金融经济学导论

Chapter 1 Intertemporal Choice

1.1 概述

1.1.1 金融经济学的基本框架

金融学的核心问题是**资源的有效配置**，而资源配置的效率主要体现在两个层面：在**微观层面**，配置效率关注的是经济参与者如何使用他们所拥有的资源来最优地满足他们的经济需要；在**宏观层面**，配置效率关注的是稀缺资源如何流向最能产生价值的地方。资源的配置是通过在市场特别是金融市场上的交易来完成的，金融市场是交易**金融要求权**（financial claim）——即对未来资源的要求权的场所。因此，**金融学关注的焦点是金融市场在资源配置中的作用和效率**。具体而言，它分析的是每一个市场参与者如何依赖金融市场达到资源的最优利用，以及市场如何促进资源在参与者之间进行有效配置。

$$\text{建立基本框架}\begin{cases}\text{个体参与者如何作出金融决策，尤其是在金融市场中的交易决策}\\ \text{个体参与者的这些决策如何决定金融市场的整体行为，特别是金融要求权的价格}\\ \text{这些价格如何影响资源的实际配置}\end{cases}$$

Robinson Crusoe’s decision is simultaneously one of consumption and investment. In order to decide, he needs two types of information:

(1) He needs to understand his own subjective trade-offs between consumption now and consumption in the future. This information is embodied in the utility and indifference curves. (2) He must know the feasible trade-offs between present and future consumption that are technologically possible. These are given in the investment and production opportunity sets.

The optimal consumption/investment decision establishes a subjective interest rate. It represents unique optimal rate of exchange between consumption now and in the future. Thus interest rates are an integral part of consumption/investment decision. One can think of the interest rate as the price of deferred consumption or the rate of return on investment.

1.1.2 基本假设

Consider a world without uncertainty where resources may be consumed today or invested and consumed tomorrow. Given an initial consumption bundle endowment, individuals wish to maximize their utility.

We want to show how the presence of a production technology and a capital market yields a Pareto optimal outcome and that the production decision is independent of the subjective preferences of each individual.　Our model includes the **following assumptions**:

(1) Only two periods (严格的说，应该是 two dates: t=0,1, one time period), decisions made in two period context

(2) All wealth is consumed at these two dates

(3) Wants are insatiable (marginal utility is always positive, $U'>0$)

(4) Diminishing marginal utility ($U''<0$)

(5) Individual has an original endowment y^* (manna from heaven)

(6) No firms, no risk, no transactions costs, no taxes

(7) 以一种物品作为计量单位，其余的物品均换算成该物品

Individuals are endowed with income at the beginning of the period, y_0, and at the end of the period, y_1. Individuals must decide how much to consume now, C_0, and how much to consume at the end-of-period, C_1.

个体的效用函数为$U(C_0,C_1)$。我们用微观经济学中的边际分析来研究不同时间的消费/投资问题。Aim: to select optimal C_0, C_1, and P_0, P_1

1.1.3 效用函数

$C\uparrow \rightarrow TU\uparrow$. The marginal utility of consumption is always positive but decreasing i.e. individuals prefer more consumption to less, but the increments in utility become smaller and smaller.

当 C 低时，每单位 C 具有高效用值；当 C 高时，每单位 C 具有低效用值。

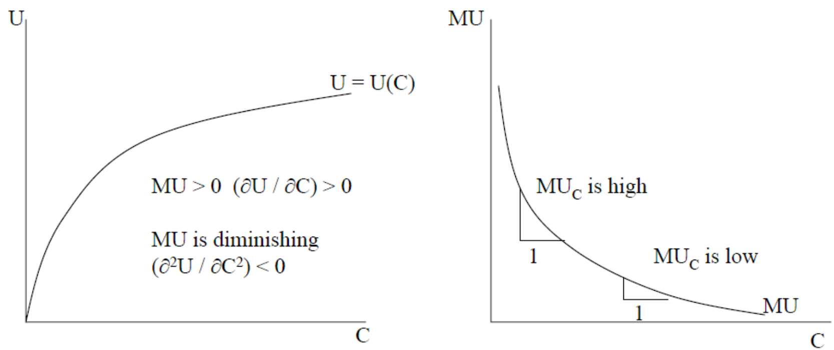


Fig. 1.1 Total utility and marginal utility of consumption

1.1.4 无差异曲线(Indifference curves)

无差异曲线描绘的是不同的个体C_0和C_1的组合。负斜率是因为随着C_0的减少，必须增加C_1才能保持同样效用水平。ICs representing the time preference of consumption.

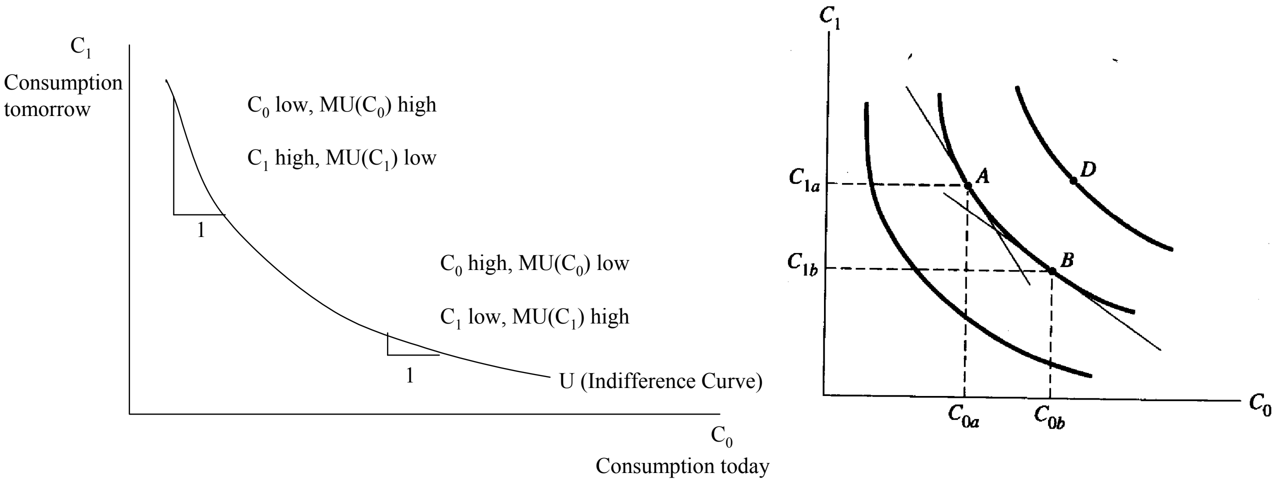


Fig. 1.2 Indifference curves representing the time preference of consumption

The shape of the indifference curve is important. The slope of an indifference curve at any point gives the **marginal rate of substitution** (MRS) between C_0 and C_1 at that point. The MRS represents the trade-off that the individual is willing to make between consumption today and consumption tomorrow. Mathematically,

$$MRS_{C_1}^{C_0} = \left.\frac{\partial C_1}{\partial C_0}\right|_{U=\text{constant}} = \frac{\partial U / \partial C_0}{\partial U / \partial C_1} = -(1+r_i) \tag{1.1}$$

Equation (1.1) can be read as follows: The marginal rate of substitution consumption today and end-of-period consumption, $MRS_{C_1}^{C_0}$, is equal to the slope of a line tangent to an indifference curve given constant total utility. This in turn is equal to the individual's **subjective rate of time preference**, $-(1+r_i)$.

This means that the individual would require MRS units of C_1 to give up one unit of C_0 to remain equally happy. This reveals the individual's **subjective rate of time preference**, r_i. 因此，我们也可以把它视为一种利率。这种利率说明，在保持（总）效用不变的情况下，现在少消费一个单位的消费品（即投资一个单位），将来应该有多少额外的消费（即投资的回报）。

在同一条无差异曲线上，每一点的主观时间偏好率都不同。在图 1.2 中，由式（1.1）可知，左上角的主观偏好率大于右下角的主观偏好率。

边际替代率递减规律：在维持效用水平不变的前提下，随着现在商品消费数量的（连续）增加，消费者愿意放弃的将来的消费数量是递减的。

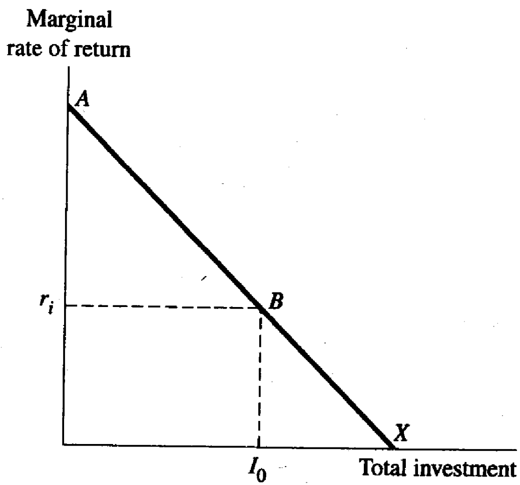
1.2 Consumption without Investment and Capital Market

Here, each individual simply consumes their endowment. There is no productive capability to transform current consumption into future consumption, and the individual is not allowed to trade with other individuals. So given endowment y^*, the individual achieves a utility level of U_1.

1.3 Consumption and Investment without Capital Market

1.3.1 投资机会(Investment Opportunities Set, IOS)

We assume that each individual in the economy has a schedule of productive investment opportunities that can be arranged from the highest rate of return down to the lowest(Fig. 1.3).



Rational investors will channel their limited investment funds into projects that earn the highest possible rate of return. Any decreasing function would graph the investment opportunities schedule. This implies diminishing marginal returns to investment because the more an individual invests, the lower the rate of return on the marginal investment. Also, all investments are assumed independent of one another and perfectly divisible.

1.3.2 生产机会集（Production Opportunity Set, POS）

给定技术水平，生产机会集描绘出对于**任意给定** C_0 **的水平，** C_1 **可行的最大数量**。生产机会集如图 1.4 所示。

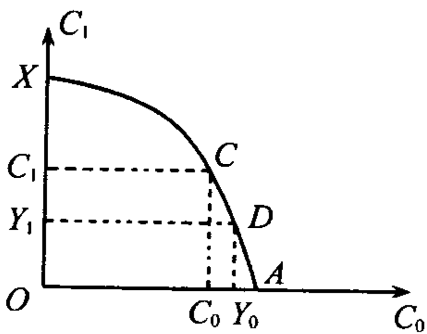


图 1.4 中的曲线表示的是通过投资可以获得的 0 期和 1 期的消费前沿。*D* 点表示不投资，个体只消费自己的禀赋。而 *X* 点表示现在不消费，全部用于投资而得到将来的消费。*B* (*C*)点表示，在 0 期一部分用于消费，另一部分用于投资而获得的 0 期和 1 期的消费。

曲线 $\overset{\frown}{ABX}$ 上每一点的切线的斜率表示，通过生产投资，现在每放弃一个单位的消费，将来可以获得多少单位的消费。我们称之为生产/投资机会集的**边际转换率**。

边际转换率（marginal rate of transformation, *MRT*）。A 点的斜率最大，表示 *MRT* 最大。由于不存在交换的机会，个体不能提前消费将来的消费品，所以曲线的 $\widehat{ABX}$ 部分实际上是不可能达到的。

图 1.3 与图 1.4 是对应的，the line tangent to point A has the highest slope in Fig. 1.4 and represents the highest rate of return at point A in Fig. 1.3.

生产机会允许现在储蓄/投资一个单位在未来转换成产出或财富。假设：

（1）投资者是从较高的收益率到较低的收益率进行安排；

（2）随着全部投资的增加，边际收益率递减；

（3）全部投资相互是独立的；

（4）全部投资绝对可分的（perfectly divisible）。

1.3.3 生产机会与偏好组合

在没有生产机会时，个体将不得不在禀赋点消费。如图 1.5 所示。

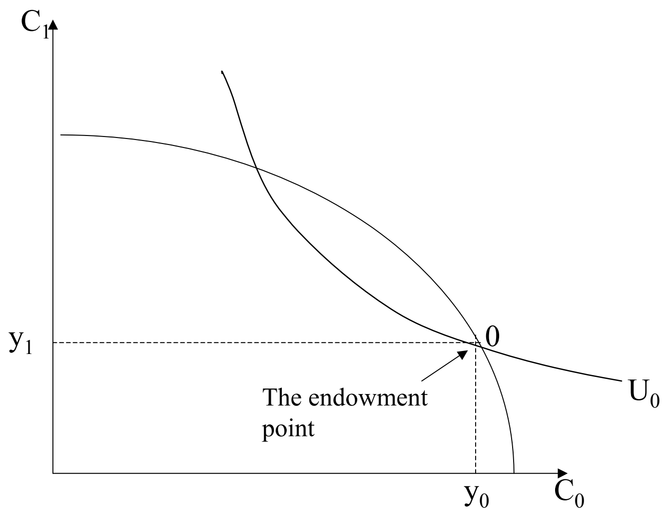


Fig. 1.5 The consumption without productive opportunity

We extend the theory by introducing productive opportunities that allow a unit of current savings or investments to be turned into more than one unit of future consumption.

我们把个体消费的时间偏好集图 1.2 和生产投资机会集图 1.4 放在一起来决定个体的最优消费/投资，如图 1.6 所示。

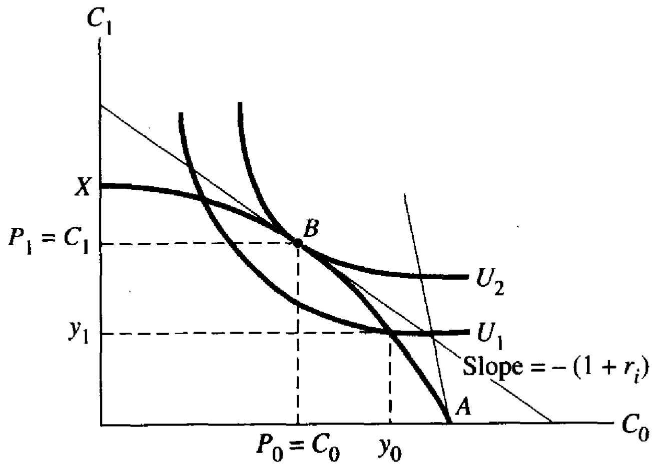


Fig. 1.6 Indifference curves and production opportunity set

An individual endowed with a resource bundle (y_0, y_1) that has utility U_1 can move **along the production opportunity set** to point B, where the indifference curve is tangent to it and he or she receives the maximum attainable utility, U_2. Because current consumption, C_0, is less than the beginning-of-period endowment, y_0, the individual has to invest. The amount of investment is $I_0 = y_0 - C_0$. Of course, if $C_0 > y_0$, he or she will disinvest, in the absence of capital markets, there are no opportunities to exchange intertemporal consumption among individuals such that the individual starts with the bundle (y_0, y_1).

Note that the marginal rate of return on the last investment made (i.e., MRT, the slope of a line tangent to the investment opportunity set at point B) is exactly equal to the investor's subjective time preference (i.e., MRS, the slope of a line tangent to his or her indifference curve, also at point B).

In other words, the investor's subjective marginal rate of substitution is equal to the marginal rate of transformation offered by the production opportunity set:

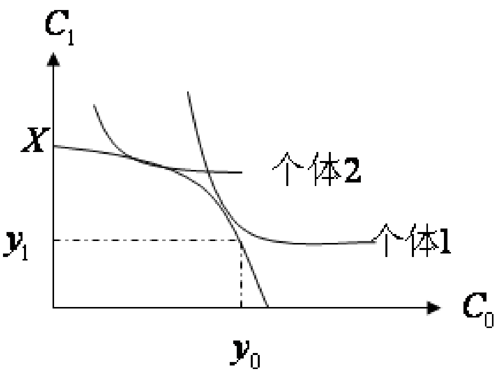
$$MRT = MRS$$

The individual decision maker starts with an initial endowment (y_0, y_1) and **compares the marginal rate of return** on a dollar of productive investment (or disinvestment) **with his or her subjective time preference**. An individual will make all investments in productive opportunities that have rates of return higher than his or her subjective rate of time preference r_i.

If the rate on investment is greater he or she will gain utility by making the investment. This process continues until the rate of return on the last dollar of productive investment just equals the rate of subjective time preference (at point B). Note at point B the individual's consumption in each time period is exactly equal to the output from production (i.e., $P_0 = C_0$ and $P_1 = C_1$).

1.3.4 生产机会的好处

在缺少投资机会时，个体被迫在 A 处也就是他的禀赋处消费。投资机会扩展了允许的机会，个体的状况发生变化。$MRT > MRS$（POS 的斜率>效用函数的斜率），即：从**投资获得的收益>个体放弃现在消费所要求的收益$\Rightarrow$增加投资数量**。



Without the existence of capital markets, individuals with the same endowments and same opportunity set may choose completely different investments, because their preferences differ. This is shown in Fig. 1.7 (left Fig.). Individual 2, who has a lower rate of time preference (Why?) will choose to invest more than individual 1.

1.4 Consumption with Capital Market but no Production Opportunity

Intertemporal exchange of consumption bundles will be represented by the opportunity to borrow or lend unlimited amounts at *r*, a market-determined rate of interest. (The market rate of interest is provided by the solution to a general equilibrium problem. For simplicity, we assume that the market rate of interest is given.)

Financial markets facilitate the transfer of funds between lenders and borrowers. Assuming that interest rates are positive, any of funds lent today will return interest plus principal at the end of the period. Ignoring production for the time being, we can graph borrowing and lending opportunities along the **capital market line** in Fig. 1.8 (Line W_0ABW_1).

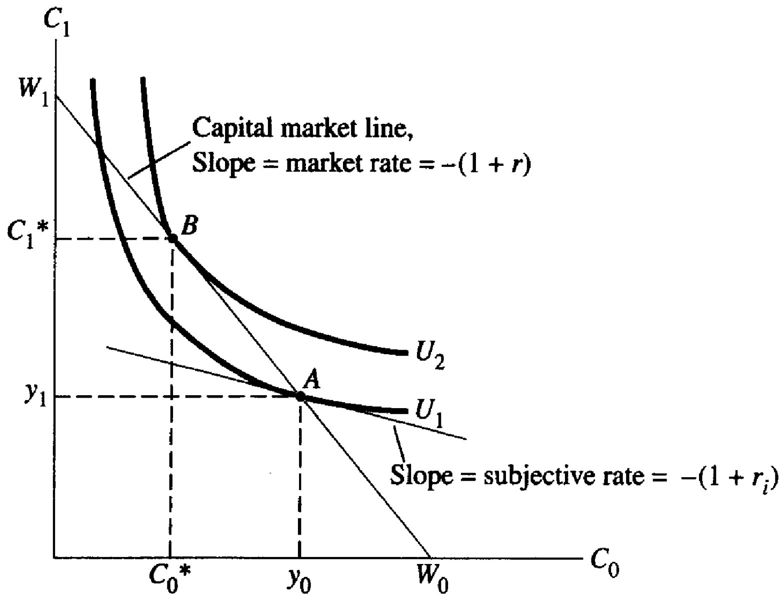


Fig. 1.8 The capital market line

With an initial endowment of (y_0, y_1) that has utility equal to U_1, we can reach any point along the market line by borrowing or lending at the market rate plus repaying the principal amount, X_0.

If we designate the future value as X_1, we can write that the future value is equal to the principal amount plus interest earned,

$$X_1 = X_0(1+r) 。$$

Similarly, the present value, W_0, of our initial endowment (y_0, y_1), is the sum of current income, y_0, and the present value of our end-of-period income, $y_1(1+r)^{-1}$:

$$W_0 = y_0 + \frac{y_1}{1+r} \tag{1.2}$$

1.4.1 预算线（资本市场线，capital market line）

预算线描绘出给定 y_0 和 y_1（即财富 W_0），全部 C_0 和 C_1 可行的组合。

预算线的方程为：

$$C_1 = (W_0 - C_0)(1+r) = W_0(1+r) - C_0(1+r) = W_1 - C_0(1+r) \tag{1.3}$$

这里，C_0 为期初的消费，C_1 为期末的消费。预算线的斜率即为市场收益率 r。

在微观经济学里，给定预算约束线，我们移动无差异曲线，直到无差异曲线和预算约束线相切，这时，效用达到最大。

我们沿着预算约束线移动无差异曲线，直到两者相切，这时，主观时间偏好率等于市场利率，效用达到最大。

1.4.2 有资本市场下的最优消费路径选择

Referring to Fig. 1.8, we see that with endowment (y_0, y_1) we will maximize utility by moving **along the market line** to the point where our subjective time preference equals the market interest rate. Point B represents the consumption bundle on the highest attainable indifference curve. At the initial endowment (point A), our subjective time preference, represented by the slope or a line tangent to the indifference curve at point A, is less than the market rate of return. Therefore we will desire to lend because the capital market rate offers a rate of return higher than what we subjectively require. Ultimately, we reach a consumption decision where we maximize utility. The utility, U_2, at point B is greater than the utility, U_1, at our initial endowment, point A. The present value of this consumption bundle (C_0^*, C_1^*) is also equal to our current wealth W_0:

$$W_0 = C_0^* + \frac{C_1^*}{1+r} \tag{1.4}$$

This can be rearranged to give the equation for the capital market line:

$$C_1^* = W_0(1+r) - C_0^*(1+r)$$

and since $W_0(1+r) = W_1$, we have

$$C_1^* = W_1 - C_0^*(1+r) \tag{1.5}$$

Thus the capital market line in Fig. 1.8 has an intercept at W_1 and a slope of $-(1+r)$. Also note that by equating (1.2) and (1.4) we see that the present value of our endowment equals the present value of our consumption, and both are equal to our wealth, W_0. Moving along the capital market line does not change one's wealth, but it does offer a pattern of consumption that has higher utility.

