)t}[m'-(b+r)m]=-e^{-(r+b)s}R'(x)$$

我们可以作进一步的解释。两边积分，并假设 $R'(x)$ 有上界，以使得在上限时积分函数的值为 0，那么：

$$e^{-(r+b)t}m=\int_t^{\infty}e^{-(r+b)s}R'(x(s))ds$$

或乘以 $e^{(r+b)t}$，

$$m(t)=\int_t^{\infty} e^{-(r+b)(s-t)}R'(x(s))ds \tag{20-64}$$

方程(20-64)说明(在 t 时)资本的边际价值的现值就是未来的净边际利润折现到 t 时的价值，其中所用的折现率是真实利率 r 和折旧率 b 之和，这反应了使用这一特殊资本的真实边际成本。最后，把该方程与(20-61)结合，可知边际成本等于边际收益：

$$c'(u(t))=\int_t^{\infty} e^{-(r+b)(s-t)}R'(x(s))ds \tag{20-65}$$

现在让我们来"解"这个问题，这里的"解"，是指考察是否存在稳定状态的解以及它有什么样的特性。我们利用类似以前已用过的图表分析方法进行研究，并在 (x,m) 相平面上考察满足一阶条件的路径。

因为边际成本是严格递增的($c''>0$)，故我们可通过对 $c'(u)=m$ 求逆来消去控制变量 u；这样，$u=h(m)$，其中 $h'(m)=1/c''>0$，代入状态方程，可得：

$$x'=h(m)-bx \tag{20-66}$$

方程(20-66)以及伴随方程(20-62)：

$$R'(x)+m'=(b+r)m \tag{20-62}$$

组成了 x 和 m 的两个微分方程。在 $x'=m'=0$ 时，是稳定状态：

$$h(m)=bx \tag{20-67}$$

$$R'(x)=(b+r)m \tag{20-68}$$

这些方程的简图画在图 20-3 中，因 $c'(0)=0$，$c''(u)>0$，故方程(20-67)通过原点且斜率为正。

两条曲线的交点正是稳定状态点，记为 S；并令 x^* 和 m^* 代表 x，m 的稳定状态值。

接下来我们要问是否存在与一阶方程一致并且渐近趋于 S 点的路径。因 $h(m)$ 是递增的，在这条线之上的点，$x'=h(m)-bx>0$；同样这条线之下 $x'<0$。而且因为 $R''(x)<0$，$R'(x)$ 是递减的。这样，方程(20-68)在相图上的斜率是负的。曲线之上，$m'=(b+r)m-R'(x)>0$；所以，在曲线之上的 m 是递增的，而在曲线下方 m 是递减的。

这些移动的综合效应可由图 20-3 中的箭头所示方向进行说明。收敛于稳定状态的路径，或是起始于左上方而向右下方运动(但在 $m'=0$ 之下)，或是始于右下方而向左上方运动(但在 $m'=0$ 之上)。其他表示的路径都是不稳定的，也就是说它们可能会发散于无穷或是趋于 0 点。稳定状态是个鞍点。我们可以认为因这些发散路径是经验上无法观察的，或可通过 $R(x)$ 和 $c(u)$ 的曲线性质即 $x\to 0$ 时 $R'(x)\to\infty$ 等来排除这些路径存在的可能性。

当定义的方程是非线性(就如该例中一样)时，用来确认稳定状态性质的常见作法是在稳定状态附近利用泰勒展开的一阶项将 x' 和 m' 的微分方程线性化。经此运算，可得：

$$x'=-b(x-x^*)+h'(m)(m-m^*)$$

$$m'=-R''(x^*)(x-x^*)+(r+b)(m-m^*)$$

特征根是(见方程(20-33))：

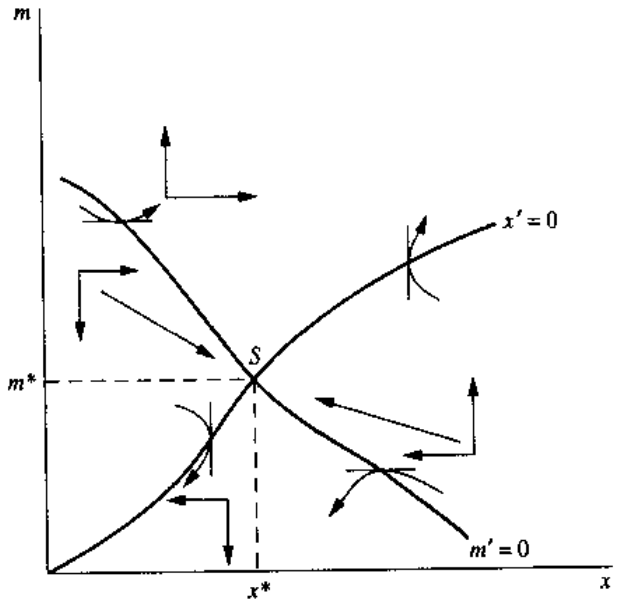

图 20-3 说明资本利用模型中鞍点稳定性的相图。稳定状态 S 处于曲线 $x'=0$ 和曲线 $m'=0$ 的交点上。在曲线 $x'=0$ 上方，x 递增，之下，x 递减。同样，$m'=0$ 之上，m 递增，之下，m 递减。组合影响由箭头表示。某些始自 S 的左上方或右下方的路径会趋向于稳定状态。r 的增加不影响曲线 $x'=0$ 但却使曲线 $m'=0$ 移向原点，因此，利率的增加会同时降低稳定状态资本储量 x^* 和当时边际价值 m^*。

$$k_1, k_2 = \frac{1}{2}\{r \pm [(r+2b)^2 - 4h'(m^*)R''(x^*)]^{1/2}\}$$

因为 $h'>0, R''<0$，所以根是实数。又因根号中的项大于 r，两个根的符号因此相反，而且负根的绝对值较小。这样，在某个邻域之内稳定状态是个鞍点。

贯穿于本书始末，我们一直强调数学建模的目的是为了推导可证伪的假设，而且这些命题的陈述模式通常反映出的是由于约束条件的变化而造成的决策变量的反应方向。在动态模型中，同样可以提出这些问题，比如各种参数变化时对资本存量的稳态值会有何影响。像在静态模型中的一样，这些可称为比较静态问题。而另一更为困难的问题是参数变化对控制变量或状态变量的整条路径的影响；这些问题通常称为比较动态。我们将用现有的例子简要说明一下这种分析方法。

从(20-67)和(20-68)可清楚地看出，利率增加不会影响第一个方程($x'=0$)，但会使第二个($m'=0$)曲线向原点平移，造成的结果是资本存量的稳定状态值下降，即 $\partial x^*/\partial r<0$。从 $x'=0$ 曲线的正斜率，也有 $\partial m^*/\partial r<0$；而从最大化条件 $c'(u)=m$，有 $\partial u^*/\partial r<0$。我们可预测到这些结论。如果为现在使用而建立储备的机会成本增加了，延迟到未来的消费(通过投资于新资本)将会下降，导致最终的资本存量减少。折旧率 b 的增加则会产生更为模糊的变化；b 进入方程(20-68)($m'=0$)的方式与 r 一样，但 b 同时也出现在方程(20-67)($x'=$

0)中。因为 $h'(m)>0$，b 的增加会使曲线 $x'=0$ 上移。结果就是，x^* 肯定会下降，但 m^* 的变化(从而 u^*)是不清楚的。

尽管一般形式的这种类型的比较静态定理较难表述，但"自控"模型中利率(或时间偏好率)的变化对稳定状态资本存量的影响的结论还是有的。

Caputo 定理[6]　考虑一个无限期的一般化的自控最优控制模型

$$\text{最大化} \qquad \int_0^\infty f(x,u,\alpha)e^{-rt}dt$$

$$\text{满足约束} \qquad x'=g(x,u) \qquad x(0)=x_0 \qquad u\in U$$

其中 U 为控制集，$\alpha>0$ 是独立于时间的一个参数。假定存在最优解且收敛于模型的鞍点稳定状态。用$(x^*(\alpha,r),u^*(\alpha,r))$表示稳定状态，函数中出现 $*$ 号表示这是稳定状态的值。

1. $x^*(\alpha,r)$和 $u^*(\alpha,r)$对利率 r 变化的响应为：

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial x^*}{\partial r}\right)=\operatorname{sgn}(f_u^* g_u^*) \tag{20-69a}$$

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u^*}{\partial r}\right)=-\operatorname{sgn}(f_u^* g_u^*) \tag{20-69b}$$

2. 如果参数 α 进入 f，但只与 x 有关，即 $f_{u\alpha}\equiv 0$，那么 α 变化的影响是：

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial x^*}{\partial \alpha}\right)=\operatorname{sgn}(f_\alpha^*) \tag{20-70a}$$

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u^*}{\partial \alpha}\right)=\operatorname{sgn}(g_u^* g_x^* f_\alpha^*) \tag{20-70b}$$

3. 如果参数 α 进入 f 时只与 u 有关，即 $f_{x\alpha}\equiv 0$，那么 α 变化的影响是：

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial x^*}{\partial \alpha}\right)=\operatorname{sgn}(f_{u\alpha}^*(r-g_x^*)g_u^*) \tag{20-71a}$$

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u^*}{\partial \alpha}\right)=-\operatorname{sgn}(f_{u\alpha}^*(r-g_x^*)g_x^*) \tag{20-71b}$$

结论 2 和 3 是一对"共轭"定理，类似于以前在静态模型中推导过的定理。可以看出，g_x^* 出现在所有关于 $u^*(\alpha,r)$的稳定状态的比较静态结论中。这样，若 $g_x^*=0$(或 $g_x\equiv 0$)，即如果状态方程在稳定状态(或全局上)独立于状态变量，那么，控制变量的稳态值将独立于 α 和折现率 r。

在前面模型中，$f_u=-c'(u)<0$，$g_u=1$，这样，如同直接推导所得，有$\partial x^*/\partial r<0$。这个定理在资源利用模型中有着广泛的应用。这些偏导数的符号常常是很显然的。典型的情况是：被积函数 $f(x,u)$是对某种净收益(或成本的负值)的测度，它是 u 的增函数，所以 $f_u>0$。状态方程具有形式 $x'=h(x)-u$，所以 $g_u<0$(参见收获可再生资源部分的模型)。这样，在那些模型中，我们通常都会发现$\partial x^*/\partial r<0$。

6　参见 Michael R. Caputo, "The Qualitative Structure of a Class of Infinite Horizon Optimal Control Problems," *Optimal Control Applications and Methods*, 18: 195-215, 1997. 见推论 1(a)。

比较动态关注于整条路径 $x(t)$，$u(t)$和 $\lambda(t)$[或 $m(t)$]对模型参数变化的反应。所采用的分析过程类似于比较静态中所采用的。首先将"解"$x(t,r,b)$，$m(t,r,b)$代入定义路径 x，m 的联立微分方程((20-62)和(20-66))。然后这些联立微分方程对某些参数求微分，得到所谓的变分微分方程系统。有时候根据模型中函数的曲率性质可以确定轨迹的移动。但是当状态变量多于一个时，二维的图表分析是不可能进行的。这方面的内容已经超出了本书的范围，本章末尾提到的参考文献中有对这类问题的讨论。

习题

1. 解最优控制问题

   最大化 $$\int_0^1 -u^2\,dt$$

   使得： $$x'=x+u \quad x(0)=1 \quad x(1)=0$$

2. 解最优控制问题

   最大化 $$\int_1^2 (x+t\,u-u^2)\,dt$$

   使得： $$x'=u \qquad x(1)=3 \qquad x(2)=4$$

3. 解最优控制问题

   最大化 $$\int_0^1 \left(\alpha\, tu-\frac{u^2}{2}\right)dt$$

   使得： $$x'=u-x \qquad x(0)=x_0 \qquad x(1)=0$$

4. 在"资本利用"一节，令 $R(x)=ax-x^2/2$，$c(u)=cu^2$。完整地解这个模型，并结合本章内容对结论进行分析。

5. 考虑一个矿山，其资源数量为 X。令 $x(t)$表示到 t 时总共开采的矿石数量，那么 $u=x'(t)$是开采率。假设矿石利润率的现值为 $P(u)$，其中 $p'>0$，$P''<0$。假定矿主要在$[0,T]$内使财富最大化，且 T 之后残值为 0。同时设市场利率固定，为 r。

   (a) 证明边际收益的现值在$[0,T]$上为常数，并加以解释。

   (b) 证明开采率会随着时间下降。

   (c) 假定开采利润率的现值为 $\log u$。求出真实的资源开发财富最大化路径，其中 $x(0)=0$，$x(T)=x$。

   (d) 利率 r 的变化会如何影响资源的开发?

6. 利用(K,C)相平面上的相位图，重新解答可再生资源模型(20-50)。(提示：在最大化条件中对时间求微分，再用伴随方程和最大化条件消去 m 和 m'。)

7. 解最优控制问题

   最大化 $$\int_0^2 (2x-3u-\alpha u^2)\,dt$$

   使得： $$x'=x+u$$

   $$x(0)=5 \qquad \text{对 } x(2) \text{没有限制}$$

部分参考文献

Bellman, R.: Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957. The seminal work on dynamic programming.

Caputo, M. R.: "How to Do Comparative Dynamics on the Back of an Envelope in Optimal Control Theory," Journal of Economic Dynamic and Control, 14: 655-683, 1990. Generalizes the primaldual methodology to optimal control problems.

_____: "The Qualitative Content of Renewal Resource Models," Natural Resource Modeling, 3: 241-259, 1989. This paper uses a Taylor series approach to study the comparative static and comparative dynamic properties of a general renewable resource model.

_____: "Comparative Dynamics via Envelope Methods in Variational Calculus," Review of Economic Studies, 57: 689-697, 1990

Clark, C. W.: Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976. Complete coverage of renewable resource management using a variational calculus and optimal control theory.

Dorfman, R.: "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory," American Economic Review, 59: 817-831, 1969. An heuristic proof and economic interpretation of necessary condition of optimal control theory.

Epstein, L. G.: "The Le Chatelier Principle in Optimal Control Problems," Journal of Economic Theory, 19: 103-122, 1978.

Hadley, G., and M. C. Kemp: Variational Methods in Economics, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1971. Requires solid knowledge of static optimization theory, linear algebra, and ordinary differential equations.

Intriligator, M. D.: Mathematical Optimization and Economic Theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1971. Covers both static and dynamic optimization techniques relatively briefly but at an intermediate level.

Kamien, M. L., and N. L. Schwartz: Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control In Economics and Management, 2d ed., Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York, 1991. A self-contained readable introduction to dynamic optimization theory.