1.5 Consumption and Investment with Capital Market and Production Opportunity

What happens if the production/consumption decision takes place in a world where capital markets facilitate the exchange of funds at the market rate of interest? Fig. 1.9 **combines production possibilities with market exchange possibilities**. With the family of indifference curves U_1, U_2, and U_3 and endowment (y_0, y_1) at point A, what actions will we take in order to maximize our utility?

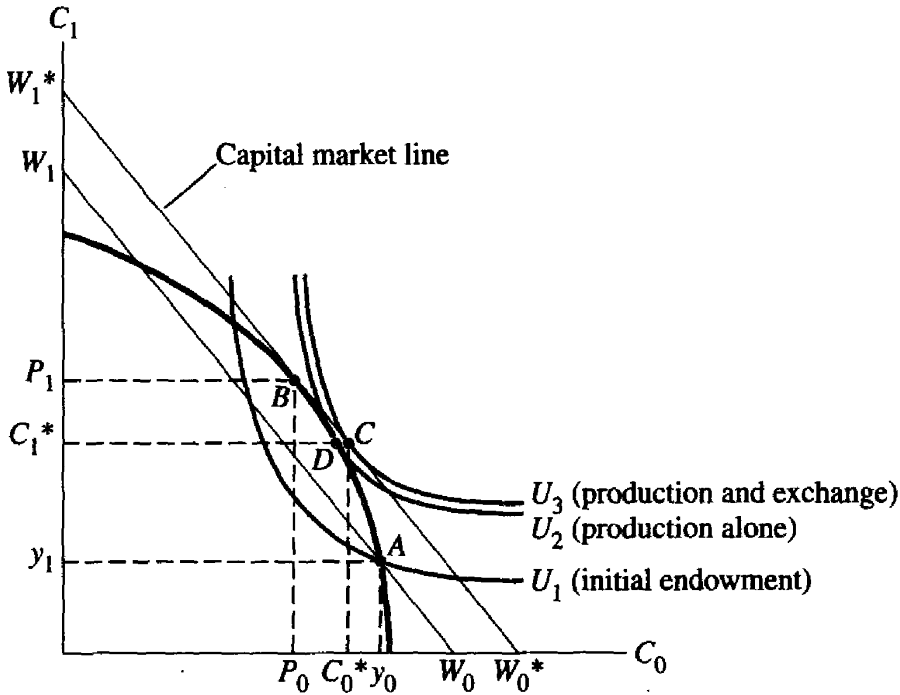


Fig. 1.9 Production and consumption with capital markets

Starting at point A, **we can move either along the production opportunity set or along the capital market line**. Both alternatives offer a higher rate of return than our subjective time preference, but production offers the higher return (i.e., a steeper slope). Therefore we choose to invest and move along the production opportunity frontier. Without the opportunity to borrow or lend along the capital market line, we would stop investing at point D, where the marginal rate of return on productive investment equals our subjective time preference.

This was the result shown for consumption and investment in the world without capital markets in Fig. 1.6. At this point, our level of utility has increased from U_1 to U_2. However, with the opportunity to borrow or lend, we can actually do better.

Note that at point D the borrowing rate, represented by the slope of the capital market line, is less than the rate of return on the marginal investment, which is the slope of the production opportunity set at point D. Since further investment returns more than the cost of borrowed funds, we will continue to invest until the marginal return on investment is equal to the borrowing rate at point B.

At point B, we receive the output from production (P_0, P_1), and the present value of our wealth is W_0^* instead of W_0. Furthermore, we can now reach any point on the market line. Since our time preference at point B is greater than the market rate of return, we will consume more than P_0, which is the current payoff from production. By borrowing, we can reach point C on the capital market line.

Our optimal consumption is found, as before, where our subjective time preference just equals the market rate of return. Our utility has increased from U_1 at point A (our initial endowment) to U_2 at point D (no exchange economy solution) to U_3 at point C (the exchange economy solution). We are clearly better off when capital markets exist since $U_3 > U_2$.

从图 1.9 可见，个体将目前收入中的（$y_0 - P_0$）部分用于投资，再以利率 r 借入（$C_0^* - P_0$）进行目前消费，加上投资所余的 P_0，目前的消费总量为 C_0^*。投资在 1 期的产出为（$P_1 - y_1$），其中的（$P_1 - C_1^*$）用于偿还贷款及其利息，剩下的（$C_1^* - y_1$）用于 1 期消费，加上 y_1，1 期消费总量为 C_1^*。偿付的贷款及其利息为 $P_1 - C_1^* = (C_0^* - P_0)(1+r)$.

$$P_0 + \frac{P_1}{1+r} = C_0^* + \frac{C_1^*}{1+r} = W_0^*$$

1.6 Decision process

1.6.1 各种情况下的决策

（1）生产是单独的，没有资本市场，偏好决定生产/消费；

（2）金融市场是单独的，没有生产，偏好决定消费；

（3）两者都有，利率线 （预算线，金融市场）决定生产，偏好决定消费。

最优生产决策——利率线决定生产：边际投资回报率 MRT=市场利率 r

最优消费决策——偏好决定消费：资本市场线进行借贷，主观时间偏好率 MRS=市场利率 r

1.6.2 Decision process

The decision process that takes place with production opportunities and capital market exchange opportunities occurs in two separate and distinct steps:

(1) Choose the optimal production decision by taking on projects until the marginal rate of return on investment equals the objective market rate;

(2) Then choose the optimal consumption pattern by borrowing or lending along the capital market line to equate your subjective time preference with the market rate of return.

The separation of the investment (step 1) and consumption (step 2) decisions is known as the **fisher separation theorem**.

1.6.3 Fisher separation theorem

Given perfect and complete capital markets, the production decisions is governed solely by an **objective market criterion** (represented by maximizing attained wealth) without regard to individuals' subjective preferences that enter into their consumption decisions.

An important implication for corporate policy is that the investment decision can be delegated to managers. Given the same opportunity set, every investor will make the same production decision (P_0, P_1) regardless of the shape of his or her indifference curves. This is shown in Fig. 1.10.

Both investor 1 and 2 well direct the manager of their firm to choose production combination (P_0, P_1).

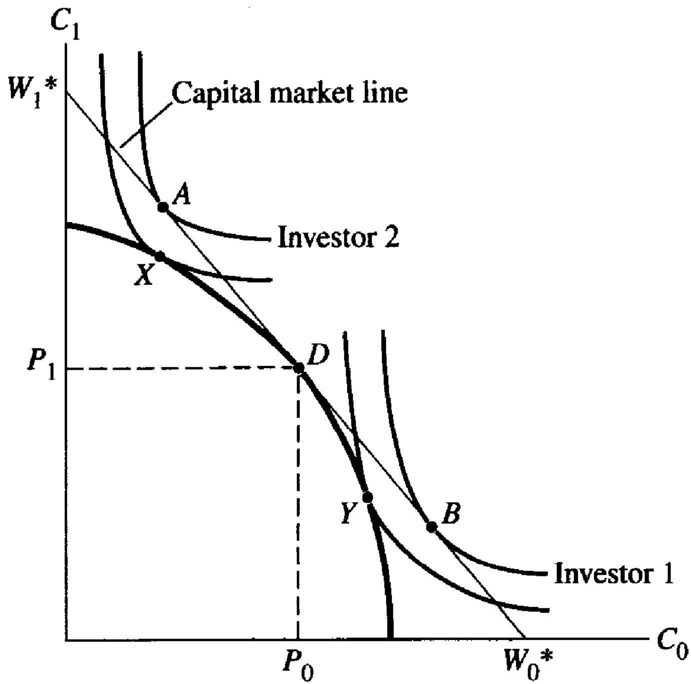


Fig. 1.10 The investment decision is independent of individual preference

They can then take the output of the firm and adapt it to their own subjective time preferences by borrowing or lending in the capital market. Investor 1 will choose to consume more than his or her share of current production (point B) by borrowing today in the capital market and repaying out of his or her share of future production.

Alternately, investor 2 will lend because he or she consumes less than his or her share of current production. Either way, they are both better off with a capital market. The optimal production decision is separated from individual utility preferences.

Without capital market opportunities to borrow or lend, investor 1 would choose to produce at point Y, which has lower utility. Similarly, investor 2 would be worse off at point *X*.

In equilibrium, the marginal rate of substitution （MRS） for all investors is equal to the market rate of interest (1+*r*), and this in turn is equal to the marginal rate of transformation (MRT) for productive investment. Mathematically, the marginal rates of substitution for investors *i* and *j* are

$$MRS_i = MRS_j = -(1+r) = MRT$$

Thus all individuals use the same time value of money (i.e., the same market-determined objective interest rate) in making their production/investment decisions.

The importance of capital markets cannot be overstated. They allow the efficient transfer of funds between borrowers and lenders.

Individuals who have insufficient wealth to take advantage of all their investment opportunities that yield rates of return higher than the market rate are able to borrow funds and invest more than they would without capital markets. In this way, funds can be efficiently allocated from individuals with few productive opportunities and great wealth to individuals with many opportunities and insufficient wealth. As a result, all (borrowers and lenders) are better off than they would have been without capital market.

Chapter 2 Basic Framework

①金融学视角下的经济结构$\begin{cases}\text{自然环境}\\ \text{参与者}\\ \text{金融市场}\end{cases}$，②资源配置，③配置的效率。

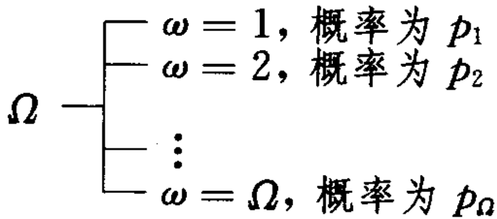
2.1 Environment: Time and Risk

Consider an economy defined as follows

- Two-period world: $t = 0,1$.
- Ω possible states of nature at t = 1. Let $\Omega = \{\omega\}$ is the **state space** （即所有可能状态的集合）， $\omega = 1,\cdots,\Omega$. Let p_ω be the probability of sate ω , $0 < p_\omega \leq 1$, $\sum_\omega p_\omega = 1$, $P \equiv \{p_\omega, \omega \in \Omega\}$ is called probability measure in the state space.

- A single (perishable) good to be consumed in both periods.

The overall environment can also be described by a “tree”:



2.2 Agents

There are total of K agents: $k = 1, \cdots, K$. Each agent is defined by the resources he controls and his preferences (objective). The resources consist of three components: physical good/capital, information and production technologies.

A 参与者的经济资源

（1）Endowment

参与者初始占有的资源是他与生俱来的商品和/或资本品，可以用作消费或生产，称为 endowment。给定两个时期，且在第二期有多个状态（加之商品是 perishable），每一时期和每一未来状态下的 endowment 是不可替代的。

参与者 k，定义他的 endowment 为他在每一时期和（未来）每一可能状态下所拥有的商品。记他在 0 期的禀赋为 $e_{k,0}$、在 1 期 ω 状态下的禀赋为 $e_{k,1\omega}$，其中 $\omega \in \Omega$。则我们可以把参与者 k 的禀赋表示为：

$$e_k \equiv [e_{k,0}; e_{k,1}] = [e_{k,0}; [e_{k,11}; \cdots; e_{k,1\omega}; \cdots e_{k,1\Omega}]], k = 1, \cdots, K. \quad e_k \in \mathrm{R}_+^{1+\Omega}, \text{ i.e. } \; e \geq 0$$

（2）Information

Agents are assumed to have the same information regarding the state of the economy.

Without adverse selection and moral hazard

（3）Production technologies

For now, we assume that agents possess no production technologies.

B 参与者的经济需求（Objective/Preferences）

每一个参与者希望使用其所掌握的资源以满足自身的经济需求，需求和资源一起决定参与者的经济行为。在上面定义的框架中，参与者的经济需求基于他在不同时期和未来不同状态下的消费。对于参与者 k，记他在 0 期的消费为 $c_{k,0}$、在 1 期 ω 状态下的消费为 $c_{k,1\omega}$，其中 $\omega \in \Omega$。则我们可以把参与者 k 的消费完整的描述为：

$$c_k = [c_{k,0}; c_{k,1}] = [c_{k,0}; [c_{k,11}; \cdots; c_{k,1\omega}; \cdots c_{k,1\Omega}]], k = 1, \cdots, K.$$

0 期的消费是在 0 期决定的，此时参与者不知道经济在 1 期的状态，因此，它不依赖于 ω。

（1）Consumption set

将参与者可能的消费选择 $c=[c_0;c_1]$ 称为一个 **consumption plan**，它是指在不同的状态下消费单一消费品的单位数，消费计划可以看成一个随机变量，也可以看成是一个向量，列示出在不同状态下消费的单位数。它依赖于经济的未来状态，从而包含不同的实现值，一个特定的实现值 $(c_0,c_{1\omega})$ 称为一个 consumption path。

所有可能消费计划的集合叫做 **consumption set**，记作 C（$c\in \mathrm{R}_+^{1+\Omega}, C=\mathrm{R}_+^{1+\Omega}$）。

例：设 x 是一个消费计划，记 x_ω 为状态 ω 下消费的单位数，记五种自然状态为 $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5$

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
x_ω	2	3	1	8	0

定义 2.1 设 A 为 R^n 中一个集合。对于任意的 $x, y \in A$ 和 $\alpha \in [0,1]$，$\alpha x + (1-\alpha) y \in A$，则称集合 A 为凸的。

定义 2.2 对于 R^n 中集合 A，如果其中的任意序列 a_i（$i=1,2,\cdots$），有极限 a，且 a 也在 A 中，则称集合 A 是闭的。

如果一个消费序列的元素都比 a 好，则该序列的极限也比 a 好，称该序列为闭集。

假设 1 消费集（消费空间）$C = \mathrm{R}_+^{1+\Omega}$ 是 $\mathrm{R}^{1+\Omega}$ 的一个 closed convex subset。

（2）Preferences

参与者的经济需求是由他对于不同 consumption plan 的 preference 来描述的。偏好是参与者对所有可能消费计划中的一个排序，这样的排序定义了他的经济需求。正式地

定义 2.3 *A preference relation is a binary relation* $\succsim$ *on C such that*

1．完备性，Completeness：$\forall a,b \in C, a \succsim b \ or \ b \succsim a$，或两者都成立。

完备性的假定意味着个人在任何两个备选方案之间具有明确的偏好。这个假设是相当苛刻。一个显而易见的事实是，人们对不熟悉的物品，要进行准确评价是极其困难的。

a 和 b 无差异，记作 $a \sim b$。

2．自反性，Reflexivity：$\forall a \in C, a \succsim a$

每个消费计划至少和它本身一样好。Any bundle is at least as good as itself.

3．传递性，Transitivity：$a \succsim b,\ b \succsim c \Rightarrow a \succsim c$

这是偏好的一致性条件，它关系到理性概念的实质。即不可能存在这样一个序列，消费者对这个序列的偏好是循环的。和完备性假设相比，这个假定更为根本。

（3）Basic Assumptions on Preferences

公理 1 不满足性 insatiability：如果 $a>b$，那么 $a \succ b$。

在所有时期和状态下 a 都不比 b 提供的消费少，且在某些状态下提供更多的消费。

公理 2 连续性 continuity：$\forall c \in C, \{a \in C : a \succsim c\}$ and $\{b \in C : b \precsim c\}$ are closed。

如果两个消费计划非常接近，即它们在所有时期和状态下都提供相似的消费，那么它们的排序应该是“接近的”。这个假定保证了偏好不会出现突发性的逆转。

公理 3 凸性 convexity：$\forall a, b \in C$ 以及 $\alpha \in (0,1)$，如果 $a \succ b$，那么 $\alpha a + (1-\alpha) b \succ b$。

（4）Utility Function

假设对于给定的偏好关系，我们可以给每一个消费计划赋予一个实数，叫做它的效用，使得$\forall a,b\in C, a\succsim b$意味着 a 的效用值不小于 b 的效用值。这个**从消费计划到实数的映射称为效用函数**。

定义 2.4 对应于偏好关系的效用函数 U 是从 C 到 R 的函数，$U:C\to R$，使得$\forall a,b\in C$，当且仅当$a\succsim b$时$U(a)\geq U(b)$。

并不是所有的偏好关系都有效用函数的表示形式，我们必须给偏好关系加上合适的结构来达到用效用函数表示的目的。

定理 2.1:（Debreu）对于一个在闭的、凸消费集 C 上由定义 2.3 所定义的、满足公理 2 的偏好，存在一个定义于 C 上的连续效用函数$U(\cdot)$，使得

$$\forall a,b\in C, a\succsim b，当且仅当 U(a)\geq U(b)$$

当 C 只有有限个元素时，偏好关系 $\succsim$ 总是可以表示为效用函数的形式。

P16：例 2.3 自己看

从定理 2.1 中得到的效用函数只是序数（ordinal）的即它只给出了消费计划的排序。效用函数的任意正单调变换不会改变这种排序的。效用函数的实际数值并不重要。

利用效用函数作为偏好的一种表述形式，我们把偏好的三个基本假设重新表述如下：

1．不满足性 insatiability：如果 $a\geqslant b$，那么 $U(a)\geq U(b)$。

2．连续性 continuity：$\lim\limits_{a_n\to a}U(a_n)=U(a)$。

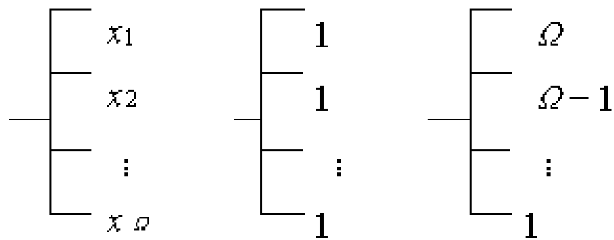
3．凸性 convexity：如果 $U(a)>U(b)$ 且 $\alpha\in(0,1)$，那么 $U(\alpha a+(1-\alpha)b)>U(b)$。

2.3 Securities Market

给定经济所处的自然环境和其中的参与者，我们现在要考虑参与者如何配置其资源以满足他们的经济需求。而资源的配置是通过金融市场中的交易来完成的。市场允许参与者在不同时期和状态上配置资源。

A 证券及其支付

金融市场由一组证券构成，A security is a claim that yields a future payoff: $\{x_\omega, \omega = 1, \cdots, \Omega\}$。定义 R^Ω 为 payoff space，即所有可能支付的集合，其中的一个向量 $X = [x_1; \cdots; x_\Omega]$ 定义了一只证券。一般金融证券、无风险债券、股票的回报分别为：



上面对金融证券的描述有几个含义：第一，它的支付只取决于未来的实际经济状况。第二，它的支付是外生给定的且不受经济中参与者行为的影响。第三，因为所有参与者都知道可能状态的集合和对应的概率，他们也知道且一致认同证券支付的概率分布。若只有证券化的金融要求权，则金融市场简化为证券市场。

B Market Structure

Suppose there are N securities traded in the market: $n = 1, \cdots, N$. Let (column) vector

$$X_{\cdot,n} \equiv [x_{1,n}; x_{2,n}; \cdots x_{\omega,n}; \cdots x_{\Omega,n}]$$

denote the payoff of security n, $n = 1, \cdots, N$. The payoff matrix

$$X \equiv [X_{\cdot,1}, \cdots X_{\cdot,n}, \cdots X_{\cdot,N}] = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} & \cdots & x_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\omega,1} & \cdots & x_{\omega,n} & \cdots & x_{\omega,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\Omega,1} & \cdots & x_{\Omega,n} & \cdots & x_{\Omega,N} \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X_{1,\cdot} \\ \vdots \\ X_{\omega,\cdot} \\ \vdots \\ X_{\Omega,\cdot} \end{bmatrix}$$

defines the market structure.

C Portfolio of traded securities

我们把一个对各证券持有量的集合称为一个证券组合。

令 $\theta \equiv [\theta_1;\cdots;\theta_n;\cdots;\theta_N]$ 表示证券组合，θ_n 是持有的组合中证券 n 的数量。

参与者 k 初始的证券组合为 $\bar{\theta}_k \equiv [\bar{\theta}_{k,1};\cdots;\bar{\theta}_{k,n};\cdots;\bar{\theta}_{k,N}]$，$\bar{\theta}_{k,n}$ 是其初始时持有的组合中证券 n 的数量。在 $\bar{\theta}_k$ 不为零时，参与者的禀赋也应包括他所拥有的初始证券组合所带来的未来支付。

如果将所有参与者的初始证券组合求和，则得到一个特殊的组合

$$\theta_M = \sum_k \bar{\theta}_k \qquad (2.1)$$

这个组合即代表市场中所有可交易证券的集合，称为 **market portfolio**，这也是所有可交易证券的总供给。

D Marketed

任何一个支付 x，如果它可以由交易组合来复制产生，即存在θ，使得 $X\theta = x$，则称 x 为 **marketed**。记所有市场化支付的集合为 M，有

$$M \equiv \left\{ x = X\theta : \theta \in \mathrm{R}^N \right\} \tag{2.2}$$

M 是R^{Ω}的一个 N 维子空间。

E 交易过程

Let $S \equiv [S_1;\cdots;S_n;\cdots;S_N]$ be the (column) vector of prices for the traded securities. 价格是以当时的消费品为单位的。

令 $\theta_k(S) \equiv [\theta_{k,1}(S);\cdots;\theta_{k,n}(S);\cdots;\theta_{k,N}(S)]$ 表示参与者 k 在价格 S 下对证券的需求向量。则可以找到价格（向量）S，使得所有证券的总需求等于这些证券的总供给，也等于所有参与者初始持有量之和：

$$\sum_k \theta_k(S) = \sum_k \bar{\theta}_k \tag{2.3}$$

由此得到 **market-clearing price**。式（2.3）表明，需求等于供给，market-clearing，我们称之为 **market-clearing condition**。

满足下列假设的市场称为无摩擦市场（frictionless market）：

- 所有参与者都可以无成本地参与证券市场
- 没有交易成本和税收
- 对于参与者的证券持有量没有头寸限制
- 个体参与者的交易不会影响证券价格

2.4 基本经济模型

定义 2.5 一个经济定义如下：

1．有两个时期，0 和 1，在 1 期有 Ω 种可能状态。对于这些状态有概率测度 P。只有一种不可储存的商品。

2．经济中有 K 个参与者：

（1）每一参与者对未来状态发生的可能性都有相同的信息，由 P 描述；

（2）每一参与者具有禀赋 $e_k \in \mathrm{R}_+^{1+\Omega}$；

（3）每一参与者有定义于 $C = \mathrm{R}_+^{1+\Omega}$ 上，且满足公理 1～3 的偏好 $\succsim$。

3．有一个市场结构为 X 的无摩擦证券市场。

定义 2.6 在上面定义的经济中，如果所有参与者的 1 期禀赋都可以表示为其初始证券组合的支付，则我们称之为 security-market economy。

2.5 Market Equilibrium

通过证券市场进行的资源配置过程可以看成是通过两个方面的相互影响来完成的：一方面，给定交易证券，特别是它们的未来支付以及现在的价格，每一参与者选择最优的证券持有量以期得到最理想的支付。其持有量取决于这些证券的价格。另一方面，参与者对证券的需求会共同影响证券的价格。如果价格使得对证券的需求恰好等于它的供给，市场达到了 equilibrium，此时，参与者选择了他们的最优持有量并且市场出清。

A Agent Optimization

我们从参与者对证券持有量的最优选择开始。记$\theta=[\theta_1;\cdots;\theta_N]$为一个证券组合，$\theta\in \mathrm{R}^N$，市场结构为 X，组合θ的市场价值为$S^T\theta$，1 期的支付为$X\theta$。

考虑一个参与者，拥有禀赋 e。如果购买组合θ，其消费变为

$$c_0=e_0-S^T\theta \tag{2.4a}$$

$$c_1=e_1+X\theta \tag{2.4b}$$

含义：通过购买θ，他可以用一个市场化的支付$X\theta$来改变他的未来消费。

这个消费计划也称作交易θ融资的消费计划。显然，给定禀赋 e，θ唯一地确定了消费计划 c，**消费计划集**为

$$B(e,\{X,S\})=\{c\geq 0: c_0=e_0-S^T\theta, c_1=e_1+X\theta, \theta\in \mathrm{R}^N\} \tag{2.5}$$

$B(e,\{X,S\})$ 也称为具有禀赋 e 的参与者在支付和价格为 $\{X,S\}$ 的证券市场中的 budget set。

参与者 k 将选择效用最高的消费计划，即进行如下优化问题：

$$
\begin{aligned}
\max_{\theta_k} \quad & U_k(c_k) \\
\text{s.t.} \quad & c_{k,0} = e_{k,0} - S^T\theta_k \\
& c_{k,1} = e_{k,1} + X\theta_k \\
& c_0, c_1 \geq 0
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

优化问题可以等价的写成

$$
\max_{c_k \in B(e_k,\{X,S\})} \quad U_k(c_k) \tag{2.7}
$$

The solution to the optimization problem gives agent k's demand for the securities as a function of the price vector and endowment，记作 $\theta_k(e_k,S)$.

B Market Clearing

在给定的价格（向量）下，每一参与者有（额外）证券需求量$\theta_k(e_k, S)$。我们可以把参与者初始证券持有量视为禀赋的一部分。为使市场出清，交易证券的总需求必须等于总供给。**The market clearing condition** is

$$\sum_k \theta_k(e_k, S) = 0 \tag{2.8}$$

这就决定了交易证券的 equilibrium price。

因为 $c_{k,0} = e_{k,0} - S^T \theta_k(e_k, S)$，由证券市场出清条件（2.8）得到

$$\sum_k c_{k,0} = \sum_k e_{k,0} - S^T \sum_k \theta_k(e_k, S) = \sum_k e_{k,0}$$

同理，

$$\sum_k c_{k,\omega} = \sum_k e_{k,\omega}, \omega = 1, \cdots, \Omega$$

因此，证券市场的出清也意味着商品市场的出清，称之为 Walras 法则。可以写为

$$\sum_k c_k = \sum_k e_k \tag{2.9}$$

因此，**求解均衡包括两个步骤：**

首先，对于任意的价格向量 S 求解每个参与者的最优证券组合，这给出了他对证券的需求 $\theta_k(e_k, S)$。

第二，通过市场出清条件求解均衡价格 S。一般地，我们可以写作：

$$S = S(P; \{U_k, e_k; k = 1, \cdots, K\}; X)$$

Security prices are determined by “fundamentals”: risk, preferences and endowments, security payoff.

2.6 最优性

定义 2.7*a* Pareto 占优：配置 $A=\{c_k,\forall k\}$ 和 $A'=\{c_k^{'},\forall k\}$，**Pareto 占优**是指，$A \succ A'$，

s.t. （1）$\forall k, c_k \ge c_{k'}$，（2）$\exists k, c_k > c_{k'}$.

定义 2.7b 配置 $A=\{c_k,\forall k\}$ Pareto 占优于 $A'=\{c_k^{'},\forall k\}$，如果

$$\forall k: U_k(c_k) \ge U_k(c_k^{'}) \tag{2.10}$$

且严格不等式至少对一个参与者成立；即（1）$\forall k, U_k(c_k) \ge U_k(c_k^{'})$，（2）$\exists k, U_k(c_k) > U_k(c_k^{'})$.

一个配置可以占优于另一个配置，仅仅因为它使用了更多的资源。但是经济的总资源是给定的。因此，我们应该只考虑满足资源约束的配置。记 $\{e_k, k=1,\cdots,K\}$ 为经济中所有参与者的禀赋。

定义 2.8 给定经济的总供给 $\{e_k,\forall k\}$，一个配置 $\{c_k,\forall k\}$ 是 feasible，如果

$$\sum_k c_k = \sum_k e_k \tag{2.11}$$

可行配置所用的资源等于经济的总资源。

定义 2.9 （Pareto Optimality） 如果配置$\{c_k, \forall k\}$是可行的，且不存在另外占优于它的可行配置，则它是最优的。

Pareto 最优即在不牺牲其他参与者的福利或使用更多资源的前提下，不能改进任意一个参与者的福利。一般来说，给定参与者的偏好，只有可行配置的一个子集是最优的而其他的都不是。

Pareto 最优的概念没有考虑不同参与者相对于其他参与者的福利。

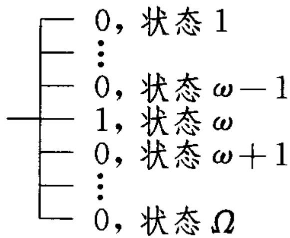
Pareto 最优配置也叫做 efficient 配置。如果证券市场允许参与者达到 Pareto 最优配置，它就叫做 efficient market。

Chapter 3 Arrow-Debreu Economy

我们利用第 2 章中构建的基本模型来分析一个给定的证券市场结构下，参与者如何选择投资组合、证券价格如何影响这些选择以及市场如何决定这些价格。

3.1 Arrow-Debreu Securities Market

定义 3.1 A state-ω contingent claim （an Arrow-Debreu Security） is the security that pays 1 unit of consumption in state ω and nothing otherwise.



写成解析式的形式 $x(\omega')=1_{\omega}(\omega')=\begin{cases}1 & \omega'=\omega\\ 0 & \omega'\neq\omega\end{cases}$

对于每一个状态，都可以定义相应的**状态或有要求权**（证券），也叫做 Arrow-Debreu Securities，共有 Ω 个状态或有要求权。由所有可能的状态或有要求权（即它们的完全集合）所构成的证券市场就叫做 Arrow-Debreu Securities market。不同证券的个数等于可能的状态数，即 $N=\Omega$。按照对应状态来排列状态或有要求权，则其市场结构为一个单位矩阵：

$$X^{A-D}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=I$$

3.2 State Price

记ϕ_ω为状态ω或有证券在 0 期的价格（以 0 期的消费品为单位）。因为状态或有证券在 1 期只有当状态为ω时才支付 1 个单位，因而它的价格也称为**状态ω的状态价格**。由于 A-D 证券市场是一个状态或有证券的完全集合，因此我们拥有了状态价格的完全集合。状态价格向量记为$\phi \equiv [\phi_1;\cdots;\phi_\omega;\cdots;\phi_\Omega]$，且

$$\phi >> 0 \tag{3.1}$$

3.3 市场的完全性

Arrow-Debreu Securities 有一个重要的性质：可以用状态或有要求权的组合为任意未来消费计划融资。记 $x=[c_{11};\cdots;c_{1\omega};\cdots;c_{1\Omega}]$ 为 1 期的任一消费计划。考虑如下的状态或有要求权的组合：c_{11} 单位的状态 1 或有证券，…，$c_{1\omega}$ 单位的状态 ω 或有证券，…，$c_{1\Omega}$ 单位的状态 Ω 或有证券，即 $\theta=[c_{11};\cdots;c_{1\omega};\cdots;c_{1\Omega}]$。它的支付就是

$$X\theta = X^{A-D}[c_{11};\cdots;c_{1\omega};\cdots;c_{1\Omega}]=[c_{11};\cdots;c_{1\omega};\cdots;c_{1\Omega}]=\theta = x$$

它的成本是：

$$\phi^T\theta = \sum_{\omega}\phi_{\omega}c_{1\omega}$$

定义 3.2 如果市场中的任一有限消费计划都可以通过有限成本的可交易证券的组合来融资，那么我们就称这个证券市场是 **complete**。

3.4 Optimization of Agents

给定 A-D 证券市场以及状态或有要求权的价格，我们来分析每一个参与者的优化问题。考虑一个参与者，其禀赋为 e，效用函数为 U。给定市场中交易的状态或有证券，我们可以认为参与者的 1 期禀赋就是他对这些状态或有证券的初始持有量：组合 $\bar{\theta}=[e_{11};\cdots;e_{1\omega};\cdots;e_{1\Omega}]$ 带来的支付与参与者在 1 期的禀赋完全一样

$$X^{A-D}\bar{\theta}=\bar{\theta}=e_1$$

$\bar{\theta}$ 叫做 **replicating portfolio**，它的支付复制了给定的一个支付 e_1。组合 $\bar{\theta}$ 的市场价值为 $\phi^T\bar{\theta}=\phi^T e_1$，并且可以在市场上进行交易。则参与者禀赋的市场价值为：

$$w=e_0+\phi^T e_1 \qquad (3.2)$$

在 A-D 市场下，我们可以设想一个参与者把他的禀赋 e 兑换成总额为 $w=e_0+\phi^T e_1$ 的现金；他可以用这些现金来购买现在的消费 c_0 和状态或有证券的组合 θ，以得到未来消费 $c_1=X^{A-D}\theta=\theta$。他只要满足一个约束条件即预算约束的限制：现在和将来的消费的总成本不能超过其总财富：

$$c_0+\phi^T c_1 \le w=e_0+\phi^T e_1 \qquad (3.3)$$

定义扩展的价格向量 $\hat{\phi}=[\phi_0;\phi]$，把 1 单位 0 期消费品的价格 ϕ_0 当作第一个元素，而 $\phi_0=1$。预算约束可改写为

$$\hat{\phi}^T c \le \hat{\phi}^T e \Leftrightarrow \hat{\phi}^T (c-e) \le 0$$

如果把消费集 C 选成 $\mathrm{R}_+^{1+\Omega}$，(2.6)式中的优化问题就变成：

$$
\begin{aligned}
&\max_{c \in C} \quad U(c) \\
&\text{s.t.} \quad \hat{\phi}^T (c-e) \le 0 \quad (1\text{个}) \\
&\qquad\;\; c \ge 0 \qquad\qquad\;\; (1+\Omega\text{个})
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

定理 3.1 令 $C = \mathrm{R}_+^{1+\Omega}$ 且 $U(\cdot)$ 在 C 上连续。优化问题（3.4）有解。

在参与者的优化问题中，如果达到最优时非负约束不起限制作用，则最优解就叫做内部解；否则，就叫边角解。对于内部解，我们可以去掉非负性约束而只保留**取等的预算约束**。此时，参与者 k 的优化问题变成

$$
\begin{aligned}
&\max_{c_k \in C} \quad U_k(c_k) \\
&\text{s.t.} \quad \hat{\phi}^T (c_k - e_k) = 0
\end{aligned}
$$

构建拉格朗日方程：

$$
L = U_k(c_k) - \lambda_k \hat{\phi}^T (c_k - e_k)
$$

F.O.C：

$$DU_k(c_k)=\lambda_k\hat{\phi} \qquad （3.7）$$

λ_k 由预算约束决定。这意味着 $\forall k$ 和 $\omega\in\Omega$，

$$\begin{aligned}\partial_0 U_k(c_k)&=\lambda_k\phi_0=\lambda_k\\ \partial_\omega U_k(c_k)&=\lambda_k\phi_\omega\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{\partial_\omega U_k(c_k)}{\partial_0 U_k(c_k)}=\phi_\omega \qquad （3.8）$$

（3.8）式是在 A－D 证券市场中进行交易的参与者达到最优化的条件。它描述的是在达到最优时，在 1 期状态 ω 下消费的边际效用与 0 期消费的边际效用之比等于 ω 的状态价格。（3.8）式可重写为：

$$\partial_0 U_k = \frac{1}{\phi_\omega} \partial_\omega U_k$$

等式左边是每单位 0 期消费的边际效用。假设不是把它消费掉，而是把它节省下来用于购买状态ω或有证券。在价格ϕ_ω下，每一单位 0 期消费能换得$1/\phi_\omega$单位的状态ω或有证券。它只在状态ω下支付$1/\phi_\omega$，得到的边际效用为$\frac{1}{\phi_\omega}\partial_\omega U_k$。这就是等式的右边。因此（3.8）式只是说达到最优时，对于参与者来说，在不同时期和状态间转移消费是无差异的。

3.5 Market Equilibrium

给定一组状态价格，在对参与者的最优消费/组合选择求解后，我们分析市场以及整个经济均衡。

An equilibrium of the Arrow-Debreu Economy is the set of state contingent prices $\{\phi_\omega : \omega \in \Omega\}$ such that

1．Optimum for each investor $k, k = 1, \cdots, K$

$$
\begin{aligned}
c_k(e_k, \phi) = \ & \text{ArgMax} \quad U_k(c_k) \\
\text{s.t.} \quad & (1) c_{k,0} + \phi^T c_{k,1} = e_{k,0} + \phi^T e_{k,1} \\
& (2) c_k \geq 0
\end{aligned}
$$

2．Market clearing

$$\sum_k c_{k,0}(e_k, \phi) = \sum_k e_{k,0}, \ \sum_k c_{k,1}(e_k, \phi) = \sum_k e_{k,1}$$

定理 3.3 对于定义 2.5（基本经济模型）中给出的，存在 Arrow-Debreu 证券市场的经济来说，均衡总是存在的。

均衡时，参与者根据市场价格选择最优的消费/组合计划。他在 1 期**任意状态下的相对边际效用等于状态价格**。并且，所有参与者在市场出清价格下达到他们的最优。因此，由（3.8）式有

$$\frac{\partial_{\omega}U_{k}(c_{k})}{\partial_{0}U_{k}(c_{k})}=\phi_{\omega}=\frac{\partial_{\omega}U_{k'}(c_{k'})}{\partial_{0}U_{k'}(c_{k'})},\forall k,k',\omega \qquad (3.9)$$

即，在任何状态下，所有参与者的相对边际效用都相等。当参与者可以交易的状态或有证券是完全的时候，这是均衡的一个重要性质。

例 3.4

定理 3.4 对于定义 2.5 中给出的，存在 Arrow-Debreu 证券市场的经济来说，均衡达到的资源配置是 Pareto 最优的。（也称为福利经济学第一定理）

First Welfare Theorem: If asset markets are complete and if the agents' utility functions are strictly increasing, then every equilibrium consumption allocation is Pareto optimal.

Second Welfare Theorem: If asset markets are complete and if the agents' utility functions are strictly quasi-concave and strictly increasing, then every Pareto optimal consumption allocation is an equilibrium allocation under an appropriate distribution of the aggregate endowment.

Chapter 4 Arbitrage and Asset Pricing

4.1 一般市场结构

A Composite Securities

Most traded securities have more complex payoffs than the Arrow-Debreu securities. Let $n = 1, \cdots, N$ denote the composite securities traded. $x_n = X_{\cdot,n} = [x_{1,n}; \cdots; x_{\omega,n}; \cdots; x_{\Omega,n}]$ be the vector of payoffs on security. For all the securities, we construct the payoff matrix X:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} & \cdots & x_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\omega,1} & \cdots & x_{\omega,n} & \cdots & x_{\omega,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\Omega,1} & \cdots & x_{\Omega,n} & \cdots & x_{\Omega,N} \end{pmatrix}$$

B Redundant Securities

给定市场上的交易证券集合，它们的支付可能是相关联的。比如，可能存在一只证券 j，它的支付可以表示成其他证券支付的线性组合。在这种情况下，支付矩阵 X 不是满秩的。令 $X_{\setminus j}$ 为剔除证券 j 后的支付矩阵，$X_{\setminus j}=[x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_N]$，这里 x_n 是证券 n 的支付向量。令 θ 为所有 N 只证券组成的组合，而 $\theta_{\setminus j}$ 是剔除 j 后的 N-1 只证券的组合。我们已经假设 x_j 是其他证券的线性组合，因此，存在 $\theta^*_{\setminus j}$，使得

$$x_j = X_{\setminus j}\theta^*_{\setminus j}$$

用其他证券的支付可以复制证券 j 的支付。现在考虑由任意一个 θ 生成的支付：

$$x = X\theta = X_{\setminus j}\theta_{\setminus j} + \theta_j x_j = X_{\setminus j}\theta_{\setminus j} + \theta_j X_{\setminus j}\theta^*_{\setminus j} = X_{\setminus j}(\theta_{\setminus j} + \theta_j\theta^*_{\setminus j})$$

其中，θ_j 是第 j 只证券的数量。括号里面的是由删除 j 后的 N-1 只证券生成的组合，没有证券 j 我们也可以生成相同的支付，所以证券 j 称为 redundant security。

C 证券市场的不同描述方式

忽略市场摩擦，对市场结构 X 的描述中可以只包括具有线性独立支付的证券，这意味着 X 当中的证券数目不会超过 Ω。因为 X 是满秩的（它的 N 列是独立的），它的秩必须满足：$rank(X)=\min\{N,\Omega\}=N$。

给定具有线性独立支付矩阵 X 的证券集合，我们可以形成 N 个线性独立的组合，记为 $\theta_1,\cdots,\theta_n,\cdots,\theta_N$。此时我们可以把每个组合当作一个证券，它们的支付矩阵是

$$X_\theta \equiv \begin{pmatrix} x_{1,\theta_1} & \cdots & x_{1,\theta_n} & \cdots & x_{1,\theta_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\omega,\theta_1} & \cdots & x_{\omega,\theta_n} & \cdots & x_{\omega,\theta_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\Omega,\theta_1} & \cdots & x_{\Omega,\theta_n} & \cdots & x_{\Omega,\theta_N} \end{pmatrix} = X\left[\theta_1,\cdots,\theta_n,\cdots,\theta_N\right] = XH$$

其中，X_θ 的第 n 列是组合 θ_n 的支付向量。X_θ 是满秩的。

证明：令 $H \equiv [\theta_1, \cdots, \theta_N]$，则 H 为（$N \times N$）矩阵。因为各组合（即 H 的列向量）之间是独立的，H 满秩。由于 $rank(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\}$，$rank(X) = rank(XHH^{-1}) \le \min\{rank(XH), rank(H^{-1})\} \le rank(XH) \le rank(X)$，于是 $rank(XH) = rank(X) = N$。因而 X_θ 也是满秩的。

用这些组合作为基本单元，可以生成这些组合的组合。特别的，我们可以用这些组合来复制原始证券：

$$X = X_\theta H^{-1}$$

H^{-1} 的第 n 列，记作 $H^{-1}_{\cdot,n}$，给出了由组合 $\theta_1, \cdots, \theta_N$ 生成的一个组合，也就是 $X_\theta H^{-1}$ 的第 n 列，这与开始的第 n 只证券的支付相同。也就是说，$\theta_1, \cdots, \theta_N$ 的组合 $H^{-1}_{\cdot,n}$ 复制了原始市场结构中的第 n 只证券。原始证券的任意组合 θ，都可以由 $\theta_1, \cdots, \theta_N$ 的组合 $H^{-1}\theta$ 复制：

$$X\theta = XHH^{-1}\theta = X_\theta(H^{-1}\theta)$$

因此，如果不存在摩擦，独立组合$\theta_1,\cdots,\theta_N$提供了市场结构的一个等价描述。

D 生成 Span

我们考虑$rank(X)=N=\Omega$的特殊情形，此时 X 是一个秩为Ω的可逆方阵。因此我们可以用复合证券复制所有的 A-D 证券。

定义1_ω为$\Omega\times 1$的列向量，其第ω个元素为 1、其他元素均为 0。为了构造 state ω contingent claim 的支付，我们有

$$X\theta_\omega = 1_\omega$$

当 X 是可逆时，我们只需选择

$$\theta_\omega = X^{-1}1_\omega \Rightarrow \theta = X^{-1}I = X^{-1}$$

也就是说，组合θ_ω在状态ω时支付为 1，其他状态不支付。因此，θ_ω正是 state ω contingent claim。给定 X，θ_ω是唯一的。因此，在满秩的金融市场结构和 A-D 经济之间有了一一对应。θ的第ω列对应着状态ω的 A-D 证券。

定理 4.1 The securities market is complete if and only if the number of securities with independent payoffs equals the number of states.