提示与答案

第 1 章

1. 需求法则宣称当其他东西不变时，价格上升会导致需求量降低。具体而言，口味假定不变。在这种背景下，当价格变化时口味也发生变化。
2. 从需求法则导出。
6. 是；人脑不能处理给定环境所有方面。
7. 不；不是非常。
8. (a)$a,b,k\geqslant 0$。(b)$x^*(t)=([a/b-t]/[(2/b)+2k]$。(c)$-2/b-2k<0$；较弱(对 a,b,k 的值限制较少)；因为 b 可能为负数，此表达式不等价与 $bk>-1$。(e)直接对 $x^*(t)$ 微分。
9. 令 $R(x)=px$，其中 p 是参数化的产出价格。
11. 既然这里隐含 $dx^*/dt<0$，不存在可将此理论与其他理论区别开的销售量变化与税率变化之间的数量关系。
12. 将 $y^*(t)$ 代入总收益和净收益函数，并将它们对 t 微分。利用一阶条件消去几项，在第 7 章时要记住这点。
13. 这个问题作为成本(金属使用的实物量)极小化问题最易处理。当边角料被抛弃时，每端使用 D^2，边使用 πDh。一个罐头的体积是 $(\pi D^2/4)h$。利用这点消去 h 并对 D 求极小化。制造每个罐头产生的废料是 $2k(D^2-\pi D^2/4)$。从最初目标函数减去此项，并观察 h^*/D 怎么随着 k 的变化而变化。

第 3 章

1. (b)$U_{12}=U_{21}=1$；$V_{12}=V_{21}=4x_1x_2$，$W_{12}=W_{21}=0$。(c)对 U,V,W 而言，$MRS=-x_2/x_1$。(d)MRS。
3. (a)$MP_L=\alpha(K/L)^{1-\alpha}$，$MP_K=(1-\alpha)(L/K)^{\alpha}$。(c)是。
6. $dy/dt=[\alpha n+(1-\alpha)m]L_0^{\alpha}K_0^{1-\alpha}e^{[\alpha n+(1-\alpha)m]t}$，
7. (a)从 $V_i=F'(U)U_i$。(b)利用上述乘积法则；$V_{ij}=F'U_{ij}+F''U_iU_j$。虽然规定 $F'>0$。F''符号不确定。
8. $\partial U/\partial p_1=-\dfrac{1}{9}(x_2/x_1)^{2/3}(m/p_1^2)<0$；是。

   $\partial U/\partial p_2=-\dfrac{4}{9}(x_1/x_2)^{1/3}(m/p_2^2)<0$；是。

   $\partial U/\partial M=\dfrac{1}{9}(x_2/x_1)^{2/3}(1+p_1)+\dfrac{4}{9}(x_1/x_2)^{1/3}(1/p_2)>0$；是。

3.6 节

2. (a)$y=\log(x_1x_2)$；x_1x_2 是齐次的。(c)$y=F(z)=z^2-z$，其中 $z=x_1x_2$，是齐次函数。
4. 注意 $f_i=Fh_i$；水平曲线的斜率是 f_1/f_2；可得结果。
5. 对 f_1 应用欧拉定理。

6. 遵循正文中定理。

第 4 章

4.2 节

1. (a)原点；鞍点；(b)(22/7,16/7)；极小值；(c)(4,20)；极大值。

3. 当 $\alpha+\beta=1$，$L^{\alpha}K^{\beta}$ 是(弱)凹的。

5. $g_1=F'f_1$；由于在平稳点 $f_1=g_1=0$，$g_{11}=F'f_{11}$，利用二阶条件可得结果。

4.6 节

1. 由于 f_{12} 项进入 $\partial x_1^*/\partial p$，$\partial x_2^*/\partial p$ 的表达式，这些偏导的符号是不确定的。然而，如果假定它们都是负的，那么消去分母中的正项后，稍微运算可导出二阶条件的矛盾。

2. 因为 $y^*=f(x_1^*,x_2^*)$，$\partial y^*/\partial w_1=f_1(\partial x_1^*/\partial w_1)+f_2(\partial x_2^*/\partial w_1)$。利用方程组(4-20)可确定 $\partial x_1^*/\partial p$ 为负数。同样的分析可确定 $\partial y^*/\partial w_2$ 的符号。

3. 假定 $\alpha_1-\alpha_2<1$(否则将会违背利润极大化的二阶条件)，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2-1(\beta<0)$，$x_1$ 的要素需求是

$$x_1^*=\alpha_1^{(\alpha_2-1)/\beta}\alpha_2^{-\alpha_2/\beta}p^{1/\beta}w_1^{(\alpha_2-1)/\beta}w_2^{\alpha_2/\beta}$$

由于 w_1 的指数是负数，$\partial x_1^*/\partial w_1<0$。要得到 x_2 的要素需求，只要交换 1 和 2。

4. (a)由 $f_{12}=f_{21}$，$\partial x_1^*/\partial w_2=\partial x_2^*/\partial w_1$。(b)从方程(4-20b)和(4-20c)可得。(c)它们不是；$\partial x_i^*/\partial w_j$ 不仅仅涉及 f_{ij}。其他的二阶偏导也将出现。

5. (a)$\partial y_1^*/\partial t=\pi_{22}/(\pi_{11}\pi_{22}-\pi_{12}^2)<0$；(b)$\pi_{12}=C''(y)$ 符号不确定。

7. (a)$\partial y^*/\partial t<0$；$\partial y_i^*/\partial t\gtrless 0$，$i=1,2$。(b)$(dy_1/dt)_{y_2}<0$。

8. 除非成本与收益函数可以测量，否则不存在可观察的差异。

9. 雇佣 x_2 的成本是 $w_2x_2+tw_2x_2-(1-t)w_2x_2$。对所有价格而言要素需求依然是齐次函数。增加 t 与增加 w_2 对公司的影响一样；因此，比较静态的性质是同样的。

10. (a)要素需求函数不是任何次的齐次函数。将要素价格翻倍可不变需求函数但一定会变化要素需求函数。其证明与文中竞争情况的证明相同。

11. (a)无。(b)$\partial y_2^*/\partial t<0$。(c)没有差异 $\partial y_1^*/\partial t=0$。(d)是。这部分实际上像两个独立的厂商；不存在相互作用项。(e)不。价格是参数吗，或它是由极大化假设内生决定的？(f)无差异。(g)与以前练习相同。

第 5 章

正文

1. (a)−1　(b)2。(c)−2。(d)2。

3. 利用克莱姆法则，

附录

1. 秩 $A=1$，秩 $B=2$，秩 $C=3$；$|C|\neq 0$。

3. 由定义 $A^{-1}(A^{-1})^{-1}=I$。然而，$A^{-1}A=I$。既然逆矩阵是惟一的，$A=(A^{-1})^{-1}$。

6. 令 $h_i,h_j=0$，$i,j=2,\cdots,n$。那么 $h'Ah=a_{11}h_1^2<0$；因此 $a_{11}<0$。相似的步骤可证明 $a_{ii}<0$，$i=1,\cdots n$。

7. 利用正交矩阵的定义。

第6章

3. 无差异曲线的凸性意味着$-U_{11}P_2^2+2U_{12}p_1p_2-U_{22}p_1^2>0$。因为$U_{12}$项的存在，此项并不与$U_{11}<0$，$U_{22}<0$等价。
4. (a) $x_1^*=1$，$x_2^*=1$；max。(b) $x_1^*=1$，$x_2^*=1$；min。(c) $x_1^*=M/2p_1$，$x_2^*=M/2p_2$；max。(d)$x_1^*=(p_2U^0/p_2)^{1/2}$；min。
6. (a)对α而言，比较静态中右边的列矩阵应是$(-1,0,0)'$，可得$\partial x_1^*/\partial\alpha=-H_{11}/H>0$。
   (b)找出这些表达式成分的表达式并组合。
7. (a)这实际上是6(b)的特例。(b)问题6中的目标函数产生这个结果。
8. 这表明厂商将使用投入直到工资等于边际产值(VMP)；然而，$VMP=pf_i=AC^*=f_i$。(c)右边列不是$(1,0)'$或$(0,1)'$；不要忘了w_i是AC^*的一部分。你可以乘以y^*；那么矩阵左边项是$-AC^*f_{ij}$。(d)这是一个关于w_1，w_2的等式。
9. (a)由k_1的增加。(b)是；寻找$\partial x_i^*/\partial k_1$。(c)两条路皆可。(d)报酬率在这里不是参数；不能像竞争情况时$x_i=x_i^*(w_1,w_2,p)$。(e)基本上与竞争情况时的分析一样。

第7章

1. 问题来自文表达并做为复习。惟一的区别在于约束的具体形式。将得出的结果与第6章问题7相比较。(f)这个结果表明当资源增加时间接目标函数的边际增加是拉格朗日乘子。这个重要的概念来自线性规划在经济学中的应用。当然，$\partial\lambda^*/\partial k\neq 0$。
3. 正是这个问题将我们导向初始　对偶分析。与第6章问题8所体现的传统方法相比较。(b)AC是w_1的线性函数；由于AC^*是AC的最小值，它必须位于AC下并且是凹的。(c)x_1^*/y^*(g)当产出价格被连续调整到某行业中厂商的最小平均成本时，由定义短期需求变为长期需求。(h)对w_1微分。利用首先从第4章得到的关于$\partial x_i^d/\partial p$的交互关系。
4. 短期模型的拉格朗日函数是$\mathcal{L}=pf(x_1,x_2)-w_1x_1-w_2x_2+\lambda(k-w_1x_1-w_2x_2)$，但在利润极值点约束条件正好绷紧以致$\lambda^*=0$。然而，$\partial\lambda^*/\partial w^1\neq 0$。生成关于$\partial\lambda^*/\partial w_1$的交互关系。利用这个关系与相切条件，$\pi_{w_1}^*=\pi_{w_1}'$，$\pi_{w_1w_1}^*\geqslant\pi_{w_1w_1}'$。代替地，定义$x_1^*$的条件需求函数；$x_1^*(w_1,w_2,p,k^*(w_1,w_2,p))$；对$w_1$微分，并利用$x_1^*$的齐次性。

第8章

3. 这一章得出的要素需求是要素价格和产出水平的函数。以前，它们是要素价格和产出价格的函数。它们是不同的函数。然而，它们都是自身价格的向下倾斜的函数，这可能是对得到可证伪假说有用的惟一性质。
4. 对两要素而言，(i)和(ii)是等价的，然而，由(iii)，要素一直是相互替代的。对超过两个要素而言，由任何

一个或两个定义知道两种要素是相互替代比并不能确定第三个表达式的符号。

7. (a)将欧拉定理应用到 f_L, F_k。(d)得自 $dK/dL=-f_l/f_K$。

第 9 章

1. 规模报酬是一个比齐次性更广的概念。
2. $C=w_1x_1+w_2x_2=pf_1x_1+pf_2x_2=rpy=rTR$。这个模型并没有指出这些租金的接受者。不断有进入者，使得厂商规模，产出价格，和利润为 0。
3. (a)$y=\log 4x_1x_2$。
4. 假定 x_1 固定。那么由欧拉定理 $\sum_{i=1}^{n} f_ix_i=ry$，$\sum_{i=2}^{n} f_ix_i=sy$。合并并积分。依次应用到每个 x_i。
6. 对同位函数而言，$C=J(y)A(w_1,w_2)$，$MC=J'(y)A(w_1,w_2)$，$AC=[J(y)/y]A(w_1,w_2)$。在 AC 的极小点，$AC=MC$，或 $J'=J/y$。积分可得 $J(y)=ky$。

第 10 章

1. 递减的 MRS 是个两维概念；拟凹是对效用函数曲率更强的限制。
3. 无。
7. 不。如果 $U(x_1,\cdots,x_n)$是一个效用函数且 $V=F(U)$，$F'(U)>0$，V_i 和 U_i 的符号不需要相同。
8. (a)(i)。(b)是。(c)对(ii)是；对(i)而言不是，这是因为可能存在不对称收入影响。
10. (a)可改变它的大小和符号。(b)没有这种法。(c)无影响。(d)无影响。(e)无影响。(f)大小可以变；但符号不能变。
12. (a)不必然。(b)直觉上，如果某人今年是个净储蓄者，利息率的增加将使下一年收入更多，反之也成立。
18. (a)将此等式对 M 微分，注意 $\lambda^M=\partial U^*/\partial M$。(b)将此等式对 p_2 微分，利用上式与罗伊等式。
20. (a)竖直的平行线意味着 $\partial(U_1/U_2)/\partial x_2=0$。在此表达式中应用除法法则；分子与 D_{31} 成比例，此表达式中相应的余子式是 $\partial x_1^M/\partial M$。(b)得自(a)和司勒斯基方程。(c)注意 $U_1/U_2=1/x_1$，仅是 x_1 的函数。因此 U_1/U_2 独立于 x_2。(d)证明 $\partial x_2^M/\partial p_1=0$。

第 11 章

1. 二阶保边主子式都是正的；在可分效用函数情况下，此条件隐含着对所有 $i,j,i\neq j$，$-U_i''p_j^2-U_j''p_i^2>0$。因此，不可能有两个 U_i' 都是正的；否则，以上关系中有一个会被违反。

   我们有 $U_i'(x_i^M)=\lambda^M p_i$。对 M 微分可得 $U_i''(\partial x_i^M/\partial M)=(p_i\partial\lambda^M/\partial M)$，(a)和(b)可从此得出。对于补偿需求来说，$\lambda^U U_i'(x_i)=p_i$。对 p_i 微分，注意 $\partial\lambda^U/\partial p_i=\partial x_i^U/\partial U^0$。
2. 利用同样的暗示。
3. 从包络考虑，可得罗伊等式 $U_{p_i}^*=-\lambda x_i^M$。对 p_k 微分，注意 $U_{p_ip_k}^*=0$。对 $U_{p_i}^*$ 同样处理。注意 $U_{p_i}^*=V_i^*(1/M)$。

4. 利用问题 3 和问题 2(A)。

6. $U_i'(x_i)=\lambda^M p_i$。因此,$\mathcal{U}_i'(\partial x_i^M/\partial p_j)=p_i(\partial\lambda^M/\partial p_j)=0$。因此,$\partial x_i^M/\partial p_j=0, i,j,=1,\cdots,n, j\neq i$。结果可从预算方程得出。

7. (a)因为效用极大化理论隐含(在某些限制下)向下倾斜的需求曲线,它被构造了出来。这个理论也隐含其他东西,如替代项的对称性等等,但这些性质并不来自向下倾斜的需求函数。

8. 至少,leo 与北方人交易大衣。

9. (a)一致 (b)不一致 (c)一致。

11. $U=F(x_2+\log x_1)$。

13. (a)至少 4 美元。(b)少于 6 美元。(c)接近。(d)无法回答。

第 12 章

1. 构造连续时期的边际效用的比值。

2. (b)如果你没有继承者并且你明天将死。

3. (a)财富的一次性损失。(c)坏消息。

4. 假定羊毛和羊肉的边际值递减,不。

5. 这全被资本化为现期价格。

6. (a)两个都降低。(b)随着通货膨胀的增加,这个特点提高了持有这些资产的相对值,增加了它们相对可折旧资产的价值。

7. 这将偿还负担移到现在,可能隐含流动性约束。

9. 假定的初始英里数不同会导致每年储蓄有极大不同。计算这些储蓄的现值。

第 13 章

1. 令 $v=a+bu$。那么 $v'=bu', v''=bu''$。v 的绝对风险厌恶系数是 $-bu''/bu'=-u''/u'$。

2. $v'=f'u', v''=f''u'^2+f'u'', -v''/v'=-(f''u'^2+f'u'')/f'u'=-u''/u'-f''u'/f'>-u''/u'$ 由于 $f''<0$。