在这种情况下，我们称经济中的不确定性可由市场的证券生成。

例 1：下列矩阵给出了两种状态、两种普通证券的或有支付矩阵，$X=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$。由于 X 的行列式值非零，因此 X 可逆，其逆矩阵为 $X^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{13} & \frac{3}{13}\\ \frac{5}{13} & -\frac{2}{13}\end{bmatrix}$。由此容易看到，

$a(1)=\left[-\frac{1}{13};\frac{5}{13}\right]$ 代表的普通证券的资产组合生成了 A-D 证券 $[1;0]$。类似地，

$a(2)=\left[\frac{3}{13};-\frac{2}{13}\right]$ 代表的普通证券的资产组合生成了 A-D 证券 $[0;1]$。

既然使用普通证券进行适当的资产组合可得到 A-D 证券，通过 A-D 证券又可以得到任意的支付组合，由此可知，可以通过普通证券的资产组合得到任意的支付结果。下面的例子说明了这一过程。

例 2：为了得到支付$[5;2]$，应购买 5 单位的 A-D 证券$[1;0]$和 2 单位的 A-D 证券$[0;1]$。由于 A-D 证券不可交易，必须购买普通证券，通过它们的组合实现这一支付。由于证券组合$a(1)=\left[-\frac{1}{13};\frac{5}{13}\right]$生成了 A-D 证券$[1;0]$，$a(2)=\left[\frac{3}{13};-\frac{2}{13}\right]$生成了 A-D 证券$[0;1]$，为了实现支付$[5;2]$，必须构成以下复合证券：

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_1\\ \tilde{a}_2\end{bmatrix}=5a(1)+2a(2)=5\times\begin{bmatrix}-\frac{1}{13}\\ \frac{5}{13}\end{bmatrix}+2\times\begin{bmatrix}\frac{3}{13}\\ -\frac{2}{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{13}\\ \frac{21}{13}\end{bmatrix}$$

即通过购买$1/13$单位的普通证券 1，购买$21/13$单位的普通证券 2，给出的资产组合可以实现支付$[5;2]$。

4.2 Arbitrage

记交易证券的价格向量为 $S=[S_1;\cdots;S_N]$，支付矩阵为 X。从 X 到 S 的映射称作资产定价关系（asset pricing relation or asset pricing model）。

考虑一个交易证券的组合，$\theta=\left[\theta_1;\cdots;\theta_N\right]$。它在 0 期的价值为 $S^T\theta$，在 1 期的支付向量为 $X\theta$。

定义 4.1 An arbitrage opportunity exists if and only if there exists portfolio θ such that:

(1) $S^T\theta\le 0$

(2) $X\theta\ge 0$

(3) at least one of the inequality is strict.

上面定义的套利可以分为三种类型：

第Ⅰ类套利：$S^T\theta < 0\ and\ X\theta = 0$

第Ⅱ类套利：$S^T\theta = 0\ and\ X\theta > 0$。初始投资为 0 的组合叫做 arbitrage portfolio

第Ⅲ类套利：$S^T\theta < 0\ and\ X\theta > 0$

套利不依赖于任何私有信息。特别地，套利依赖于证券在每一个状态下的支付，但不依赖于每一状态发生的可能性。私有信息一般是相对于后者。若存在套利机会，所有人都可以利用这些套利机会。

4.3 Principle of No-Arbitrage

给定支付矩阵，证券价格不能是任意的，否则就可能存在套利机会。

定理 4.2 在市场均衡中不存在套利机会。

证明：我们用反证法来证明这个结论。令$\{c_k, k=1,\cdots,K\}$为均衡配置，S 为交易证券的均衡价格，X 为支付矩阵。假设市场中存在着套利机会θ。让我们来考虑一个参与者 k 的套利交易。这不需要额外的资源却可将他的消费提高为$c_k+[-S^T\theta; X\theta]>c_k$。由不满足公理，$c_k+[-S^T\theta; X\theta]\succ c_k$。因此，对于参与者 k 来说，不是最优的。这与均衡条件矛盾。Q.E.D.

定义 4.2 无套利原理：证券市场中不存在套利机会。

作为证券价格和支付的基本性质，无套利原理对证券价格和支付之间的关系或资产定价关系作出了限制。

4.4 Fundamental Principle of Asset Pricing

资产定价关系（模型）指的是从证券的支付 X 到其价格 S 的映射，可写为

$$S = V(x) \tag{4.1}$$

定理 4.3 Law of One Price：两个具有相同支付的证券（或组合）的价格必定相同。即

$$\text{如果 } x=y\text{，则 } V(x) = V(y) \tag{4.2}$$

定理 4.4 支付为正的证券（或组合）的价格为正。即

$$\text{如果 } x>0\text{，则 } V(x) > 0 \tag{4.3}$$

定理 4.5 给定两只证券 1 和 2，如果证券 1 的支付总是大于证券 2，则证券 1 的价格必定高于证券 2 的价格。即

$$\text{如果 } x_1 \geqslant x_2\text{，则 } V(x_1) \geq V(x_2) \tag{4.4}$$

因此，$V(\cdot)$ 是一个递增算子。

定理 4.6 在一个无摩擦的市场中，定价算子是递增的线性算子。也就是说，对于任意 $a,b\in \mathrm{R}$ 以及具有支付 x,y 和 $z=ax+by$ 的 3 只证券，有

$$V(ax+by)=aV(x)+bV(y) \tag{4.5}$$

因此，$V(\cdot)$ 是线性算子，且 $V(0)=0$。因此定理 4.6 意味着资产定价算子具有如下形式：

$$V(x)=\phi^T x=\sum_{\omega}\phi_{\omega}x_{\omega}$$

其中，ϕ 是一个（$\Omega\times 1$）的正向量。上式在形式上与 A－D 证券市场中禀赋/支付估价公式相同。在那里，ϕ 是状态价格向量，且必须为正。而这里的 ϕ 只是一个正向量。

定理 4.7（**Fundamental Theorem of Asset Pricing**）In absence of arbitrage in the securities market, implies that there exists $\phi >> 0$ such that

$$S=(\phi^T X)^T=X^T\phi \tag{4.6}$$

无套利意味着存在一个可以为所有交易证券定价的正的状态价格向量$\phi >> 0$。一般的，这个状态价格向量不是唯一的。

定理 4.8 在一个完全的证券市场中，状态价格向量ϕ是唯一的。

证明：令S为Ω只交易证券的价格向量，θ_ω为由它们来复制状态ω或有证券的组合。那么，状态ω的状态价格由$\phi_\omega = S^T\theta_\omega$唯一给定。Q.E.D.

4.5 Risk-Neutral Pricing and Martingale

假设市场上交易的证券中，有一只是无风险债券，它在 1 期的支付确定为 1。令它的支付向量为 $x_1=[1;\cdots;1]=\iota$，价格为 S_1，这里 ι 定义为元素全为 1 的列向量。由资产定价基本原理，存在一个严格为正的状态价格向量 ϕ 可对所有交易证券定价，包括无风险证券。因此，对于无风险债券，有

$$S_1=\iota^T\phi=\sum_{\omega}\phi_{\omega}$$

定义 1 单位无风险证券投资获得的净支付或净收益率（net rate of return），也称作无风险利率，并记为 r_{F}。则

$$S_1(1+r_F)=1 \text{ 或 } r_F=\frac{1-S_1}{S_1}$$

利率也叫做货币的时间价值（time value of money），因为它反映了以今天的 1 单位资源交换未来确定的资源时市场提供的回报。由定价关系有

$$\frac{1}{1+r_F}=\sum_\omega \phi_\omega \qquad (4.7)$$

把债券的定价公式重新写成

$$S_1=\frac{1}{1+r_F}=\sum_\omega \phi_\omega$$

以此形式把债券的价格表达成其支付的线性函数的方法叫贴现（discounting）。也就是说，债券的价格就是它未来支付的折现。这个线性函数的系数，即 $\frac{1}{1+r_F}$ 也称为折现因子，r_F 被称为折现率。

对于市场上的其他证券，如支付为 $x_n = X_{\cdot,n} = [x_{1,n};\cdots;x_{\Omega,n}]$ 的证券 n，由定价公式（4.6）可得

$$S_n = x_n^T \phi = \sum_\omega \phi_\omega x_{\omega,n}$$

其中， $n = 2,\cdots,N$ 。Define

$$q_\omega = \phi_\omega / \sum_\omega \phi_\omega$$

Clearly, $q_\omega > 0 \quad \forall \omega$ and $\sum_\omega q_\omega = 1$ 。Hence， $Q \equiv \{q_\omega, \omega \in \Omega\}$ can be interpreted as a probability measure over Ω. Hence, we can rewrite the pricing equation as

$$S_n = \tilde{x}_n^T \phi = \sum_\omega \phi_\omega x_{\omega,n} = \sum_\omega q_\omega (\sum_\omega \phi_\omega) x_{\omega,n} = S_1 \sum_\omega q_\omega x_{\omega,n} = \frac{1}{1+r_F} E^Q[\tilde{x}_n] \quad (4.9)$$

这里，我们把证券 n 的支付当成一个随机变量并记作 $\tilde{x}_n$，而 $E^Q[\cdot]$ 则表示在概率测度 Q 下取期望值。式（4.9）的含义：证券价格就是它在概率测度 Q 下的期望支付对无风险利率的折现，称之为 risk-neutral pricing 公式，Q 被称为 risk-neutral measure。

因为 $S_1 = \dfrac{1}{1+r_F}$ 且 $\tilde{x}_1 = 1$，资产定价公式（4.9）也可以写成

$$S_n / S_1 = E^Q[\tilde{x}_n / \tilde{x}_1]$$

注意 S_1 和 S_n 是证券 1 和 n 以现在的消费品作为计量单位的价格。而两者之比 S_n / S_1 则是证券 n 以证券 1 为计量单位的价格。也就是说，如果我们使用 1 单位的证券 1 作为价格的计算单位，那么证券 n 的 0 期价格就变成 S_n / S_1。而它在 1 期的价格则是 $\tilde{x}_n / \tilde{x}_1 = \tilde{x}_n$。

一般说来，我们记$\tilde{S}_{n,t} \equiv S_{n,t} / S_{1,t}$为以无风险债券为单位的、证券 n 在 t 期的价格（支付），这里 t=0,1。那么，我们有

$$\tilde{S}_{n,t} = E^{Q}[\tilde{S}_{n,t+1}] \qquad (4.10)$$

其中，t=0。如果把不同日期的价格写成一个序列，我们可以把它看作是一个随机过程。

定义 4.3 如果一个随机过程，$z_1, z_2, \cdots$现在的值恒等于对于其未来值的条件期望：$z_t = E_t[z_{t+1}]$，我们称之为鞅。

因此，（4.10）式所表述的是：以债券价格为计量单位，证券价格在风险中性测度 Q 下是鞅。Q 也称作 equivalent martingale measure。“等价”是说 Q 与真实的概率测度 P 等价。给定两个概率测度，如果它们有相同的 0 概率集，也就是说$p_\omega = 0$当且仅当$q_\omega = 0$，则称这两个概率是等价的。

Chapter 5 Options: An Example of Arbitrage Pricing

5.1 Options

Let $\tilde{X}$ be the payoff of an asset at t=1 and S its price at t=0. In what follows, we often call the asset “stock”.

定义 **5.1** An **European call** (**put**) option on the stock with **strike price** K and **maturity date** t is a security that gives the buyer the right to buy (sell) the stock at maturity at price K.

Let $\tilde{c}$ be the payoff of a European call option at t=1, $\tilde{p}$ be the payoff of a European put option at t=1, then

$$\tilde{c} = [\tilde{X} - K]_+,\ \tilde{p} = [K - \tilde{X}]_+ \quad (5.1)$$

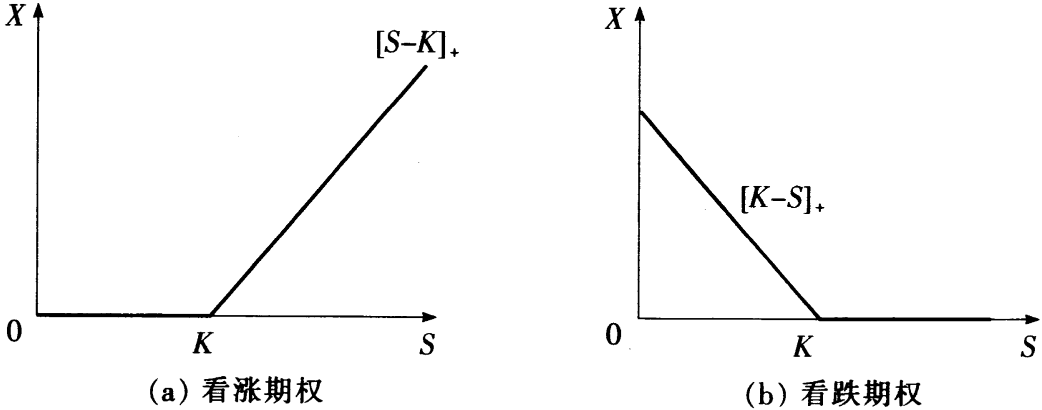


图 5.1　欧式期权的支付

定义 5.2 An **American call** (**put**) option on the stock with **strike price** K and **maturity date** t is a security that gives the buyer the right to buy (sell) the stock at any time before and including the maturity date at price K.

称 X-K 为看涨期权的 intrinsic value，如果一份期权的内在价值大于、等于或小于 0，相应地称之为 in the money、at the money 和 out of the money。

Let $c(S,K)$ be the price of a European call option at t=0 and $p(S,K)$ the price of a European put option; let $C(S,K)$ be the price of an American call option at t=0 and $P(S,K)$ the price of an American put option.

5.2 Some Arbitrage Pricing Relations On Options

By no arbitrage, if for two assets A and B, $X_A(\omega) \geq X_B(\omega)$, $\forall \omega$ (*i.e.*, $\tilde{X}_A \geq \tilde{X}_B$), then $S_A \geq S_B$. Using the arbitrage argument, we have the following pricing relations for options.

定理 **5.1** $c(S,K)$ and $p(S,K)$ are non-negative.

$$\tilde{c} = [\tilde{X} - K]_+ \geq 0, \tilde{p} = [K - \tilde{X}]_+ \geq 0$$

定理 **5.2** $c(S,K)$ is non-increasing in K, and $p(S,K)$ is non-decreasing in K.

Proof: $\forall K_1 > K_2$, $\max[0, \tilde{X} - K_1] \leq \max[0, \tilde{X} - K_2]$. Thus, $c(S, K_1) \leq c(S, K_2)$.

定理 **5.3** $c(S,K)$ and $p(S,K)$ are convex in K.

Proof: $\forall K_1 > K_2$ and $\alpha \in (0,1)$,

$$\max[0,\tilde{X}-(\alpha K_1+(1-\alpha)K_2)]=\max[0,\alpha(\tilde{X}-K_1)+(1-\alpha)(\tilde{X}-K_2)]$$
$$\leq\alpha\max[0,\tilde{X}-K_1]+(1-\alpha)\max[0,\tilde{X}-K_2]$$

In other words, $\max[0,\tilde{X}-K]$ is a convex function of K. So is $\max[0,K-\tilde{X}]$.

定理 5.4 Let $\theta\geq 0$ be a portfolio of N assets. Then,

$$c(S^T\theta,K^T\theta)\leq\sum_i\theta_i\cdot c(S_i,K_i),\ p(S^T\theta,K^T\theta)\leq\sum_i\theta_i\cdot p(S_i,K_i)$$

Thus, an option on a portfolio is worth less than a portfolio of options on the assets in that portfolio.

Proof: 股票 i 的价格为 S_i， $i=1,\cdots,N$ ，以其为基础资产的期权的执行价为 K_i 。股票 i 及其相对应的期权的头寸为 θ_i 。0 时股票组合的价值为 $S^T\theta$， 1 时的支付为 $X\theta$ 。

The payoff of an option on the portfolio is

$$\max[0,(\tilde{X}-K)^T\theta]=\max[0,\sum_i\theta_i(\tilde{X}_i-K_i)]$$

The payoff of a portfolio of options is

$$\left[\max[0, \tilde{X} - K]\right]^T \theta = \sum_i \theta_i \max[0, \tilde{X}_i - K_i]$$

From the convexity of the payoff function, we have

$$\max[0, \sum_i \theta_i (\tilde{X}_i - K_i)] \le \sum_i \theta_i \max[0, \tilde{X}_i - K_i]$$

The theorem then follows by no-arbitrage.

定理 5.4 的含义是，大盘指数期权比个股期权比例加总便宜。

定理 5.5 $S \ge c(S, K)$。

和定理 5.6 一起证明。

定理 5.6 If there exists a risk-free asset with the rate of return r_F, then $c(S, K) \ge \max[0, S - \frac{K}{1 + r_F}]$.

Proof: Consider a portfolio of

(1) long 1 share of the stock and

(2) short (borrow) $\frac{K}{1+r_F}$ free-risk bond. （即 K 份无风险债券）

Its value today is $S-\frac{K}{1+r_F}$. The payoff at t=1 is $\tilde{X}-K$.

Since $\tilde{X} \geq \max[0, \tilde{X}-K] \geq \tilde{X}-K$ （支付）

we have $S \geq c(S,K) \geq S-\frac{K}{1+r_F}$ （价格）

Also, $c(S,K) \geq 0$. Thus

$$S \geq c(S,K) \geq \max[0, S-\frac{K}{1+r_F}] \tag{5.2}$$

定理 5.7 （Put-call parity） If there exists a risk-free asset with rate of return r_F ,then

$$c(S,K)+\frac{K}{1+r_F}=p(S,K)+S \tag{5.3}$$

Proof: Consider the following portfolios:

(1) long a call with strike *K* and long $\frac{K}{1+r_F}$ risk-free bond

It's value at *t*=0 is $c(S,K)+\frac{K}{1+r_F}$

(2) long a put with strike *K* and long 1 share of the stock

It's value at *t*=0 is $p(S,K)+S$

Look at the payoffs of these portfolios:

	$\tilde{X} \leq K$	$\tilde{X} > K$
(1)	$\max[0, \tilde{X} - K] + K = K$	$\max[0, \tilde{X} - K] + K = \tilde{X}$
(2)	$\max[0, K - \tilde{X}] + \tilde{X} = K$	$\max[0, K - \tilde{X}] + \tilde{X} = \tilde{X}$

Clear, portfolios 1 and 2 have identical payoffs. Thus, their costs today must be equal, i.e.

$$c(S, K) + \frac{K}{1 + r_F} = p(S, K) + S$$

If markets are complete, there exists a unique, complete set of state prices: $\phi_\omega, \forall \omega \in \Omega$ 。

Let X_ω be the payoff of the underlying asset in state ω. Then

$$
\begin{aligned}
c(S,K) &= \sum_{\omega} \phi_\omega \max[0, X_\omega - K] = \sum_{X_\omega > K} \phi_\omega (X_\omega - K) \\
&= \sum_{X_\omega} \phi_\omega (X_\omega - K) - \sum_{X_\omega \le K} \phi_\omega (X_\omega - K) \\
&= \sum_{X_\omega} \phi_\omega X_\omega - \sum_{X_\omega} \phi_\omega K + \sum_{X_\omega \le K} \phi_\omega (K - X_\omega) \\
&= \sum_{X_\omega} \phi_\omega X_\omega - \sum_{X_\omega} \phi_\omega K + \sum_{X_\omega} \phi_\omega \max[0, K - X_\omega] \\
&= S - \frac{K}{1+r_F} + p(S,K)
\end{aligned}
$$

5.3 American Options and Early Exercise

对于美式期权来说，**early exercise** 只是权利而非义务。如果持有美式期权至到期日，则它的支付与相应的欧式期权完全一样。因为期权持有者有权利提前执行，而他只有在更优时才提前执行，所以美式期权的价格永远不会低于相应的欧式期权。这就是说，

$$C(S,K) \geq c(S,K), \quad P(S,K) \geq p(S,K) \qquad (5.4)$$

影响提前执行的一个重要因素是标的证券支付的股利。Let us now consider optimal policies for early exercise.

A No Dividends

Call options. Without dividends, American calls should not be exercised early. Note that the value of early exercise is $S-K$. But

$$S - K \le S - \frac{K}{1+r_F} \le \max[0, S - \frac{K}{1+r_F}] \le c(S,K) = \max[0, S-K]$$

这就是说，**提前执行美式看涨期权所得到的价值不会高于把它当作欧式看涨期权卖出所得的价值**。Since the inequality holds in some states of the world, early exercise is suboptimal.

The call can always be sold for $c(S,K) \ge S-K$. There are two components in the cost of early exercising: (1) time value of the strike price (pay K now instead of later), and (2) the option of not to exercise at t=1. Since you will never exercise early, $C(S,K) = c(S,K)$.

Put option. Without dividends, American put may be exercised early at the optimum. Here, the **cost of early exercise** is the option of not to exercise while the **gain of early exercise** is the time value of getting K (now instead of later). Note that

$$P(S,K) = \max[K - S,\ p(S,K)] = \max[K - S, \frac{K}{1+r_F} - S + c(S,K)]$$

If $K - S > \frac{K}{1+r_F} - S + c(S,K)$, early exercise is optimal. In other words, early exercise occurs if $\frac{r_F}{1+r_F} K > c(S,K)$. This is true when $K >> S$ (then $c(S,K)$ is very small), i.e. the put is deep in the money.

B With Dividends

Suppose now that the stock also pays a dividend D at t=0. S now denotes the ex-dividend price. An investor holding an American call on the stock has two options at t=0: (1) to exercise the option by paying K and receive dividend D plus S by selling the stock afterwards, or (2) holding the option to the expiration date t=1. Clearly, under optimal exercise policy

$$C(S,D,K) = \max[S + D - K, c(S,K)] \geq c(S,K)$$

where $C(S,D,K)$ is the call price before the stock pays out its dividend. Similarly, for the put

$$P(S,D,K) = \max[K - S - D, p(S,K)] \geq p(S,K)$$

由（5.4）式，我们有$C(S,D,K) \geq c(S,K), \quad P(S,D,K) \geq p(S,D)$。For American options, dividends **induce** early exercise for calls and **delay** early exercise for puts.

在有股利时，欧式看涨期权和看跌期权之间的平价关系也会受到影响。Consider the following portfolios:

(1) long a call with strike K and long $\frac{K}{1+r_F}+D$ risk-free bond (present value)

It's value at t=0 $c(S,K)+\frac{K}{1+r_F}+D$

(2) long a put with strike K and long 1 share of the stock

It's value at t=0 $p(S,K)+S$

Look at the payoffs of these portfolios:

	$\tilde{X} \le K$	$\tilde{X} > K$
(1)	$\max[0, \tilde{X} - K] + K + D(1 + r_F)$ $= K + D(1 + r_F)$	$\max[0, \tilde{X} - K] + K + D(1 + r_F)$ $= \tilde{X} + D(1 + r_F)$
(2)	$\max[0, K - \tilde{X}] + \tilde{X} + D(1 + r_F)$ $= K + D(1 + r_F)$	$\max[0, K - \tilde{X}] + \tilde{X} + D(1 + r_F)$ $= \tilde{X} + D(1 + r_F)$

Clear, portfolios 1 and 2 have identical payoffs. Thus, their costs today must be equal, i.e.

$$c(S, K) + \frac{K}{1 + r_F} + D = p(S, K) + S$$

5.4 Pricing Options in a Complete Market

5.4.1 单期

If markets are complete, there exists a unique, complete set of state prices: $\phi_\omega, \forall \omega \in \Omega$。

Let X_ω be the payoff of the underlying asset in state ω. Then

$$
\begin{aligned}
c(S,K) &= \sum_{\omega} \phi_\omega \max[0, X_\omega - K] \\
&= \sum_{\omega} q_\omega \left(\sum\nolimits_{\omega} \phi_\omega\right) \max[0, X_\omega - K] \\
&= \frac{1}{1+r_F} E^Q \max[0, \tilde{X} - K] \\
&= \frac{1}{1+r_F} E^Q[\tilde{c}]
\end{aligned}
$$

为了得到更为具体的结果，我们必须对股票价格在 1 期的可能取值作进一步假设，即我们必须对股票价格的过程作更为具体的描述。

As an example, we now consider the **binomial option pricing model** for stock option. Suppose that the price of the stock follows a **binomial tree process** as follows:

$$S \begin{cases} uS\text{，概率为 } p \\ dS\text{，概率为 } 1-p \end{cases}$$

The stock price can go up to uS with probability p or go down to dS with probability $1-p$. The current stock price is S.

There is also a risk-free asset with rate of return r_F, its price is B: $B=\dfrac{1}{1+r_F}$.

$$B \begin{cases} 1\text{，概率为 } p \\ 1\text{，概率为 } 1-p \end{cases}$$

No arbitrage requires that $d<1+r_F<u$. Given that there are only two possible states (for the stock payoff), the market is complete.

1 期只有两个可能状态，由资产定价基本原理，存在状态价格向量$\phi = [\phi_u; \phi_d] >> 0$，使得

股票：$S = \phi_u uS + \phi_d dS \Rightarrow \phi_u u + \phi_d d = 1$

债券：$B = \phi_u \cdot 1 + \phi_d \cdot 1 = \dfrac{1}{1+r_F}$

可解出ϕ_u, ϕ_d，即在上涨和下跌时的状态价格为

$$\phi_u = \frac{1}{1+r_F}\frac{(1+r_F)-d}{u-d}, \phi_d = \frac{1}{1+r_F}\frac{u-(1+r_F)}{u-d}$$

两个状态、两只支付是线性独立的证券——股票和债券——使得市场是完全的，并且它们的价格唯一地确定了状态价格。给定唯一的状态价格，我们有

$$c = \phi_u [uS - K]_+ + \phi_d [dS - K]_+ \quad （5.5）$$

也就是说，从股票和债券的价格出发，我们可以确定期权或者其他任意证券的价格。

A European call on the stock with strike K can be priced by arbitrage arguments, taken the stock price process and risk-free rate as given. We know that at maturity, the payoff of the option is $\max[S_1-K,0]$. Depending on the terminal stock price, the value of the option at the terminal date is

$$c_1=\begin{cases} c_u \equiv \max[uS-K,0], & S_1=uS \\ c_d \equiv \max[dS-K,0], & S_1=dS \end{cases}$$

Consider now a portfolio of the stock and the risk-free asset: θ_S shares of stock and θ_B shares of bond. Its payoff with be

$$P_1=\begin{cases} P_u \equiv \theta_S uS+\theta_B, & S_1=uS \\ P_d \equiv \theta_S dS+\theta_B, & S_1=dS \end{cases}$$

Choose θ such that $P_u=c_u, P_d=c_d$. We have the following solution:

$$\theta_S=\frac{c_u-c_d}{(u-d)S},\theta_B=\frac{uc_u-dc_d}{(u-d)}$$

The value of the portfolio at $t=0$ is $P=\theta_S S+\theta_B/(1+r_F)$. Since the portfolio gives the exact payoff as the call in all future states, no arbitrage requires that the price of the call c equals P:

$$P=\frac{1}{1+r_F}\left[\frac{(1+r_F)-d}{u-d}c_u+\frac{u-(1+r_F)}{u-d}c_d\right]=c$$

这恰恰就是（5.5）式。复制组合中所包含股票的股数θ_S也称为 hedge ratio 或δ。

Given the state prices, we can define the equivalent martingale measure:

$$q=\frac{\phi_u}{\phi_u+\phi_d}=\frac{(1+r_F)-d}{u-d}$$

$$1-q=\frac{\phi_d}{\phi_u+\phi_d}=\frac{u-(1+r_F)}{u-d}$$

We have

$$c = \frac{1}{1+r_F}[qc_u + (1-q)c_d] = \frac{1}{1+r_F}E^Q[c_1]$$

Define $\hat{c}_t \equiv c_t / B_t, \hat{S}_t \equiv S_t / B_t$. Then, we have

$$\hat{c}_t = E_t^Q[\hat{c}_{t+1}], \hat{S}_t = E_t^Q[\hat{S}_{t+1}]$$

Hence, q is the equivalent martingale measure.

看涨期权的定价公式具有以下三个有趣的特征：

1．该公式不依赖于股票价格上涨的概率 q。这使得，即使投资者对 q 的预期不一致，只要他们对别的参数的估计一致（包括u,d,S,K,r_f），他们就会有一样的定价公式。

2．该公式的获得不依赖个体对风险的偏好，所需的假设仅仅只是无套利。

3．市场完备的重要性（二项树模型加上两种证券）。

5.4.2 多期

现在我们通过一次倒推一步的方法，将这种解题方法推广到多期。

下图是一个两期的看涨期权的树图。如前，设股票初始价格为S，当沿着“树枝”移动时，以u,d为因子分别向上和向下调整。途中数值对应股票看涨期权价值，其执行价格为K，到期日与图中最后时点相同。树图中最后节点的期权的价值已知。具体来说，

$$c_{uu}=\max\left[0,u^2S-K\right]$$
$$c_{ud}=\max\left[0,udS-K\right]$$
$$c_{dd}=\max\left[0,d^2S-K\right]$$

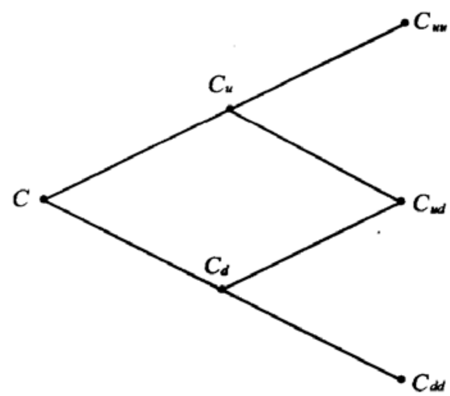


图 10.5　两期期权

假设没有提前执行期权，由前面给出的单期计算公式，我们可以计算出c_u,c_d的值，即：

$$c_u=\frac{1}{1+r_F}\left[qc_{uu}+(1-q)c_{ud}\right],c_d=\frac{1}{1+r_F}\left[qc_{ud}+(1-q)c_{dd}\right]$$

再次应用同样的风险中性贴现公式，我们可以得 c，因此，

$$c=\frac{1}{1+r_F}\left[qc_u+(1-q)c_d\right]=\frac{1}{(1+r_F)^2}\left[q^2c_{uu}+2q(1-q)c_{ud}+(1-q)^2c_d\right] \qquad （5.6）$$

对于有更多期间的树图，可以使用相似的过程计算。从最后时点开始向初始点倒推，只要在树图中每一节点重复单期的无风险贴现计算过程。

例　某股票的对数波动率为 $\sigma=0.20$，现价为 62 元，不支付红利。该股票的某看涨期权从现在起 5 个月后到期，执行价格为 60 元。现行利率为 10%，每月复利一次。我们希望用二叉树法确定该期权的理论价值。

首先我们必须确定股价波动的二叉树模型中的参数。令期间长度为 1 个月，　即 $\Delta t=1/12$，可以得出参数为：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.05943$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.94390$$

$$1 + r_F = 1 + 0.1/12 = 1.00833$$

现在我们可以建立连续 6 个月(包括现在月份)月初股票价格的二叉树图。

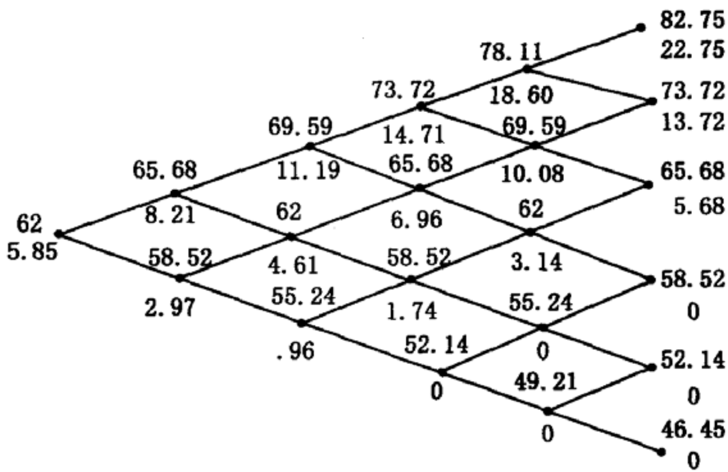


图 10.6 用二叉树描述的 5 月期看涨期

每一节点上的数字是该节点股票价格。接下来我们计算看涨期权价格。从最后一期开始，在最后节点下面输入看涨期权的到期价值，它是 0 和 $S-K$ 的较大值。例如顶端节点对应的就是 82.75－60＝22.75。

前一时点的价值由单期定价关系式计算出来，该时刻任意节点的值是下一时刻两个连续数值的贴现值的期望。期望值用风险中性概率 q 和 $1-q$ 计算。例如，最上端节点的值是[0.5577×22.75+(1－0.5577)×13.72]/1.00833＝18.60。

向左推算，一次计算一期，直到最终算出初始时刻的价值。在本例中，采用这种方法计算出来的期权的价格是 5.85 元。

注意这整个计算过程与股票预期增长率独立，它只是通过概率 p 进入二叉树模型，但这个概率在期权计算中没有使用，相反用到的是风险中性概率 q。

5.4.3 更一般的二叉树问题

用二叉树图方法计算期权价值极其简单，应用广泛。由于这个原因，它已成为投资和金融界中常用的工具。本小节说明这种基本方法是如何扩展到更复杂的情形。

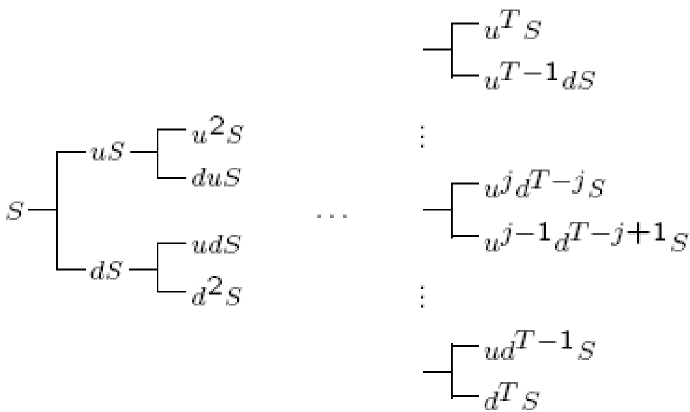


图 10.7 一般的二叉树图

令ω为股票价格路径，上升j、下降$T-j$。路径ω的概率为$q^j(1-q)^{T-j}$。对于t时支付为$CF(\omega)$的证券，其价格为：

$$PV(CF)=\frac{1}{R^T}\sum_{\omega}q^j(1-q)^{T-j}CF(\omega) \tag{5.7}$$

考虑欧式期权，其支付为：

$$CF(\omega)=\max[u^j d^{T-j}S-K,0]$$

这里的T是总的时间区间数，j是股票价格上涨的次数（$j=0,1,\cdots,T$）。每个支付的概率的一般形式为二项分布：

$$B(j|T,q)=\left(\frac{T!}{j!(T-j)!}\right)q^j(1-q)^{T-j}$$

把每一个可能的支付与其概率相乘，再相加，得到价格为

$$C=\frac{1}{R^T}\left\{\sum_{j=0}^{T}\left(\frac{T!}{j!(T-j)!}\right)q^j(1-q)^{T-j}\max[u^jd^{T-j}S-K,0]\right\}$$

- 令 n 为上升变动的最小数，以便

$$u^nd^{T-n}S>K \quad \text{or} \quad n\ln u+(T-u)\ln d+\ln S>\ln K$$

- 对于 $j<n$， $\max[u^nd^{T-j}S-K,0]=0$
- 对于 $j\geq n$， $\max[u^nd^{T-j}S-K,0]=u^nd^{T-j}S-K$

则

$$\begin{aligned}C(S,K,T)=&S\left[\sum_{j=n}^{T}\left(\frac{T!}{j!(T-j)!}\right)q^j(1-q)^{T-j}\left(\frac{u^jd^{T-j}}{R^T}\right)\right]\\&-KR^{-T}\left[\sum_{j=n}^{T}\left(\frac{T!}{j!(T-j)!}\right)q^j(1-q)^{T-j}\right]\end{aligned} \tag{5.8}$$

令

$$q=\frac{R-d}{u-d},q^{'}=(u/R)q$$

$$\Phi(n;T,q^{'})=\sum_{j=n}^{T}\left(\frac{T!}{j!(T-j)!}\right)q^{'j}(1-q^{'})^{T-j}$$

$$\Phi(n;T,q)=\sum_{j=n}^{T}\left(\frac{T!}{j!(T-j)!}\right)q^{j}(1-q)^{T-j}$$

这里$\Phi(n;T,p)$定义为当向上变动的概率为p时的，在二项式分布中总步数T种至少有n次上升的概率。

于是，我们有

$$C(S,K,T)=S\Phi(n;T,q^{'})-KR^{-T}\Phi(n;T,q) \quad (5.9)$$

其中，n为大于$\ln(K/Sd^{T})/\ln(u/d)$的最小非负整数。若$n>T,C(S,K,T)=0$。

5.4.4 倒推定价法

得到每个结点的资产价格之后，就可以在二叉树模型中采用倒推定价法，从树型结构图的末端 T 时刻开始往回倒推，为期权定价。由于在到期T时刻的预期期权价值是已知的，例如看涨期权价值为$\max\left[0, S_T - K\right]$，看跌期权价值为$\max\left[0, K - S_T\right]$，因此在风险中性条件下在求解$T - \Delta t$时刻的每一结点上的期权价值时，都可通过将$T$时刻的期权价值的预期值在$\Delta t$时间长度内以无风险利率$r$贴现求出。同理，要求解$T - 2\Delta t$时的每一结点的期权价值时，也可以将$T - \Delta t$时的期权价值预期值在时间$\Delta t$内以无风险利率 r 贴现求出。依此类推。采用这种倒推法，最终可以求出零时刻（当前时刻）的期权价值。

以上是欧式期权的情况，如果是美式期权，就要在树型结构的每一个结点上，比较在本时刻提前执行期权和继续再持有Δt时间，到下一个时刻再执行期权，选择其中较大者作为本结点的期权价值。

5.5 Option and Market Completeness

上一节中，我们是把期权看作冗余证券、而把股票和债券看作原生证券，从而用股票和债券的价格为期权定价。本节中，我们考虑期权不是冗余证券的情形。我们将证明期权可以增进证券市场的完全性甚至使市场完全化。

A　Simple Option Strategies

Let us first consider the following “butterfly position” which is a portfolio of options on an underlying asset (“stock”):

- long 1 call with strike $K-\delta$
- short 2 call with strike K
- long 1 call with strike $K+\delta$

The payoff of the portfolio is

$$\max[0,S-(K-\delta)]-2\max[0,S-K]+\max[0,S-(K+\delta)]$$
$$=\begin{cases} 0 & S\le K-\delta \\ S-(K-\delta) & K-\delta<S<K \\ -S+(K+\delta) & K<S<K+\delta \\ 0 & K+\delta<S \end{cases}$$

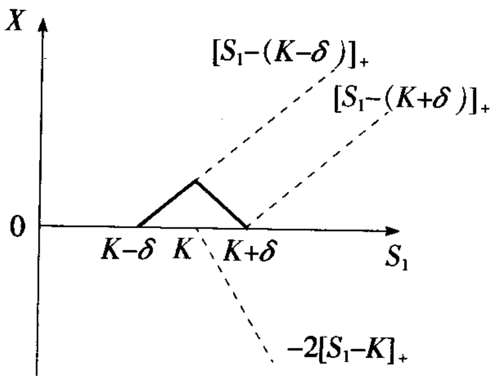


图 5.4 蝴蝶头寸的支付

This portfolio has non-zero payoff only when $S\in(K-\delta,K+\delta)$. 当δ很小时，蝴蝶头寸和状态或有证券的支付形式类似。

B Completing Market with Options

Suppose that there exists a security (or a portfolio of securities) that has **state-separating** payoff, i.e. $X_{\omega} \neq X_{\omega'}$ if $\omega \neq \omega' \forall \omega, \omega' \in \Omega$. We call this security **state-index security** （**SIS**）:

$$\tilde{X} = [X_1; \quad X_2; \quad \cdots; \quad X_{\omega-1}; \quad X_{\omega}; \quad X_{\omega+1}; \quad \cdots; \quad X_{\Omega}], X_1 < \cdots < X_{\omega} < \cdots X_{\Omega}$$

Without loss of generality, assume that $X_{\omega} < X_{\omega'}$ if $\omega < \omega'$ (i.e., order the states by the payoff of the state index security).

Now let us introduce European call options on the state index security. A European call on the state index security with strike X_{ω} has the following payoff:

$$\max[0, \tilde{X} - X_{\omega}] = [\underset{1}{0}; \cdots; \underset{\omega}{0}; \underset{\omega+1}{X_{\omega+1} - X_{\omega}}; \underset{\omega+2}{X_{\omega+2} - X_{\omega}}; \cdots; \underset{\Omega}{X_{\Omega} - X_{\omega}}]$$

Now consider the following set of Ω securities:

(1) long one share of the state index security

(2) long European calls on the state index security with strikes $X_1, X_2, \cdots, X_{\Omega-1}$ respectively (one call each and total of $\Omega-1$ calls).