3. (a)$u'=W^{-a}, u''=-aW^{-a-1}, -Wu''/u'=aW^{-a}/W^{-a}=a$。

(b)$u'=1/W, u''=-1/W^2, -Wu''/u'=(1/W)/(1/W)=1$。

4. (a)$u'=a-2bW, u''=-2b, -u''/u'=2b/(a-2bW)$。当 W 增加时,分母减少到以至绝对风险厌恶系数上升。

(b)令 x 为投到风险资产上的份额。选择问题是:

$$\max E[a(W+xR)-b(W+xR)^2]$$

一阶条件是:

$$E[aR-2bR(W+x^*R)]=0$$

即:$a\overline{R}-2bW\overline{R}-2bx^*(\overline{R}+\sigma_R^2)=0$。由这可得:

$$x^*=\frac{(a-2bw)\overline{R}}{2b(\overline{R}+\sigma_R^2)}$$

(c)$x^{*'}(W)=-\overline{R}/(\overline{R}+\sigma_R^2)<0$。

5. $\max E[-e^{-a(W+xR)}]$。一阶条件:$E[aRe^{-a(W+xR)}]=0$;即:$ae^{-aw}E[Re^{-axR}]=0$;即:$E[Re^{-axR}]=0$。X 的

一阶条件并不含有 W。因此，投在风险资产的份额并不是初始财富的函数。

第 14 章

1. Kuhn-Tucker 条件只是角点解的必要条件，不是充分条件。在某些点，即使在 $x_i=0$，MP_i 也可能比 w_i 更大，$MP_i<w_i$。
3. 为了得到极点解，$f(x_1,x_2)$ 不得不是凹的。
6. $x_1=5, x_2=5$。
7. $k=5$。
8. $x_1=5, x_2=5/8$。
10. (a)这是费雪分隔定理(见第 12 章)。如果消费者可以借入和借出，极大化财富导致最大机会集合。消费者利用借入或借出将其消费重新安排以与他的偏好一致。(b)$x_1=4.93, x_2=12.82$；消费者在一期是贷方，现值 -14.78。(c)$x_1=5.15, x_2=12.36$，现值 $=15.45$。

第 15 章

2. 代理人问题的一阶条件 $\beta M_x-\gamma-C'=0$。由比较静态分析可得 $\partial x^*/\partial\beta=-M_x/(\beta M_{xx}-C'')$ 和 $\partial x^*/\partial\gamma=-1/(\beta M_{xx}-C'')$。委托人选择 β,γ 来极大化 $E[B(x^*,e)-C(x^*,e)-u_0]$。假定 $\beta M_{xx}-C''$ 独立于 e，导出一阶条件并求解。可得 $\beta^*=\mathrm{cov}[M_x,B_1]/\mathrm{var}[M_x]$，$\gamma^*=E[B_x]-\beta E[M_x]$。
3. $\min w+K(\pi)$，其中 $\pi=c(x)/w$。然后对 k 微分。
4. 将 C''_1-2c 代入方程(15-30)并对 c 微分。
5. (a)工人的预期效用是 $\pi f(ew)+(1-\pi)f(w)-g(e)$。(c)如果 $f''>0$ 则工人是爱风险的。

第 16 章

1. 间接利润函数是 w_1 的凸函数。
2. $E[P_{\min}(n)]=\int_0^1(1-p)^n\mathrm{d}p=1/(n+1)$。选择 n 来极小化 $\beta E[P_{\min}(n)]+cn$。
3. (a)期望最小价格是 $\int_0^d(1-p/\mathrm{d})^n\mathrm{d}p=\mathrm{d}/(n-1)$。(b)$H(x)=\beta\int_0^x(p/\mathrm{d})\mathrm{d}p=\beta x^2/2\mathrm{d}$。(c)期望数是 $1/F(p^*)=\mathrm{d}/p^*$。利用从(b)得到的 p^* 的值。

第 17 章

1. (a)$z^*=700$。(b)$u_1=10, u_2=10, u_3=0$。(c)产业 1 是相对土地密集型。因此，如果额外增加一单位劳动，产业 1 将扩张而产业 2 将收缩。(f)如果土地密集产业价格上升，土地价格 u_1 上升的比例比 p_1 上升的比例更高。劳动的影子价格必下降。(g)无。
3. $z^*=37$。

4. $z^*=7000$。

第 18 章

1. 产出供给函数是产出价格的 0 次齐次函数。此结果来自欧拉定理在这些函数上的应用。
2. 这是 14.5 节加总定理的直接应用。
5. (b)此生产可能性边界并不一定是凹的，这是因为不管生产函数是什么，只要边际产品和资源是有限的，某种产品量固定时另一种产品量的极大值是有限的。因此，这个问题需要的曲率性质是凸的等产量线，即拟凸性。因此生产可能性边界可能凸向原点，例如，两个生产函数都是规模报酬递增，且产出的极大值完全可以出现在任一轴上。
8. (c)和(d)：利用包络定理。
10. 线性生产函数时，总要素成本等于总产出，即：$w(p_1,p_2)L+r(p_1,p_2)K\equiv p_1y_1(p_1,p_2,L,K)+p_2y_2(p_1,p_2,L,K)$。对此等式微分。
11. 如果 Stopler-Samuelsom 和 Hecksherohlin 定理的条件满足，阐述是正确的。

第 19 章

1. 当资源有限欲望无限时，分配的帕累托曲线意味着一个人得到更多时另一个人得到的就更少。
2. $4y/y_1-x/x_1=3$。
4. 一个完全价格歧视的垄断者当有消费者愿意支付 MC 以上价格时就会生产。因此，除非垄断者是交换中的惟一得益者，帕累托条件 $p=MC$ 是满足的。如果垄断者的收入弹性与其他消费者不同，仅由于收入的再分配就会改变总产出。
5. (a)如果交易成本低，则是
   (b)$A:1000+P/2;B:1500+P/2;2500+P$。(c) $A:800+P;B:1200+P;2000+2P$。
   (d)如果 $500<P<600$，A 的收益将比 B 的损失大。因交易成本为 0，A 和 B 将交易至分享总收益。
6. 效用边界的曲率对效用的单位比较敏感。它的负斜率是置乏的结果。
7. 取决于交易成本。
8. (a)奇怪的。(b)当产权界定或贯彻成本比较高时，是一般的。

第 20 章

1. $x^*(t)=-e^2k(-t)+k(t)$；$\lambda^*(t)=4e^2k(-t)$；$u^*(t)=2e^2k(-t)$，其中 $k(t)=[e^t/(1-e^2)]$。
2. $x^*(t)=t+2$；$u^*(t)=1$；$\lambda^*(t)=-t+2$。
3. $x^*(t,\alpha,x_0)=\alpha(t-1)+(x_0+\alpha)k(t)-e^2(x_0+\alpha)k(-t)$；$\lambda^*(t,\alpha,x_0)=2(x_0+\alpha)k(t)$；$u^*(t,\alpha,x_0)=\alpha t+2(x_0+\alpha)k(t)$。
   其中 $k(t)=[e^t/(1-e^2)]$。
7. $x^*(t,\alpha)=(e^2/2\alpha)e^{-t}+(1/2\alpha)+[(10\alpha-e^2-1)/2\alpha]e^t$；$\lambda^*(t,\alpha)=2(1-e^{2-t})$；$u^*(t,\alpha)=(e^{2-t}-1)/\alpha$。