The payoff matrix for the set of Ω securities is

$$X = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ X_2 & X_2 - X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ X_3 & X_3 - X_1 & X_3 - X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_\Omega & X_\Omega - X_1 & X_\Omega - X_2 & \cdots & X_\Omega - X_{\Omega-1} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} SIS & K = X_1 & K = X_2 & & K = X_{\Omega\text{-}1} \end{array} \end{array}$$

Clearly, X has full rank（i.e. the market is complete）. Thus, a securities market structure given by the index security plus $\Omega-1$ call options on it with strike $X_1, X_2, \cdots, X_{\Omega-1}$ is complete. This shows introducing options can help to complete markets.

We can also show that portfolios of options on state-index security can synthesize state contingent claims. Suppose that in state $\omega = 1, 2, \cdots, \Omega$, the payoff of state-index security is $\delta, 2\delta, \cdots, \Omega\delta$ respectively:

$$\tilde{X} = [\delta; \quad 2\delta; \quad \cdots; \quad (\omega-1)\delta; \quad \omega\delta; \quad (\omega+1)\delta; \quad \cdots; \quad \Omega\delta]$$

Consider the set of call options on state-index security with strike $0, \delta, 2\delta, \cdots, (\Omega-1)\delta$. Note that the call with zero strike is simply the underlying asset which has the same payoff as state-index security (provided that its price is non-negative).

Let $X_{\cdot,n}$ ($n = 0, 1, \cdots, \Omega - 1$) be the payoff vector of the call with strike $n\delta$. The payoff matrix of all these options is

$$X = \begin{bmatrix} \delta & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2\delta & \delta & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega\delta & (\omega-1)\delta & \cdots & \delta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\Omega-1)\delta & (\Omega-2)\delta & \cdots & (\Omega-\omega)\delta & \cdots & \delta & 0 \\ \Omega\delta & (\Omega-1)\delta & \cdots & (\Omega-\omega-1)\delta & \cdots & 2\delta & \delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} X_{.,0} & X_{.,1} & X_{.,\omega\text{-}1} & X_{.,\Omega\text{-}2} & X_{.,\Omega\text{-}1} \\ K=0 & K=\delta & K=(\omega-1)\delta & K=(\Omega-2)\,\delta & K=(\Omega-1)\delta \end{array}$$

Consider the payoff vector of the following portfolio

- long 1 call with strike 0
- short 2 call with strike δ
- long 1 call with strike 2δ

This is a butterfly. Its payoff vector is

$$X_p = X_{\cdot,0} - 2X_{\cdot,1} + X_{\cdot,2} = (X_{\cdot,0} - X_{\cdot,1}) - (X_{\cdot,1} - X_{\cdot,2})$$
$$= [\delta;\delta;\cdots;\delta] - [0;\delta;\cdots;\delta] = [\delta;0;\cdots;0]$$

This is a **state 1 contingent claim** since it pays δ in 1 and 0 otherwise. It's value at t=0 is $c(0)-2c(\delta)+c(2\delta)$. So, $\phi_1 = \frac{1}{\delta}[c(0)-2c(\delta)+c(2\delta)]$.

Similarly, a butterfly with the three strike prices being $(\omega-1)\delta, \omega\delta$ and $(\omega+1)\delta$ pays δ in state ω and nothing otherwise, it is a **state** ω **contingent claim**. Let ϕ_ω be the state price of ω. Then

$$\phi_\omega = \frac{1}{\delta}\{[c(K_{\omega-1}) - c(K_\omega)] - [c(K_\omega) - c(K_{\omega+1})]\}$$
$$= \frac{1}{\delta^2}\{[c(K_{\omega+1}) - c(K_\omega)] - [c(K_\omega) - c(K_{\omega-1})]\}\delta$$

there is $K_\omega = \omega\delta, \omega = 1,\cdots,\Omega-2$. （括号里为二阶差分）

Note that,

$$X_p = X_{\cdot,\Omega-2} - 2X_{\cdot,\Omega-1} = [0;0;\cdots 0;\delta;0]$$

So,

$$\phi_{\Omega-1} = \frac{1}{\delta}[c(K_{\Omega-2}) - 2c(K_{\Omega-1})]$$

Note that, the option with strike $(\Omega-1)\delta$ pays δ in state Ω and nothing otherwise. So it is the **state Ω contingent claim**, $\phi_\Omega = \frac{1}{\delta}c(K_{\Omega-1})$.

For any asset with payoff $\{X_\omega\}$, its price should be

$$S = \sum_\omega \frac{[c(K_{\omega+1}) - c(K_\omega)] - [c(K_\omega) - c(K_{\omega-1})]}{\delta^2}\delta X_\omega$$

Note，$c(K_{\Omega})=c(K_{\Omega+1})=0$．由于$\omega$和$K_{\omega}$一一对应，因此也可以用$K_{\omega}$描述状态，所以证券的支付可以表示为$K$的函数，我们以$X(K)$来表示证券的支付，When state-index security has a continuous distribution，即K可取大于 0 的任意实数值，并且$c(\cdot)$ is twice differentiable，我们取$\delta=\mathrm{d}K$，显然

$$\frac{[c(K_{i+1})-c(K_i)]-[c(K_i)-c(K_{i-1})]}{\delta^2}=\left.\frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}\right|_{K=K_i}$$

and

$$S=\int_0^{\infty}\frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}X(K)\mathrm{d}K$$

Here, we have assumed that state-index security is non-negative.

We can define the risk-neutral probability by the density function:

$$q(K) = \frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2} \Bigg/ \int_0^\infty \frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2} X(K) \mathrm{d}K$$

Note that the price of a risk-free bond is

$$B = \int_0^\infty \frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2} \mathrm{d}K$$

Thus,

$$\frac{S}{B} = \int_0^\infty q(K) X(K) \mathrm{d}K$$

Chapter 6 Expected Utility Function

6.1 Expected Utility Function

一般的效用函数 $U(c)$依赖于两个因素：未来状态的概率分布以及在各状态下对消费的偏好。在我们的研究框架中，未来状态的概率分布自然给定而且所有参与者都知道。因此，一个直观的想法是把参与者个人的消费偏好对 $U(c)$的影响与所有参与者都知道的外生概率对 $U(c)$的影响分离开来。

假设在 1 期没有不确定性，这时，两个时期的消费都是确定的。记确定性消费路径的效用为$u(c_0,c_1)$。进一步假设 1 期有两个可能状态，记为 a 和 b，两者发生的概率相等。相应地，在两个状态下的消费分别为 c_{1a} 和 c_{1b}。如果出现的是状态 a，消费路径是(c_0,c_{1a})，获得的效用为$u_a(c_0,c_{1a})$。

这里，u 有下标 a，表明我们允许某一特定消费路径的效用除了依赖于消费水平以外，还依赖于状态。同样地，如果出现的是状态 b，消费路径是(c_0,c_{1b})，获得的效用为$u_b(c_0,c_{1b})$。因为每一状态发生的机会只有一半，因而一个简单的想法就是把每一消费路径得到的效用、以它所发生的概率为权重得到的平均值作为不确定消费计划的效用。在本例中，它就是$\frac{1}{2}u_a(c_0,c_{1a})+\frac{1}{2}u_b(c_0,c_{1b})$，这也就是不同可能的消费路径效用的期望值。

如果上述想法在一般情形下也成立，那么效用函数就可以表示成**不同消费路径效用的期望值**。

$$U(c)=\sum_{\omega}p_{\omega}u_{\omega}(c_0,c_{1\omega}) \tag{6.1}$$

这种形式的效用函数也叫做 expected utility function. $U(c)$ 是 VN-M 期望效用函数，$u(c)$ 是贝努利效用函数。

如果偏好可以用期望效用函数表示，它就明确地表示了**不同状态的概率分布如何影响消费计划的总效用**：它们以线性形式进入效用函数。

这个形式就决定了偏好的一些重要性质。例如，它把偏好中的概率以及对消费本身的个人喜好明确地分离开来，前者是外生的、人所共知的、而且是共同的，而后者则是因人而异的。更重要的是，这样的偏好满足下面的条件：

公理 4 独立性公理（替换公理）：假设消费计划 c 与 c' 相对于某一状态有相同的消费路径 x 并且 $c \succsim c'$，那么，如果我们把 x 换成另外一个消费路径 y，c 与 c' 的排序不变。

$c \succsim c'$，则在任何状态下，c 都比 c' 多，不受状态影响。

例：

这个公理的意思是：考虑两个消费计划 c 与 c'，它们相应于状态 ω 的消费路径都是 x，如果 $c \succsim c'$，那么 c 肯定在其他状态提供了更优的消费路径。如果把 x 换成 y，那么 c 与 c' 之间的偏好关系保持不变，这就说明 c 与 c' 中其他状态下消费路径之间的偏好关系不受状态 ω 下消费的影响。也就是说，不同状态下消费（不同消费路径）得到的效用之间彼此“独立”。

定理 6.1 （Debreu）在独立性公理假设下，定理 2.1 给出的效用函数具有（6.1）式的期望效用形式。

期望效用函数有一个直观的解释：不确定状态下的消费得到的效用是每一可能状态下消费路径得到的效用的加权平均值，权重是相应状态发生的概率。

6.2 Additional Assumptions

A State independence

在期望效用的一般形式中，每个消费路径的效用可能是状态依赖的，也就是说，相同的消费在不同状态下可能得到不同的效用。这是否合理呢？答案在相当程度上取决于模型是如何描述状态和消费的。我们可以假设存在一个状态独立的（期望）效用，即效用与状态无关：

$$u_\omega(c_0, c_{1\omega}) = u(c_0, c_{1\omega})$$

除了特别申明以外，我们都假设状态独立的期望效用函数。

具体来说，效用函数采取如下形式：

$$U(c) = \sum_\omega p_\omega u(c_0, c_{1\omega}) \qquad (6.2)$$

B　Time additive

在（6.2）式中，给定消费路径的效用函数具有$u(c_0, c_{1\omega})$的一般形式。在这种形式下，1 期消费得到的效用也依赖于 0 期的消费，反之亦然。这种依赖性允许在某一期消费的边际效用依赖另一期的消费水平，即$\partial^2 u(c_0, c_{1\omega})/(\partial c_0 \partial c_{1\omega}) \neq 0$。为了简单起见，我们假定条件$\partial^2 u(c_0, c_{1\omega})/(\partial c_0 \partial c_{1\omega}) = 0$成立。特别地，我们假设

$$u(c_0, c_1) = u_0(c_0) + u_1(c_1)$$

这种形式的效用函数称作是 time additive 或 time separable。也就是说，从一个消费路径得到的效用等于各期消费得到的效用之和。在时间可加条件下，我们可以把参与者的期望效用函数写成

$$U(c) = u_0(c_0) + \sum_{\omega} p_{\omega} u_1(c_{1\omega}) \tag{6.3}$$

为了方便和简化，可进一步假设$u_1(\cdot)$就是$u_0(\cdot)$乘以一个正系数：

$$u_0(c_0)+u_1(c_1)=u_0(c_0)+\rho u_0(c_1)=u(c_0)+\rho u(c_1), \rho>0$$

这里，系数ρ叫做 time preference coefficient。它就是为了刻画不同时期、相同水平消费之间的差异。ρ也被称为 time-discount coefficient。在这种形式的效用函数下，期望效用函数就变成了

$$U(c)=u(c_0)+\rho\sum_{\omega}p_{\omega}u(c_{1\omega}) \qquad (6.4)$$

这样的效用函数把影响偏好的 **3 个因素**完全分开了：每一消费路径发生的概率，由$P=\{p_{\omega},\omega\in\Omega\}$给定；消费的时间性，由时间折现系数$\rho$描述；以及从消费得到的效用本身由函数$u(\cdot)$描述。在称谓上，我们也把$u(\cdot)$叫做效用函数，而不与总的效用函数 U 区别开来。

总效用函数 U 与效用函数 u 之间存在一个重要的区别：U 具有**序数性**，即如果对 U 进行任意的正单调变化，所对应的消费计划的排序保持不变；而这点对 u 并不成立，效用函数 u 具有**基数性**。也就是说，在评价一个消费计划时，由于不同消费水平得到效用的相对值十分重要。在期望效用函数的形式下，一个参与者的偏好可由效用函数 u 唯一地描述。

6.3 期望效用函数的拓展

- **习惯（habit formation）**

习惯就是反映在效用函数中某种形式的时间不可分离性。一个具体例子是如下的效用函数：

$$u_{\omega}(c_0,c_1)=u(c_0,c_1)=u(c_0)+\rho u(c_1-hc_0),h\geq 0$$

这里，1 期的效用不是取决于当时的消费本身，而是取决于相对于前期消费的增额。如果$u'(0)=\infty$且$h=1$，则意味着将来任何相对于现在消费的减少都是不可接受的。这类参与者对现在的消费的选择会格外谨慎。

- **攀比（catching up with the Jones）**

所谓攀比，是指消费的效用不仅取决于自己的消费，而且依赖于别人的消费。让我们考虑如下的效用函数：

$$u_{\omega}(c_0, c_1) = u(c_0 - kC_0) + \rho u(c_1 - kC_1), 0 \le k < 1$$

这里，$[C_0; C_1]$ 是整个经济的总消费，而 kC_0, kC_1 则代表 0 期和 1 期的人均消费。这样的效用函数代表实际效用取决于**个体相对于某个人均消费指数之差**。因为总消费或人均消费在每个特定状态下是给定的（即总禀赋），上面的效用函数也可以看作状态依赖的一种特殊形式。

- **状态依赖（state dependence）**

我们还可以允许其他形式的状态依赖，比如说给定消费水平，边际效用在整体经济较好时也较高。这类参与者希望把较多的资源配置到经济情况较好的状态下，而给经济情况较差的状态留下较少的资源。这与通常的直觉相反。我们可以把这类偏好解释成过于乐观，过多地估计好状态发生的可能，这类行为正是行为经济和行为金融讨论的对象。

- 一阶风险厌恶（展望理论）**[first order risk aversion （Prospect theory）]**

我们一般假设效用函数在连续的基础上是可微的，但它也对所描述的行为带来了制约。一阶风险厌恶讨论的就是效用函数不可微时的情形，如

$$u(c)=\begin{cases}a_+(c-\overline{c}),c\geq\overline{c}\\ a_-(c-\overline{c}),c<\overline{c}\end{cases},a_->a_+>0$$

显然，$u(c)$ 在 $c=\overline{c}$ 是不可微的。

- 不确定性厌恶（**uncertainty aversion**）

6.4 不确定性下理性决策

How to rank the following 4 investment choices?

A		B		C		D	
x	$p(x)$	x	$p(x)$	x	$p(x)$	x	$p(x)$
4	1	5	1	-5	1/4	-10	1/5
				0	1/2	10	1/5
				40	1/4	20	2/5
						30	1/5

When there is no risk, we choose the investment with the highest rate or return –

Maximum return criterion, e.g. B dominates A, but this criterion fails to compare C with D:

$$E_C(x)=\frac{1}{4}(-5)+\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{4}(40)=8.75, E_D(x)=\frac{1}{5}(-10)+\frac{1}{5}(10)+\frac{2}{5}(20)+\frac{1}{5}(30)=14$$

$$E_C < E_D$$

Maximum expected return criterion (for risky investment) identifies the investment with the highest expected return.

最大期望收益准则是指使用投资收益的预期值比较各种投资方案优劣。这一准则有其合理性，它可以对各种投资方案进行准确的优劣比较，同时这一准则还是收益最大准则在不确定情形下的推广。

18世纪的一个经典的例子——圣彼得堡悖论（Saint Petersburg Paradox, SPP），这个例子说服18世纪的学者期望收益最大化原则不是在不确定性下最合适的决策原则。

Sequence	Probability	Prize
H	1/2	$1
TH	1/4	$2
TTH	1/8	$4
TTTH	1/16	$8
TTTTH	1/32	$16

有这样一场赌博：第一次赢可以得1元，第一次输第二次赢可以得2元，前两次输第三次赢可以得4元，……一般情形为前n-1次输，第n次赢可以得 2^{n-1} 元。为了参加这一赌博，愿意支付多少金额？或者说，应付多少钱，才能使这场赌博是“公平”的？

如果用数学期望来定价，答案将是无穷大！

$$EV_{SPP}=\sum_{i=1}^{\infty}2^{i-1}(\frac{1}{2})^{i}=\frac{1}{2}\sum_{i}1=\infty$$

但经过试验观察，我们发现，为了参加这一游戏，人们愿意付出的金额在2-3之间。因此，期望收益最大原则并不能解决一切的不确定性问题。

对于证券投资来讲，只追求期望收益最大化的投资者绝不会选择一个多元化的资产组合。如果一种证券具有最高的期望收益，这个投资者会把他的全部资金投资于这种证券。如果几种证券具有相同的最大化期望收益，对这个投资者来说，投资于若干这些证券的组合或者只是其中的某一种证券是无差别的。由此可见，如果我们认为多元化是投资的基本原则的话，我们必须否定仅仅最大化期望收益原则的目标假定。

贝努利提出**期望效用准则**方法：用期望效用作为最大化的目标，假设投资者关心的是期末财富的效用，从而成功解决了圣彼得堡悖论问题。

用期末财富的对数形式或指数形式作为效用函数，则 $\log w$ 或 $w^{1/2}$ 表示效用函数，w 表示财富。那么通过简单的计算，可以发现人们的确定等价财富的确在2-3元之间。

使用效用函数 $u = \ln w$：

$$Eu_{SPP} = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^i \ln 2^{i-1} = \ln 2 = 0.693 = \ln w \Rightarrow x = 2$$

使用效用函数 $u = w^{1/2}$：

$$Eu(w) = \sum_i \sqrt{2^{i-1}}(1/2)^i = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = u(w_0) = \sqrt{w_0}\, w_0 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \approx 2.91 \approx 3$$

彼得堡大街悖论告诉我们，最大期望收益准则在不确定情形下的时候可能导致不可接受的结果。而贝努力提出的用期望效用取代期望收益的方案，可能为我们的不确定情形下的投资选择问题提供最终的解决方案。

前面提到的独立性公理在实际的试验中经常失效。最著名的例子就是阿莱斯悖论（Allais Paradox）。考虑图 6.1 中的两对抽奖中奖法。抽奖 p_1 在确定的情况下支付 100 万元的奖励。抽奖 p_2 在 0.1 的概率下支付 500 万元，0.89 的概率下支付 100 万元，0.01 的概率下不支付任何奖励。抽奖 p_3 和 p_4 类似解释。

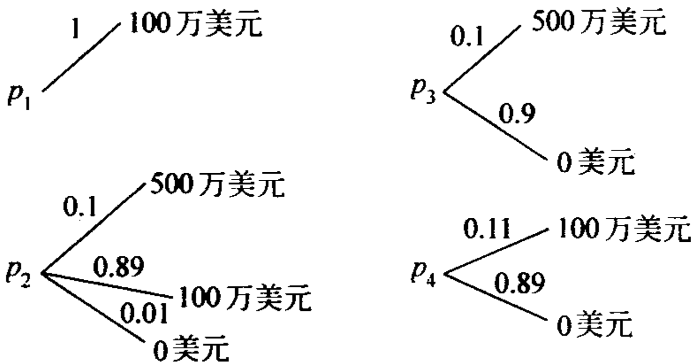


图 6.1 阿莱斯悖论

大部分人在第一对抽奖中，选择 p_1 而不是 p_2；在第二对抽奖中，选择 p_3 而不是 p_4。

即 $p_1 \succ p_2, p_3 \succ p_4$，这种行为就违背了独立性公理。

$$p_1 \sim 0.11(100) + 0.89(100)$$

$$p_2 \sim 0.11\left[\frac{1}{11}(0) + \frac{10}{11}(500)\right] + 0.89(100)$$

$$p_1 \succ p_2 \Rightarrow 0.11(100) + 0.89(100) \succ 0.11\left[\frac{1}{11}(0) + \frac{10}{11}(500)\right] + 0.89(100)$$

$$\Rightarrow 100 \succ \frac{1}{11}(0) + \frac{10}{11}(500)$$

$$p_3 \sim 0.11\left[\frac{1}{11}(0) + \frac{10}{11}(500)\right] + 0.89(0)$$

$$p_4 \sim 0.11(100) + 0.89(0)$$

$$p_3 \succ p_4 \Rightarrow 0.11\left[\frac{1}{11}(0) + \frac{10}{11}(500)\right] + 0.89(0) \succ 0.11(100) + 0.89(0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{11}(0) + \frac{10}{11}(500) \succ 100$$

再有一个例子：考虑某人携夫人去剧院看演出，他可能遇到如下两种情况：

第一种情况是他到了剧院时，发现已买的两张票丢了。这时他是再买票看演出（假设还能买到几乎同样的票）、还是回家？

第二种情况是他准备买票的钱丢了。这时他是再掏钱买票看演出（假设他还有钱）、还是回家？

再有一个例子：考虑某人携夫人去剧院看演出，他可能遇到如下两种情况：

第一种情况是他到了剧院时，发现已买的两张票丢了。这时他是再买票看演出（假设还能买到几乎同样的票）、还是回家？

第二种情况是他准备买票的钱丢了。这时他是再掏钱买票看演出（假设他还有钱）、还是回家？

Kahneman-Tversky 发现，大多数人在第一种情况下会选择回家；而在第二种情况下会选择再买票。

对这个例子的结果我们可以说出许多心理上的原因，但是很难用期望效用函数来刻画，因为用钱来衡量时，丢票与丢钱的结果是一样的。

Chapter 7 Risk Aversion

7.1 Diminishing Marginal Utility

定义 7.1 对于函数$u(\cdot)$，如果$\forall x, y$和$\alpha \in [0,1]$，

$$\alpha u(x)+(1-\alpha)u(y) \le u(\alpha x+(1-\alpha)y) \quad (\Leftrightarrow Eu(x) \le uE(x))$$

则我们称$u(\cdot)$为凹的。

我们立即可以得到下面的定理：

定理 7.1 如果凸的连续偏好由（6.4）式中的期望效用函数表示，那么相应的效用函数$u(\cdot)$是凹的。

证明：

定理 7.2 如果凹函数$u(\cdot)$还是二阶可微的，那么$u'' \le 0$。

证明：

$u(\cdot)$ 表示的是消费的直接效用，它的一阶导数 $u'(\cdot)$ 表示的是消费的边际效用。不满足性要求 $u'(\cdot) > 0$，即边际效用始终为正。偏好的凸性意味着 $u''(\cdot) \le 0$，也就是说边际效用是消费的减函数。边际效用递减意味着当消费水平上升时，一单位额外消费得到的效用递减。

7.2 Definition of Risk Aversion

定义 7.2 Let $\tilde{g}$ be an uncertainty payoff. $\tilde{g}$ is a **fair gamble** if $E[\tilde{g}] = 0$.