词 汇 表

Addilog indrect utility function	对数可加间接效用函数
Adding-up theorem	加总定理
Adjoint	伴随矩阵
Adjoint equation	伴随方程
Adverse selection	逆选择
Agents	代理人
Akerlof, George	
Alchian/Allen substitution theorem	艾伦替代定理
Alchian, Armen	
Algorithm	算法
Allen elasticities	艾伦弹性
Allen R. . G. D.	
Allen, William	
Almost ideal demand system (AIDS)	近乎理想需求系统
Analytic functions	解析函数
Arrow, Kenneth J.	
Arrow-Pratt measure of absolute risk aversion	绝对风险厌恶的阿罗-帕累特测度
Assertions	断言
Assumptions	假定
Autonomous problems	自治问题
Average cost	平均成本
Average cost curve	平均成本曲线
Azzi, Cory	
Barzel , Yoram	
Basic feasible solution	基本可行解
Becker, Gary S	
Behavior under uncertainty	不确定性下行为
allocation of wealth to risky assets	分散在风险资产中的财富
cardinal/ordinal utility	序效用函数
comparative statics	比较静态
diversification	多样化
expected utility hypothesis	预期效用假定
Friedman-Savage proposition	

Gambling 赌博
increases in riskiness 风险增加
insurance 保险
mean-preserving spreads 均值不变扩展
mean-variance utility function 均值-方差效用函数
output decisions 产出决策
probability 概率
risk aversion 风险厌恶
specification of preferences 偏好详述
state specification approach 状态指定方法
Von Neumann-Morgenstern utility function 冯纽曼-摩根斯坦 效用函数
Behavioral postulates 行为假定
Bellman, Richard
Benchmark 基准
Bergson, Abram
Bernoulli Daniel
Bernoulli, Johann
Bertonazzi, Eric
Blackorby, C,
Blumberg, R
Bohm-Bawerk, E
Bonds 债券
Borcherding, Thomas
Bordered Hessian matrix 加边海塞矩阵
Bowley, A. L.
Bronfenbrenner, James
Budget constraint 预算约束
Calculus of variations 变分法
Capital goods 资本品
Capital utilization 资本利用
Caputo , Michael R.
Caprto's theorem
Cardinal utility
Cardinalists
Chain rule 链导法则
Characteristic equation 特征方程
Cheung, Steven N. S.
Cho, In-Koo

Choice	选择
Christensen, Laurits R.	
Classical paradigm	经典范例
Closed economy	封闭经济
Coase, Ronald	
Coase theorem	科斯定理
Cobb-Douglas production function	科布-道格拉斯生产函数
Cobb-Douglas utility function	科布-道格拉斯效用函数
Coefficient of absolute risk aversion	绝对风险厌恶系数
Coefficient of relative risk aversion	相对风险厌恶系数
Common property	共有财产
Comparative advantage	比较优势
Comparative dynamics	比较动态
Comparative statics	比较静态
cost function	成本函数
household production functions	家庭生产函数
nonlinear models	非线性模型
primal-dual analysis	初始-对偶分析
principal-agent model	委托-代理人模型
search	搜索
traditional methodology	传统方法
uncertainty	不确定性
unconstrained models	无约束模型
Compensated demand curves	补偿需求曲线
Compensating differentials	补偿微分
Compensating variation	补偿变分
Competitive bidding	竞争报价
Composite commodity	复合商品
Composite commodity theorem	复合商品定理
Compounding	混合
Concave downward	下凹
Concave functions	凹函数
Concave upward	上凹
Conditional demands	条件需求
Hicksian demand	希克斯需求
Marshallian demand	马歇尔需求
Conflict curve	冲突曲线
Conjugate pairs theorem	共轭定理

Constant-elasticity-of-substitution(CES)production function	替代弹性不变生产函数
Constant-elasticity-of-substitution(CES)utility function	替代弹性不变效用函数
Constant marginal utility of money	货币边际效用不变
Constant returns to scale	规模报酬不变
Constant-elasticity-of-scale production functions	规模弹性不变生产函数
Constrained maximization	有约束极大化
envelope theorem	包络定理
first-order necessary conditions	一阶必要条件
geometry	几何学
more than one constraint	多约束
Constraints	约束
Consumer behavior(see Derivation of consumer demand functions)	消费者行为
Consumer-choice theory	消费者选择理论
Consumer's surplus	消费者剩余
Continuous compounding	连续混合
Contract curve	契约曲线
Contracts and incentives	契约和激励
efficiency wages	效率工资
incomplete contracts	不完备契约
monitoring costs	监督成本
Nash bargaining solution	纳什交易解
organization of production	生产组织
ownership structure	所有权结构
performance measurement	业绩测量
team production	组队生产
Control theory problems	控制理论问题
(See also Resource allocation over time)	
Control variable	控制变量
Convergence	收敛
Converse of Euler's theorem	欧拉定理逆定理
Convex combination	凸组合
Convex functions	凸函数
Convex set	凸集合
Convex to origin	凸向原点
Convexity of indifference curves	无差异曲线的凸性
Corner	角点
Corporate bonds	公司债券
Correspondences	通信

Cost function	成本函数
Cost minimization	成本极小化
Cost minimization model	成本极小化模型
Cost minimization with linear segment isoquants	线性等产量线时的成本极小化
Costate equation	主方程
Courant, Richard	
Covariance	斜方差
Cramer's rule	克莱姆法则
Crop rotation	轮作
Cross elasticity	交叉弹性
Crusoe, Robinson	
Cubic function	立方函数
Current-value multiplier	现值乘子
Daily compounding	日常组合
Dantzig, George	
Deadweight loss	自重损失
Deaton, Angus	
Debreu, Gerard	
Derivation of consumer demand functions	消费者需求函数的导出
division of labor	劳动的分工
elasticity formulas	弹性公式
income-consumption path	收入-消费径路
labor-leisure choice	劳动-闲暇选择
Lagrange multiplier	拉格朗日乘子
Marshallian demands	马歇尔需求
Nonsatiation	不满足
Roy's identity	罗伊等式
separable utility functions	可分效用函数
Slutsky equations	司勒斯基方程
Slutsky versus Hicks compensations	司勒斯基补偿对希克斯补偿
Substitution	替代
utility functions	效用函数
utility maximization	效用极大化
utility maximization/cost minimization	效用极大化/成本极小化
Derivation of cost functions	成本函数的导出
average cost	平均成本
average cost curve	平均成本曲线
cost curve	成本曲线

cost function	成本函数
cost minimization problem	成本极小化问题
duality of cost and production functions	成本和生产函数的对偶性
factor demand curves	要素需求曲线
factor demands	要素需求
long-run competitive equilibrium	长期竞争均衡
marginal cost	边际成本
profit maximization	利润函数
Derivation of cost functions(Cont.)	成本函数的导出
reciprocity conditions	交互条件
Derivatives	导数
Partial	局部的
Second	第二
Determinant of order	
Deteminants	行列式
Diamond-water paradox	钻石-水矛盾
Diet problem	饮食问题
Diewert, W. Erwin	
Differential equations	微分方程组
"Difficulty in the Concept of Social Welfare, A"	社会福利概念中的困难
Diminishing marginal utility	递减的边际效用
Discount rate	折扣率
Dissaving	动用储蓄
Distribution function	分布函数
Divergent	分歧的
Diversification	多样化
Division of labor	劳动分工
Dot product	
Double moral hazard	双倍道德风险
Dual problem	对偶问题
Dual variables	对偶变量
Duality theory	对偶理论
indirect utility function	间接效用函数
Dupuit, Jules	
Dynamics	动态
Easterlin, Richasrd	
Edgeworth, F. Y.	
Edgeworth-Bowley box diagram	

Edlefsen, LEE
Education signaling 教育信号
Efficiency locus 效率轨迹
Effciency wages 效率工资
Efficiency in consumption 消费中的效率
Efficiency in production 生产中的效率
Ehrenberg, Ron
Elasticity 弹性
  factor demand curves 要素需求曲线
  output 产出
  own 拥有
Elasticity of demand 需求弹性
Elasticity of substitution 替代弹性
Empirical estimation 经验估计
Engle curves 恩格尔曲线
Envelope theorem 包络曲线
  History 历史
  models with constraints 有约束模型
  unconstrained estimation 无约束估计
Equality constraint 等式约束
Equilibrium conditions 均衡条件
Equilibrium price dispersion 均衡价格分散
Equivalent variation 同等变化
Estimation of empirical demand relations 经验需求关系估计
Euclidean m-space 欧氏 m 维空间
Euclidean n-space 欧氏 n 维空间
Euler 欧拉
Euler-Lagrange condition 欧拉－拉格朗日条件
Euler's theorem 欧拉定理
Evening out consumption
Expansion by alien cofactors
Expected utility hypothesis 预期效用假定
Expected value 预期值
Expenditure function 支出函数
Explanation 解释
Factor demand curves 要素需求曲线
  cross elasticity 交叉弹性
  Euler relations 欧拉关系

Homogeneity	同次性
Lagrange multiplier	拉格朗日乘子
long run	长期
output elasticity	产出弹性
own elasticity	自身弹性
Factor price equalization theorem	要素价格均等化定理
Fads and fashions	时尚和样式
Fallacy of affirming consequent	
Farrell, M. J.	
Faustmann solution	
Favorable selection	偏好的选择
Feasible region	可行区域
Firm	公司
Fisher, Irving	
Fisher equation	费雪方程
Fisher separation theorem	费雪分离定理
Fisherian investment	
Fixed-coefficient production functions	固定系数生产函数
Fixed-coefficient technology	固定系数技术
Forcing contract	
Four-equation model	四方程模型
Free-rider problem	免费搭车问题
Freeway congestion	公路堵塞
Friedman, Milton	
Friedman-Savage proposition	
Frontier	边界
Functional	功能
Functional forms	功能形式
Functions	功能
Gambling	赌博
Geary, R. C.	
General equilibrium	一般均衡
comparative statics	比较静态
dual problem	对偶问题
Heckscher-Ohlin theorem	
linear activity analysis model	线性活动分析模型
linear models	线性模型
nonlinear models	非线性模型

General equilibrium(Cont.)	一般均衡
Rybczynski theorem	
simplex algorithm	单纯形算法
Stolper-Samuelson theorem	
tangency conditions	相切条件
two-good two-factor model	两商品一两要素模型
General equilibrium theory	一般均衡理论
Generalized Leontief cost function	一般的列昂惕夫成本函数
Giffen good case	基芬商品例子
Gould, John	
Graphical solution of linear programming problem	线性规划问题的图解法
Gross, Milt	
Gross substitues/complements	交叉替代/补充
Grossman, Sanford	
Hadley, George	
Hamburger	
Hamcock, H.	
Hart, Oliver	
Harvesting renewable resource	
Hausman, Jerry	
Heckscher-Ohlin theorem	
Heiner, Ron	
Hemenway, David	
Hessian matrix	海赛矩阵
Hicks, Sir John R.	
Hicks' laws	希克斯法则
Hichs' third law	希克斯第三法则
Hicksian compensation	希克斯补偿
Hicksian demands	希克斯需求
Hidden action/information models	隐藏行动/信息模型
Holmes, Joel	
Homeslead acts	
Homogeneity	同次性
compensated demand curves	补尝需求曲线
factor demand curves	要素需求曲线
linear	线性的
Homogeneous equation	相似的方程
Homogeneous functions	齐次函数

Homothetic functions	同势函数
Homothetic translog expenditure function	对数化同势支出函数
Homotheticity	同势性
Hotelling, Harold	
Household production functions	家庭生产函数
Housing	住房供给
Houthtakker, H. S.	
Hurwicz, Leonid	
Identities	恒等式
Identity matrix	恒等矩阵
Impatience	急燥
Imperfect information(see Markets with imperfect information)	不完备信息
Implicit function theorem	隐函数定理
Implied choice functions	隐含的选择函数
Imputed rent	归因租金
In-Koo Cho	
Incentive compatibility constraint	激励相容约束
Incentives	激励
(See also Contracts and incentives)	
Income	收入
Income-compensated demand curves	补偿收入需求曲线
Income-consumption path	收入-消费路径
Income effects	收入影响
Income tax	收入税
Incomplete contracts	不完备契约
Indirect addilog utility function	间接可加对数效用函数
Indirect cost function	间接成本函数
(See also Cost function)	
Indirect objective function	间接目标函数
Indirect utility function	
Inelastic	无弹性
Inequality constraints	不等式约束
Inferiority	次等
Information	信息
Informational rent	信息租金
Inner product	内部产品
Input-output coefficients	投入-产出系数
Insurance	保险

Integrability	可积性
Interest rate	利息率
Interior maximum	内部极大值
Intermediate goods	中间产品
Intertemporal choice	跨期选择
detemination of interst rate	利息率的确定
Fisher separation theorem	费雪可分定理
Fisherian investment	
n-period utility maximization	n期效用极大化
real versus nominal interest rates	实际利率对名义利率
resource allocation	资源分配
stocks and flows	存量和流量
time preference	时间偏好
Inverse(matrix)	逆矩阵
Invisible hand	看不见的手
Isocost lines	等成本线
Isoquant	等产量线
Jacobian determinant	雅可比行列式
Jensen's inequality	
Jorgenson, Dale W.	
Kamien, M. I.	
Klein, L. R.	
Knight, Frank	
Kochin, Levis	
Koopmans, T. C	
Kreps, David M.	
Kuhn, H. W.	
Kuhn-Tucker conditions	库恩-塔克条件
Kuhn-Tucker saddle point theorem	库恩-塔克鞍点定理
L'Hôpital's rule	
Labor-leisure choice	劳动-闲暇选择
Lagrange multiplier:	拉格朗日乘子：
as dual varables	作对偶变量
as shadow price	作影子价格
constrained maxinization	有约束极大化
Lancaster, Kelvin J.	
Lau, Lawrence J	
Law of diminishing marginal technical rate of substitution	边际技术替代率递减法则

Law of diminishing returns	收益递减法则
Law of the mean	均值法则
Le Châte lier effects	
Legendre condition	
Leontief, Wassily	
Leontief input-output models	列昂惕夫投入-产出模型
Leontief-style technology	列昂惕夫型技术
Level curves	等水平曲线
Convexity	凸性
production function, of	生产函数
Life cycle hypothesis	生命周期假说
Linear activity analysis model	线性活动分析模型
Linear Expenditure System (LES)	线性支出模型
Linear first-order differential equations	线性一阶微分方程
Linear homogeneity	线性齐次
Linear models	线性模型
(See also General equilibrium)	
Linear programming	线性规划
Lipsey, R. G.	
Lipsey, R. D.	
Lump-sum tax	一次性税收
Maclaurin series	
Maloney, Michael	
Many-good, many-factor generalization	多商品，多要素扩展
Marginal cost	边际成本
Marginal cost function	边际成本函数
Marginal rate of substitution	边际替代率
Marginal revenue	边际收益
Marginalist paradigm	边际主义范例
Market failure	市场失灵
Market signaling	市场发送信号
Markets with imperfect information	不完备信息市场
adverse selection	逆选择
monopolistic screening	垄断屏蔽
sequential search	顺序搜索
signaling	发送信号
value of information	信息值
Marriage squeeze	婚姻压挤

Marshall, Alfred
Matrices 矩阵
  Hessian 海赛
  Inverse 逆
  Multiplication 乘
  negative definite 负定
  negative semidefinite 负半定
  nonsingular 非奇异
  orthogonality 正交
  rank 秩
  singular 奇异
  symmetric 对称
Matrix notation 矩阵符号
Matrix operations 矩阵运算
Maximization with inequality/nonnegativity constraints 有不等式/非负约束的极大化
    adding-up theorem 加总定理
    inequality constraints 不等式约束
    nonlinear programming 非线性规划
    nonnegativity 非负性
    saddle point theorem 鞍点定理
    separating hyperplane theorem 分隔超平面定理
Maximizing average sustained yield
Maximizing behavior 极大化行为
(See also Profit maximization)
Maximum principle 极大化原则
McCormick, Robert
McElroy, F. W.
Mean value theorem 均值定理
Models
Modigliani, Franco
Money illusion 货币幻觉
Money-income-held-constant demand curves 保持货币收入不变的需求曲线
Monopolistic price discrimination 垄断价格歧视
Monotonic transformations 单调转置
Moore, John
Moral hazard 道德风险
Morgensterm, O.
Mosak, J.