定义 7.3 An agent is (strictly) risk averse if

$$E[u(w+\tilde{g})] \le (<) Eu(w) \big(= u(w)\big), \qquad \forall E[\tilde{g}] = 0$$

风险厌恶的经济含义：在期望值相同（即 $E(w+\tilde{g}) = E(w)$）的不确定性支付和确定性支付之间，一个风险厌恶的参与者总是选择后者。

定理 7.3 An agent is (strictly) risk averse $\Leftrightarrow$ u is (strictly) concave.

Proof:

(1) RA $\Rightarrow$ *u* concave

$\forall w_1, w_2 (w_1 > w_2)$ and $p \in (0,1)$, construct the Bernoulli gamble $\tilde{g} = \{g_1, g_2\}$ with probability $\{p, 1-p\}$ s.t.

$$g_1 = -(1-p)(w_2 - w_1), g_2 = p(w_2 - w_1)$$

Clearly, $E[\tilde{g}] = 0$. Define $w = pw_1 + (1-p)w_2$. Then

$$w_1 = w + g_1, w_2 = w + g_2$$

RA implies that

$$E[u(w+\tilde{g})] = pu(w+g_1) + (1-p)u(w+g_2) \leq u(w)$$

Then

$$pu(w_1) + (1-p)u(w_2) \leq u(pw_1 + (1-p)w_2), \forall w_1, w_2$$

Thus, *u* is concave.

(2) *u* concave $\Rightarrow$ RA

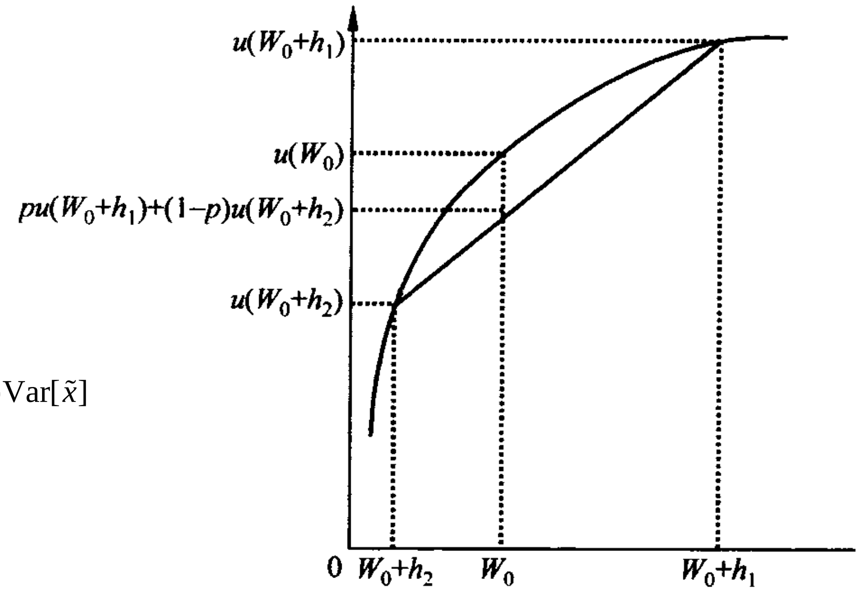
相反的证明用到了 ***Jensen's inequality***: 对于随机变量 $\tilde{z}$， $Ef(\tilde{z}) \le f(E\tilde{z})$，当且仅当 $f(\bullet)$ 是严格凹函数。根据定义 7.1，*u* concave implies that

$$E[u(w+\tilde{g})] \le u\left[E(w+\tilde{g})\right] = u\left[E(w)+E(\tilde{g})\right] = u\left[E(w)\right] = u(w), \forall E[\tilde{g}] = 0$$

由定义 7.1, the agent is risk averse.

定理 7.3 证明了当偏好可以由期望效用表示时，凸性（凹函数）意味着风险厌恶。

$$E[u(\tilde{x})] \approx u(E[\tilde{x}]) + \frac{1}{2}u''(E[\tilde{x}])\mathrm{Var}[\tilde{x}]$$



7.3 Measure of Risk Aversion

A　Arrow-Pratt Measure – Absolute Risk Aversion

定义 **7.4** For a fair gamble $\tilde{g}$, the **risk premium** required to take the gamble, π, is defined by （由 ***Jensen's inequality***， $E[u(w+\tilde{g})] \le u[E(w+\tilde{g})]$ ）

$$E[u(w+\tilde{g})] = u[E(w+\tilde{g}) - \pi] = u\left(w-\pi\right) = u(CE) \tag{7.1}$$

这就是说，风险溢价是参与者为了消除风险而愿意放弃的财富值。

式（7.1）定义中的 $w-\pi$ ，被称为风险赌博的 certainty equivalence （CE）。确定性等值 CE 是一个完全确定的收入量，在此收入水平上所对应的效用水平等于不确定条件下期望的效用水平，因此

$$CE = E(w+\tilde{g}) - \pi = w - \pi$$
$$\pi = E(w+\tilde{g}) - CE = w - CE$$

In general, $\pi = \pi(w,\tilde{g})$ 。

strict risk aversion $\Leftrightarrow \pi > 0$，risk neutrality $\Leftrightarrow \pi = 0$，risk preference $\Leftrightarrow \pi < 0$

定义 7.5 当随机变量 $\tilde{g}$ 的取值范围很小时，称 $\tilde{g}$ 为风险小的赌博。

一个随机变量的取值范围定义为它的最大值和最小值之差。对于小风险，通过泰勒展开（7.1）式两边，我们有　　等式左边：

$$E[u(w+\tilde{g})] = E\left[u(w) + u'(w)\tilde{g} + \frac{1}{2}u''(w)(\tilde{g}^2) + O(\tilde{g}^3)\right]$$

$$= Eu(w) + u'(w)E[\tilde{g}] + \frac{1}{2}u''(w)E[\tilde{g}^2] + OE[\tilde{g}^3]$$

$$\approx u(w) + \frac{1}{2}u''(w)E[\tilde{g}^2]$$

等式右边：　$u(w-\pi) = u(w) - u'(w)\pi + O(\pi^2) \approx u(w) - u'(w)\pi$

Thus, we have

$$\pi = \frac{1}{2}\left[-\frac{u''(w)}{u'(w)}\right]E[\tilde{g}^2] = \frac{1}{2}\left[-\frac{u''(w)}{u'(w)}\right]\mathrm{var}[\tilde{g}] \qquad (7.2)$$

$$E[\tilde{g}^2] = \mathrm{var}[\tilde{g}] + (E[\tilde{g}])^2 = \mathrm{var}[\tilde{g}]$$

式（7.2）给出的风险溢价有一个很直观的解释：对于小风险而言，方差是风险大小的度量。风险溢价与风险的大小成正比，而比例系数反映了参与者的风险厌恶程度。

除去客观因素 $\mathrm{var}[\tilde{g}]$，仅留下反映个体主观因素的部分，Arrow-Pratt measure of risk aversion 定义为：

$$A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} \geq 0$$

因为 $A(w)$是与每单位绝对风险的风险溢价相联系的，因此也被称为绝对风险厌恶。绝对风险厌恶不仅依赖于效用函数，它也依赖于财富水平 w。通常把绝对风险厌恶的倒数称作 risk tolerance coefficient：

$$T(w) \equiv \frac{1}{A(w)} = -\frac{u'(w)}{u''(w)} \tag{7.3}$$

B Relative Risk Aversion

Arrow-Pratt 风险厌恶度量是对于给定绝对大小的风险而定义的。它并不考虑风险对于参与者的总财富的相对大小。我们也可以考虑如下以总财富作为基数的赌博和风险溢价：

$$E[u(w+w\tilde{g})]=u(w-w\pi_R)$$
$$E[u(w(1+\tilde{g}))]=u(w(1-\pi_R))$$

这里，赌博的盈亏为 $w\tilde{g}$ ，是与总财富成比例的。相应的风险溢价也如此。对于小规模的赌博，我们有

$$\pi_R=\frac{1}{2}\left[-\frac{wu''(w)}{u'(w)}\right]\mathrm{var}[\tilde{g}] \tag{7.4}$$

这样就可以得到参与者的相对风险厌恶，记作 $R(w)$，定义为

$$R(w)\equiv-\frac{wu''(w)}{u'(w)} \tag{7.5}$$

因此，如果参与者面临的风险是与他的财富 $w\tilde{g}$ 成比例的，相应的风险溢价作为其财富的一部分，是与他的相对风险厌恶以及风险相对于财富的大小成比例的。

例：u=ln(w)，w=$20000，$G$(10，-10：50％，50％)：50% will win 10, 50% will lose 10。计算风险溢价。

Arrow－Pratt Measure

$$\pi = \frac{1}{2}\left[-\frac{u''(w)}{u'(w)} \right] \mathrm{var}[\tilde{g}]$$

$$\mathrm{var}[\tilde{g}] = 0.5 \times (20010 - 20000)^2 + 0.5 \times (19990 - 20000)^2 = 100$$

$$u'(w) = 1/w, u''(w) = -1/w^2$$

$$u''(w)/u'(w) = -1/w = -1/20000$$

$$\pi = -(1/2) \times 100 \times (-1/20000) = 0.0025$$

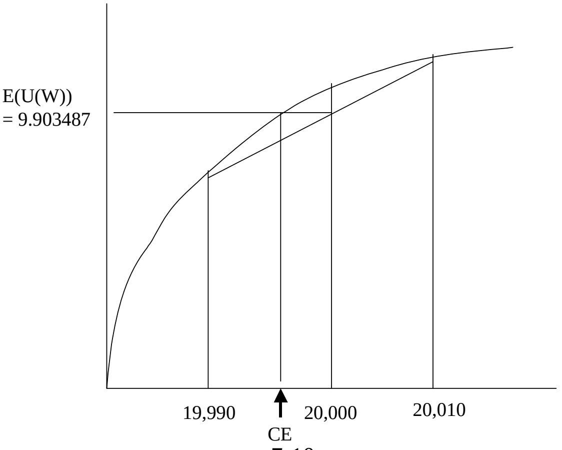
Markowitz Approach

$$E(u(\tilde{w})) = \sum p_i u(w_i) = 0.5 \times u(20010) + 0.5 \times u(19990)$$
$$= 0.5 \times \ln 20010 + 0.5 \ln 19990 = 9.903487 = u(CE)$$

$$\ln(CE) = 9.903487 \Rightarrow CE = 19999.9975$$

则风险溢价 $\pi = 0.0025$

Markowitz Approach



7.4 Examples

1. Risk-neutral
2. Negative exponential (**CARA**, Constant absolute risk aversion)
3. Quadratic
4. Power (**CRRA**, Constant relative risk aversion)
5. Log
6. HARA (Hyperbolic absolute risk aversion)

给定某个偏好，若其绝对风险厌恶随财富增加（减少）而增加（减少），即 $A'(w) > (<) 0$，则我们称之为**绝对风险厌恶递增（递减）**（increasing absolute risk aversion, IARA; decreasing absolute risk aversion, DARA）。如果其相对风险厌恶随财富增加（减少）而增加（减少），即 $R'(w) > (<) 0$，则我们称之为**相对风险厌恶递增（递减）**（increasing relative risk aversion, IRRA; decreasing relative risk aversion, DRRA）。

7.5 Comparing Risk Aversion

Let u_1, u_2 be increasing and smooth, $A_1(w), A_2(w)$ 是它们相应的（绝对）风险厌恶系数。

定理 7.4 (Pratt) The following statements are equivalent:

1. $A_1(w) \geq A_2(w), \forall w$

2. $u_1(u_2^{-1}(z))$ concave

3. $\exists f(\cdot)$ with $f'(\cdot) > 0$ and $f''(\cdot) \leq 0$ s.t. $u_1(w) = f[u_2(w)]$

1 的效用函数比 2 的效用函数更凹, 即 1 的效用函数是 2 的效用函数的一个凹变换。

4. $\pi_1 \geq \pi_2$ for all w and gambles

上述例子中，参与者 1 是全局的，要比参与者 2 有更大的风险厌恶。

7.6 一阶风险厌恶

Taylor's Theorem

$$f(\tilde{x}) = f(E[\tilde{x}] + \tilde{x} - E[\tilde{x}]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(E[\tilde{x}])(\tilde{x} - E[\tilde{x}])^n$$

$$= f(E[\tilde{x}]) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(E[\tilde{x}])(\tilde{x} - E[\tilde{x}])^n$$

Expected utility

$$E[f(\tilde{x})] = f(E[\tilde{x}]) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(E[\tilde{x}])E[(\tilde{x} - E[\tilde{x}])^n] = f(E[\tilde{x}]) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(E[\tilde{x}])m^n(\tilde{x})$$

where

$$m^n(\tilde{x}) \equiv E[(\tilde{x} - E[\tilde{x}])^n]$$

In particular

$$
\begin{aligned}
m^1(\tilde{x}) &= E[(\tilde{x} - E[\tilde{x}])^1] \equiv 0 \\
m^2(\tilde{x}) &= E[(\tilde{x} - E[\tilde{x}])^2] \equiv \mathrm{Var}[\tilde{x}] \\
m^3(\tilde{x}) &= E[(\tilde{x} - E[\tilde{x}])^3] \equiv \mathrm{Skew}[\tilde{x}] \\
m^4(\tilde{x}) &= E[(\tilde{x} - E[\tilde{x}])^4] \equiv \mathrm{Kurt}[\tilde{x}]
\end{aligned}
$$

Indeed, we can rewrite equation as

$$
\begin{aligned}
E[f(\tilde{x})] = {} & f(E[\tilde{x}]) + \frac{1}{2} f''(E[\tilde{x}])\mathrm{Var}[\tilde{x}] + \frac{1}{6} f'''''(E[\tilde{x}])\mathrm{Skew}[\tilde{x}] \\
& + \frac{1}{24} f'''(E[\tilde{x}])\mathrm{Kurt}[\tilde{x}] + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(E[\tilde{x}]) m^n(\tilde{x})
\end{aligned}
$$

Chapter 8 Portfolio Choice (1)

We now consider the agents' consumption/portfolio choice problem. Let X denote payoff matrix of traded securities with rank N and S denote the corresponding price vector. Each agent's optimization problem is stated as

$$\begin{aligned} \max_{\theta} \quad & U(c_0, c_1) = u_0(c_0) + \sum_{\omega=1}^{\Omega} p_\omega u_1(c_{1\omega}) \\ \text{s.t.} \quad & c_0 = e_0 - S^T\theta \\ & c_1 = e_1 + X\theta \\ & c_0, c_1 \geq 0 \end{aligned} \qquad (8.1)$$

Here we have omitted the index for the agent. The solution to c_0 & c_1 gives his consumption choice and the solution to θ gives his portfolio choice.

8.1 解的存在性及其特征

式（2.6）和式（8.1）相比，式（2.6）是更一般的形式，我们证明（2.6）式的解的存在性。

定理 8.1 当且仅当证券市场，记作$\{X,S\}$，不存在套利机会时（2.6）式有解。

把预算约束直接代入效用函数（且忽略消费非负的约束），我们可以把（8.1）式重新写成

$$\begin{aligned}\max_{\theta} \quad U(c) &= u_0(e_0 - S^T\theta) + \sum_{\omega=1}^{\Omega} p_\omega u_1(e_{1\omega} + X_{\omega,\cdot}\theta) \\ &= u_0(e_0 - \sum_n S_n\theta_n) + \sum_{\omega=1}^{\Omega} p_\omega u_1(e_{1\omega} + \sum_n x_{\omega,n}\theta_n)\end{aligned}$$

优化问题的一阶条件是

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_n} = -S_n u_0'(c_0) + \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega u_1'(c_{1\omega}) x_{\omega,n} = 0$$
$$\Rightarrow \underbrace{u_0'(c_0)S_n}_{\textit{Loss in utils today}} = \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega u_1'(c_{1\omega}) x_{\omega,n} = \underbrace{E[u_1'(\tilde{c}_1)\tilde{X}_n]}_{\textit{Expected and discounted gain in utils}}, n = 1,\cdots,N \qquad (8.2)$$

其中，$\tilde{X}_n = X_{\cdot,n} = [x_{1,n};\cdots;x_{\Omega,n}]$是证券 n 的支付向量。

式（8.2）也叫做 Euler 方程。**方程右边是投资于 1 单位证券 *n* 使得未来消费增加** $\tilde{X}_n$ **而得到的（期望）边际效用。方程左边是由于需要付出其价格** S_n **而减少的当前消费所损失的边际效用。**达到最优时，二者必须相等。也就是说，**参与者在今天消费最后 1 元和把它用来投资以取得明天的消费之间是无差异的。**Euler 方程的另外一种表述方式为

$$E\left[\frac{u_1'(\tilde{c}_1)\tilde{X}_n}{u_0'(c_0)S_n}\right] = 1, n = 1,\cdots,N \qquad (8.3)$$

对于每一个交易证券来说，投资对今天消费的相对边际效用全部等于 1。

一阶条件并不总能保证最优性。但如果下面的二阶条件也同时成立，则可保证为最优

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial \theta_n}=(-S_n)u_0\,'(e_0-\sum_n S_n\theta_n)+\sum_{\omega\in\Omega}p_\omega u_1\,'(e_{1\omega}+\sum_n x_{\omega,n}\theta_n)x_{\omega,n} \\
&\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_n^2}=(-S_n)^2u_0\,''(e_0-\sum_n S_n\theta_n)+\sum_{\omega\in\Omega}p_\omega u_1\,''(e_{1\omega}+\sum_n x_{\omega,n}\theta_n)x_{\omega,n}^2 \\
&\Rightarrow S_n^2u_0\,''(c_0)+E[u_1\,''(\tilde{c}_1)\tilde{X}_n^{\,2}]\le 0, n=1,\cdots,N
\end{aligned}
\qquad (8.4)
$$

对于凹的u_0,u_1，二阶条件总是成立的。对于凹的期望效用函数，一阶条件也是最优化的充分条件。

8.2 Portfolio Choice

为方便起见，我们考虑最优消费/投资组合选择问题的一个等价表述。记组合θ的价值为

$$w \equiv e_0 - c_0 = S^T\theta \tag{8.5}$$

显然，w 是参与者将投资于证券组合的 0 期储蓄。它是扣除当前消费后的金融财富。我们可以把最优消费/组合选择问题分解为两个部分：第一，我们求解给定储蓄水平（投资总额 w）下的最优组合问题。这将决定给定储蓄水平下的最优组合选择以及所得到的期望效用。第二，我们求解最优消费/储蓄问题，权衡当前消费得到的效用以及未来消费等到的期望效用，而未来消费是由选择的 optimal portfolio 所得到的。

给定投资总额，组合选择问题就是（与 0 时无关）

$$v_1(w) \equiv \max_{(\theta, S^T\theta = w)} E[u_1(\tilde{e}_1 + \tilde{X}\theta)] \qquad (8.6)$$

其中， $\tilde{X} \equiv [\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_n, \cdots, \tilde{X}_N]$ 是 N 只交易证券的随机支付（行）向量，即支付矩阵（市场结构）。函数 $v_1(w)$ 是财富 w 的 indirect utility function，即用 w 进行最优投资所获得的期望效用。（8.1）式给出的完整的消费/组合选择问题现在可以重新写成下面的形式：

$$\begin{aligned} &\max_w \left\{ u_0(e_0 - w) + \max_{(\theta, S^T\theta = w)} E[u_1(\tilde{e}_1 + \tilde{X}\theta)] \right\} \\ &= \max_w \ u_0(e_0 - w) + v_1(w) \end{aligned} \qquad (8.7)$$