Muelbauer, John	
Multitask agency	
Myopia	近视
n-period utility maximization	n期效用极大化
Nash, John	
Negative definite subject to constraint	受约束负定
Nonconvex sets	非凸集合
Nonquasi-concave utility functions	非拟凹效用函
Optimal control theory(see resource allocation over time)	最优控制理论
Optimal solution	最优解
Ordinal utility	序效用函数
Ordinality of utility functions	效用函数的可序性
Orthogonal matrix	正交矩阵
Osborne, Martin	
Output elasticity	产出弹性
Output price elasticity	产出价格弹性
Overall Pareto optimality	总帕累托最优性
Overall utility frontier	总效用边界
Own elasticity	自弹性
Papandreon, Andreas	
Pareto, Vilfredo	
Pareto conditions	帕累托条件
Pareto-efficient	帕累托有效
Pareto-optimal	帕累托最优
Pareto-superior	帕累托较优
Partial derivatives	偏导
Partial equilibrium	局部均衡
Partial utility frontier	局部效用边界
Participation constraint	参与约束
Pascal, Blaise	
Permanent income hypothesis	持久收入假说
Perron-Frobenius theorems	
Phase diagram	相位图
Pigou, A. C.	
Planning period	规划期
Plourde, C. G.	
Poll tax	
Pollak, Robert A.	

Pontryagin, L. S.	
Possibility theorem	可能性定理
Postulates	假定
Pratt, John	
Preferences	偏好
Present value	现值
Price controls	价格控制
Price discrimination	价格歧视
Price-earnings ratio	价格-收入比值
Primal-dual objective function	初始-对偶目标函数
Primont D	
Principle of optimality	最优性原则
Principles of Economics	经济学原则
Principles of Political Economy and Taxation, The	
Priority of needs fallacy	
Private property	私有产权
Probability	概率
Probability density function	概率密度函数
Probability function	概率函数
"Problem of Social Cost, The"	
Production	
Production decisions	生产决策
Production function homogeneous of degree	齐次生产函数
Production functions	生产函数
CES	弹性不变
Cobb-Douglas	柯布-道格拉斯
constant-returns-to-scale	规模报酬不变
and cost functions	成本函数
fixed-coefficient	固定系数
homogeneous	齐次
homothetic	同位
household	家庭
quasi-convex	拟凸
$y = x_1 x_2$	
Production possibilities frontier	生产可能性边界
Profit function	利润函数
Profit maximization	利润极大化
analysis of finite changes	有限变化分析

cost minimization, and,	成本极小化
elasticities	弹性
first-order necessary conditions	一阶必要条件
homogeneity of demand/supply functions	需求/供给函数的齐次性
Le Châtelier principle	
sufficient conditions for maxima/minima	极大值/极小值的二阶条件
supply function	供给函数
Taylor series for functions of several variables	多变量函数的泰勒级数
Profits	利润
Property rights	产权
Public goods	公共物品
Pure exchange	纯交换
Pure income	纯收入
Pure substitution effect	纯替代影响
Quadratic form	二次型
Quasi-concavity	拟凹
Quasi-convex production functions	拟凸生产函数
Raitffa, H.	
Random variables	随机变量
Rank:	秩
Matrix	矩阵
utility function	效用函数
Real-income-held-constant demand curves	实际收入不变需求曲线
Real rate of interest	实际利息率
Reciprocity conditions	交互条件
Reciprocity relation	交互关系
Reciprocity theorems	交互定理
Reduced equation	化简方程
Refutable propositions	可证伪的命题
Relations	关系
Relative minima/maxima	相对极小值/极大值
Reservation wages	保留工资
Resource allocation over time	跨时资源分配
autonomous problems	自治问题
calculus of variations	变分法
capital utilization	资本利用
Resource allocation over time(Cont.)	跨时资源分配
Dynamics	动态

endpoint(transversality)conditions	端点(横截性)
general form of control theory problems	控制理论问题的一般形式
harvesting renewable resource	利用可恢复资源
intertemporal choice	跨期选择
solution to comtrol problem	控制理论的解
solutions to differential equations	微分方程组的解
sufficient conditions	充分性条件
Revealed preference and exchange	显示偏好和交换
Ricardo, David	
Riley, John	
Risk	风险
Risk aversion	风险厌恶
Road congestion	道路堵塞
Robbins, Herbert	
Roy, René	
Roy's identity	罗伊等式
Rubin, H.	
Russell, R. R.	
Rybczynski theorem	
Saddle point	鞍点
Saddle point theorem	鞍点定理
Salop, L. J.	
Schwartz, N, L.	
Screening models	屏蔽模型
Second derivative	二阶导数
Second law of demand	需求第二法则
Second partials	二阶偏导
Segall, Joel	
Separability	可分性
Separable utility functions	可分效用函数
Separating equilibrium	分离均衡
Separating hyperplane theorem	分离超平面定理
Sequential search	顺序搜索
Shadow price	影子价格
Sharecropping	
Shepard's lemma	
Shipping the good apples out	

Short-run Hicksian demand	短期希克斯需求
Short-run Marshallian demand	短期马歇尔需求
Signaling	发送信号
Silberberg, Eugene	
Simplex algorithm	单纯形算法
Simultaneous differential equations	齐时微分方程组
Simultaneous solutions	齐时解
Single-crossing property	单交叉点性质
Singular matrix	奇异矩阵
Slack variables	松弛变量
Slater's constraint qualification	
Slope	
Slutsky, E	
Slutsky compensation	司勒斯基补偿
Slusky equations	司勒斯基方程组
elasticity form	弹性形式
modern derivation	现代导出
traditional derivation	传统导出
Small country assumption	小国假定
Small country models of international trade	国际贸易的小国模型
Smart, William	
Smith Adam	
Social margimal costs	社会边际成本
Social science	社会科学
Social welfare runctions	社会福利函数
Specialization	专业化
Spence, Michael	
St, Petersburg paradox	
Stage Ⅰ	
Stage Ⅱ	
Stage Ⅲ	
State-contingent commodity	状态依存商品
State equation	状态方程
State specification approach	状态指定方法
State variable	状态变量
Stigler, George	
Stiglitz, Joseph	
Stocks(equities)	股票

Stolper-Samuelson theorem
Stone, Richard
Stone-Geary function
Strictly concave 严格凹
Strong axiom of revealed preference 显示偏好强公理
Strongly separable 强可分
Strotz, Robert
Substitution effects 替代影响
Substitution postulate 替代假定
Symmetric matrix 对称矩阵

Takayama A.
Tangency conditions 相切条件
Tangency solution:
  cost minimization and utillity maximization problems 成本极小化和效用极大化问题
  cost minimization problem 成本极小化问题
Tastes 味道
Taxation 征税
Taylor series 泰勒级数
Taylor series for functions of several variables 多变量函数的泰勒级数
Taylor's theorem 泰勒定理
Team production 组队生产
Test conditions 检验条件
Theobald, Neil