给定储蓄的间接效用函数 $v_1(w)$，求解最优消费/储蓄问题就相当简单了。因此，本章大部分内容我们重点考虑组合选择问题（8.6）式。

为了简化组合选择问题，本章的其余部分，我们假定 $\tilde{e}_1 = 0$。这意味着参与者的禀赋只包括当前消费以及对交易证券的持有（而不包括任意形式的将来禀赋）。

显然，赋予参与者的组合具有其市场价值，它也等同于赋予参与者相同数额的财富/当前消费。在这种情况下，组合选择问题（8.6）简化为

$$v(w)=\max_{(\theta,S^T\theta=w)} E[u(\tilde{X}\theta)] \qquad (8.8)$$

这里，为简便起见，我们忽略了时间指标 1。

当存在无风险证券时，最优组合选择问题还可以进一步简化。令第 N 只证券为无风险证券，利率为 r_F。不失一般性，我们假设 $S_n>0, n=1,\cdots,N$。记 $a_n=\theta_n S_n$ 为证券 n 上的投资额（元），我们定义证券 n 的 gross rate of return 为

$$\tilde{x}_n \equiv \frac{\tilde{X}_n}{S_n} \qquad (8.9)$$

以及证券 n 的 net rate of return 为

$$\tilde{r}_n \equiv \frac{\tilde{X}_n - S_n}{S_n} = \frac{\tilde{X}_n}{S_n} - 1 = \tilde{x}_n - 1 \tag{8.10}$$

其中， $n=1,\cdots,N$ 。那么，

$$\begin{aligned}
\tilde{w} &\equiv \sum\nolimits_n \theta_n \tilde{X}_n = \sum\nolimits_n \theta_n S_n \frac{\tilde{X}_n}{S_n} = \sum\nolimits_n a_n \tilde{x}_n = \sum\nolimits_n a_n (1+\tilde{r}_n) \\
&= a_N(1+r_F) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n (1+\tilde{r}_n) = (w - \sum_{n=1}^{N-1} a_n)(1+r_F) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n (1+\tilde{r}_n) \\
&= w(1+r_F) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n (\tilde{r}_n - r_F)
\end{aligned} \tag{8.11}$$

其中， $w = S^T\theta = \sum\nolimits_n \theta_n S_n = \sum\nolimits_n a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + a_N$ 。

风险证券与无风险证券收益率之间的差 $\tilde{r}_n - r_F$ ，表示它的 excess return。用 $\tilde{r} = [\tilde{r}_1;\cdots;\tilde{r}_{N-1}]$ 表示风险证券的收益率向量， $a = [a_1;\cdots;a_{N-1}]$ 表示在这些风险证券上的投资额。这样，最优组合选择问题就变成

$$\max_a E[u(\tilde{w})] = E[u(w(1+r_F)+\sum_{n=1}^{N-1} a_n(\tilde{r}_n - r_F))] \\ = E[u(w(1+r_F)+a^T(\tilde{r} - r_F\iota)] \tag{8.12}$$

这里，ι 是元素全为 1 的列向量。

问题（8.12）式的一阶条件为

$$\frac{\partial v}{\partial a_n} = E[u'(\tilde{w})(\tilde{r}_n - r_F)] = 0, n = 1, \cdots, N-1 \tag{8.13}$$

这给出了用来求解 a 的 N—1 个等式。

8.3 最优组合的性质

一般来说，（8.12）式的解——也就是参与者的最优组合选择——依赖于两个因素：（1）证券收益率的分布（$\tilde{r}$），（2）参与者的风险厌恶程度（u）。基于这两个因素对最优组合的影响，我们首先考虑解的一般性质。

A One Risky Asset and One Riskless Asset

Let a is agent' investment in the risky asset, 只有一项风险资产，投资额为 a，因此 $\tilde{w} = w(1+r_F) + a(\tilde{r} - r_F)$，最优组合选择问题就变成

$$\max E[u(\tilde{w})[= E\left[u(w(1+r_F)) + a(\tilde{r} - r_F)\right]$$

一阶条件

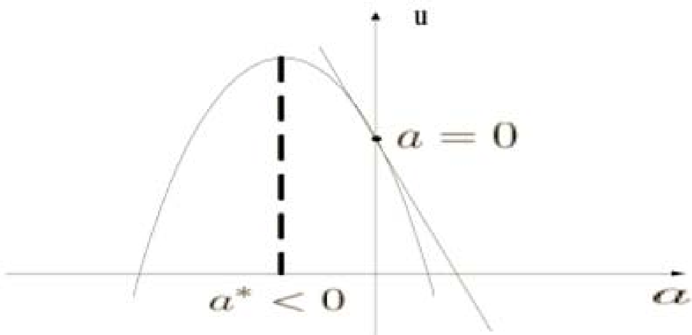
$$E[u'(\tilde{w})(\tilde{r} - r_F)] = 0$$

定理 8.2 If the agent is strictly risk averse, , then

$$a=0 \Leftrightarrow E[\tilde{r}]=r_F$$
$$a>0 \Leftrightarrow E[\tilde{r}]>r_F$$
$$a<0 \Leftrightarrow E[\tilde{r}]<r_F$$

证明： **使用反证法证明** $a>0 \Leftrightarrow E[\tilde{r}]>r_F$

只有一项风险资产，因此 $\tilde{w}=w(1+r_F)+a(\tilde{r}-r_F)$。设当 $E[\tilde{r}]>r_F$ 时，最优组合 $a^* \le 0$。



有 $E\left[u'(w(1+r_F))\left(\tilde{r}-r_F\right)\right]\le 0$ （$a=0$ 时，一阶导数 ≤ 0 ）

即，$u'(w(1+r_F))E\left(\tilde{r}-r_F\right)\le 0$。因为$u'>0\Rightarrow E[\tilde{r}]-r_F\le 0\Rightarrow E[\tilde{r}]\le r_F$，这与$E[\tilde{r}]>r_F$矛盾，因此$E[\tilde{r}]>r_F\Leftrightarrow a^*>0$。

下面用解析法证明：记$\bar{u}(a)\equiv E[u(\tilde{w})]=E\left[u(w(1+r_F))+a(\tilde{r}-r_F)\right]$，$u$的严格凹性意味着$u'>0,u''<0$，因此$\frac{d}{da}\{E\left[u(\tilde{w})\right]\}>0$，即

$$E\left[u'(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F)\right]=E\left[u'(w(1+r_F)+a(\tilde{r}-r_F))(\tilde{r}-r_F)\right]>0$$

Performing the Taylor expansion of $u'(w(1+r_F)+a(\tilde{r}-r_F))$ at $w(1+r_F)$, we obtain

$$\begin{aligned}&E\left[u'(w(1+r_F)+a(\tilde{r}-r_F))(\tilde{r}-r_F)\right]\\&=u'(w(1+r_F))E[\tilde{r}-r_F]+u''(w(1+r_F))aE[(\tilde{r}-r_F)^2]+O(E[(\tilde{r}-r_F)^2])>0\end{aligned}$$

Assuming low lever of risk of $\tilde{r}$ so that $O(E[(\tilde{r}-r_F)^2])$ can be neglected. The minimum risk premium required to induce a of wealth invested on the risky asset is

$$E[\tilde{r}-r_F] > -a\frac{u''(w(1+r_F))}{u'(w(1+r_F))}E[(\tilde{r}-r_F)^2]$$

由上式可知$E[\tilde{r}-r_F]$与a的符号相同。

如果$E[\tilde{r}]-r_F$比较小，则在最优时有

$$a^* \approx \frac{E[\tilde{r}]-r_F}{\mathrm{var}(\tilde{r})A(w(1+r_F))}$$

风险资产的期望收益率与无风险收益率之间的差值$E[\tilde{r}]-r_F$，叫做 risk premium。定理 8.2 的含义是，**只有当风险资产的风险溢价为正时，参与者在风险资产上的投资额才为正；风险溢价为 0 时投资额为 0；风险溢价为负时投资额为负（即卖空证券）**。这反映了一个风险厌恶的参与者投资于有风险资产时所面临的风险与收益之间的权衡。

参与者的组合选择依赖于他们的偏好，特别是他们的风险厌恶程度。我们现在来考虑这种依赖关系。令 $A(w)$ 为参与者的绝对风险厌恶，w 为他的总投资额。假设 $E[\tilde{r}] > r_F$，则有 $a > 0$。令

$$a(w) = \text{Arg}\max E[u(w(1+r_F) + a(\tilde{r} - r_F))]$$（即a^*）

定理 8.3 We have

- $CARA \quad A'(w) = 0 \Leftrightarrow a'(w) = 0$
- $DARA \quad A'(w) < 0 \Leftrightarrow a'(w) > 0$
- $IARA \quad A'(w) > 0 \Leftrightarrow a'(w) < 0$

Proof: Consider the case of **DARA**. $A'(w) < 0$. F.O.C. yields

$$E\left[u'(\tilde{w})(\tilde{r} - r_F)\right] = 0, \qquad \tilde{w} = w(1+r_F) + a(\tilde{r} - r_F)$$

Differentiate w.r.t. *w*

$$E\left[u''(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F)\left((1+r_F)+(\tilde{r}-r_F)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}w}\right)\right]=0$$

or

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}w}=-\frac{(1+r_F)E\left[u''(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F)\right]}{E\left[u''(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F)^2\right]}$$

Then,

$$\text{Sign}\left\{\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}w}\right\}=\text{Sign}\left\{E\left[u''(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F)\right]\right\}$$

The denominator is negative since $u''<0$. For the numerator, given that $a>0$,

$$\tilde{w}>w(1+r_F)\Leftrightarrow\tilde{r}>r_F$$
$$\tilde{w}<w(1+r_F)\Leftrightarrow\tilde{r}<r_F$$

Rewrite the numerator

$$E\left[u''(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F)\right]=E[A(\tilde{w})(-u'(\tilde{w}))(\tilde{r}-r_F)]$$

For $\tilde{r}>r_F,\tilde{w}>w(1+r_F)$ （前面已假设 $a>0$ ）， $A(\tilde{w})<A(w(1+r_F))$ and 两边同乘 $-u'(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F),(<0)$，得到（注意 $A(\tilde{w})=-u''/u'$，且 **DARA**）

$$A(\tilde{w})(-u'(\tilde{w}))(\tilde{r}-r_F)>A(w(1+r_F))(-u'(\tilde{w}))(\tilde{r}-r_F)$$

For $\tilde{r}<r_F,\tilde{w}<w(1+r_F)$ （前面已假设 $a>0$ ）， $A(\tilde{w})>A(w(1+r_F))$ and 两边同乘 $-u'(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F),(>0)$，得到（注意 $A(\tilde{w})=-u''/u'$，且 **DARA**）

$$A(\tilde{w})(-u'(\tilde{w}))(\tilde{r}-r_F)>A(w(1+r_F))(-u'(\tilde{w}))(\tilde{r}-r_F)$$

Hence, for all realizations of $\tilde{r}$,

$$A(\tilde{w})(-u'(\tilde{w}))(\tilde{r}-r_F)>A(w(1+r_F))(-u'(\tilde{w}))(\tilde{r}-r_F)$$

Thus,

$$E[A(\tilde{w})(-u'(\tilde{w}))(\tilde{r}-r_F)] > E[A(w(1+r_F))(-u'(\tilde{w}))(\tilde{r}-r_F)]$$
$$= -A(w(1+r_F)E[u'(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F)] = 0$$

We conclude that $\mathrm{d}a/\mathrm{d}w > 0$.

如果风险厌恶绝对系数是个体收入的单减函数，那么，当个体的初始收入 w 增加时，个体在风险资产上的投资将随之增加。

当人是 DARA (Decreasing absolute risk aversion) $\Rightarrow$ 越有钱，越愿意买风险资产，投资越多在风险资产上。

定理 8.3 描述的是风险资产的投资总额如何依赖于总投资额。也可以用相对值来考虑这个问题。也就是说，当投资（财富）增加百分之一时，风险资产上的投资会增加百分之几呢？

Define the wealth elasticity of a: $e(w) = \frac{w}{a} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}w}$

定理 8.4 We have

- $CRRA \quad R'(w) = 0 \Leftrightarrow e = 1$
- $DRRA \quad R'(w) < 0 \Leftrightarrow e > 1$
- $IRRA \quad R'(w) > 0 \Leftrightarrow e < 1$

Proof: Since

$$e(w) = -\frac{w(1+r_F)}{aw} \frac{E[u''(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F)]}{E[u''(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F)^2]}$$

Then

$$e - 1 = -\frac{1}{a} \frac{E[u''(\tilde{w})\tilde{w}(\tilde{r}-r_F)]}{E[u''(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F)^2]} = -\frac{1}{a} \frac{E[R(\tilde{w})(-u'(\tilde{w}))(\tilde{r}-r_F)]}{E[u''(\tilde{w})(\tilde{r}-r_F)^2]}$$

and

$$\text{Sign}\{e-1\} = \text{Sign}\{E[u''(\tilde{w})\tilde{w}(\tilde{r}-r_F)]\}$$

From this point on, repeat the steps in the previous proof.

当 $R(\tilde{w})$ 是收入的单减函数，即 $R'(\tilde{w})<0$ 时，$e>1$：随着初始收入的增加，个体在风险资产上的投入将以更大的比例增加。

当人是 IRRA(Increasing relative risk aversion)$\Rightarrow$越有钱，风险资产占总资产之比越少。

B Many Risky Assets and One Riskless Asset

Let $a = \text{Argmax } E[u(\tilde{w})]$ and $\tilde{w} = w(1+r_F) + a^T(\tilde{r} - r_F\iota)$

定理 8.5 当且仅当 $E[\tilde{r}_n] = r_F, \forall n = 1, \cdots, N-1$ 时最优组合 $a = 0$ 。

定理 8.5’ If $\exists n$ s.t. $E[\tilde{r}_n] - r_F > 0$, then $a_n^* > 0$.

Proof: **反证法** 设 $E[\tilde{r}_n] - r_F > 0$，$a_n^* \le 0$（不是没投资，就是放空）

For all $a_n = 0$，由式（8.13）有 $E\left[u'(w(1+r_F))\left(\tilde{r}_n - r_F\right)\right] \le 0, \forall n$，即

$$u'(w(1+r_F))E\left[\tilde{r}_n - r_F\right] \le 0$$

Since $u' > 0 \Rightarrow E\left[\tilde{r}_n - r_F\right] \le 0 \quad \Rightarrow$ if $\forall a_n \le 0 \Rightarrow E\left[\tilde{r}_n - r_F\right] \le 0, \forall n$

反之，如果有任一个资产风险溢价大于 0，则一定存在一个风险资产的投资额 $a_n > 0$ 。

当某些风险证券的风险溢价不为 0 时，情况变得更加复杂了，我们有定理 8.6：

定理 8.6 最优组合的期望收益率大于无风险收益率。

Proof: 由最优性 We know $E[u(\tilde{w})] \geq Eu(w(1+r_F)) = u(w(1+r_F))$

By Jensen's inequality $u(E[\tilde{w}]) \geq E[u(\tilde{w})]$, we have

$$u(E[\tilde{w}]) \geq u(w(1+r_F))$$

Thus,

$$E[\tilde{w}] = E\left[w(1+r_F) + a^T(\tilde{r} - r_F\iota)\right] \geq w(1+r_F) \qquad （由 u' > 0）$$

and

$$E\left[a^T(\tilde{r} - r_F\iota)\right] = \sum_{n=1}^{N-1} a_n(E[\tilde{r}_n] - r_F) \geq 0$$

Thus, if $E[\tilde{r}_n] > r_F, \forall n$, then $\exists a_n \geq 0$. However, some a_n may be negative. Also, if $a_n = 0, \forall n$, then $\exists n, E[\tilde{r}_n] = r_F$.

Chapter 9 Portfolio Choice (2)

9.1 Stochastic Dominance

当一个参与者选择最优组合时，他实际是对所有的可能组合，或者更具体地说，是对这些组合的收益率进行排序。考虑收益率时有两个重要因素：期望收益率以及风险。对组合进行排序时，参与者必须权衡这两个要素，而这种权衡又依赖于他的偏好。在这一节，我们考虑收益率的某些特定的性质，这些性质允许参与者可以对两只证券或证券组合进行排序，而不需要仔细考虑他自己的偏好。

A First Order Stochastic Dominance (FSD)

Knowing the utility function, we have the full information on preference. Using the maximum expected utility criterion, we obtain a complete ordering of all the investments under consideration.

What happens if we have only partial information on preferences (say, prefer more to less and/or risk aversion)?

For example, in the First Order Stochastic Dominance Rule, we only consider the class of utility functions, call *u*, such that $u' \geq 0$. This is a very general assumption and it does not assume any specific utility function.

Let $\tilde{r}_A, \tilde{r}_B$ be the net return on asset A and B respectively, $\tilde{x}_A = 1 + \tilde{r}_A, \tilde{x}_B = 1 + \tilde{r}_B$ be the gross return.

定义 9.1 *A* dominates *B* in the sense of FSD if $\forall u'(\cdot) \geq 0$ s.t. $E[u(\tilde{x}_A)] \geq E[u(\tilde{x}_B)]$。

Here, the investor compares the two alternatives: investing all his wealth in *A* or *B*. If *A* dominates in the sense of FSD, we denote $A \succsim_{FSD} B$. It is easy to see that $A \succsim_{FSD} B$ implies that $E[\tilde{r}_A] \geq E[\tilde{r}_B]$ （这里可以令 $u(x) = x$ 得到），反之则不成立。

Two Investment Alternatives: Outcomes and Associated Probabilities

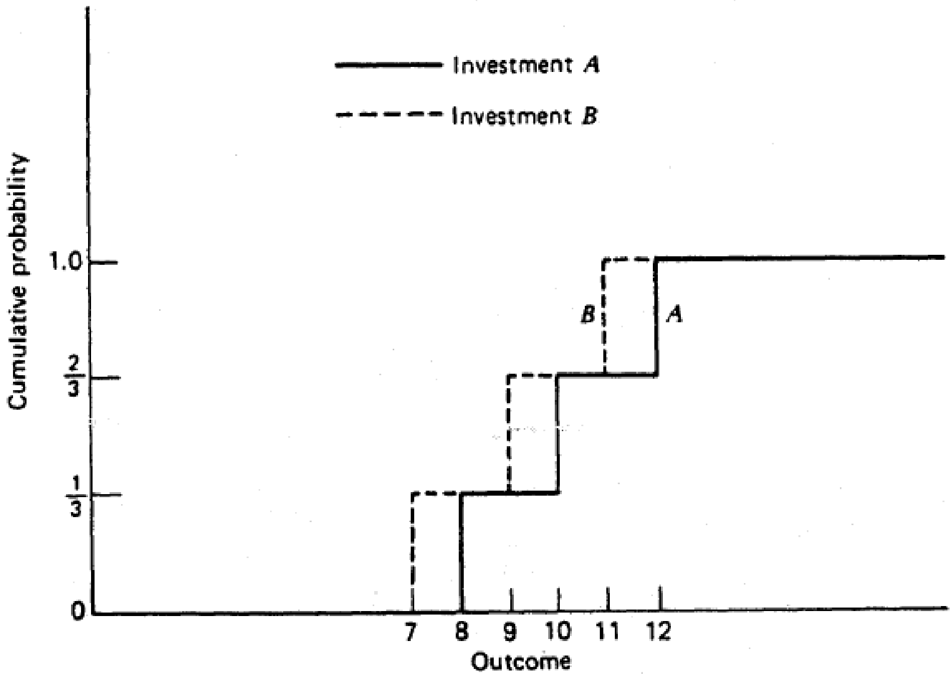
Investment A		Investment B	
Outcome	Probability	Outcome	Probability
12	1/3	11	1/3
10	1/3	9	1/3
8	1/3	7	1/3

Can we argue that investment *A* is better than investment *B*? It is still possible that the return from investing in *B* is 11% but the return is only 8% from investing in *A*.

By looking at the cumulative probability distribution, we observe that for all returns and the odds of obtaining that return or less, *B* consistently has a higher or same value.

A Cumulative Probability Distribution

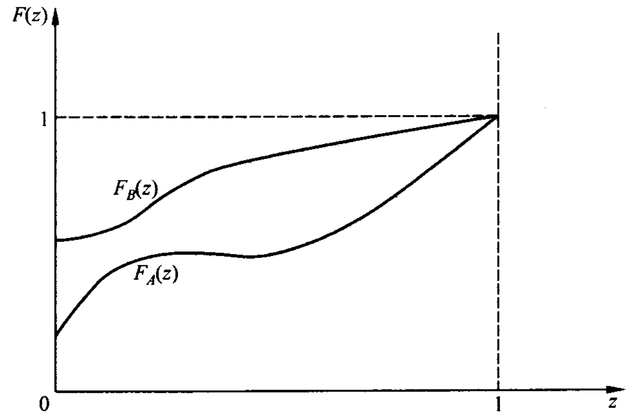
Return	Odds of Obtaining a Return Equal to or Less Than That shown in Column 1	
	A	*B*
7	0	1/3
8	1/3	1/3
9	1/3	2/3
10	2/3	2/3
11	2/3	1
12	1	1



Cumulative frequency function for gambles A and B.

Let $F_A(x), F_B(x)$ be the cumulative distribution functions of $\tilde{x}_A, \tilde{x}_B$. 收益率分布满足什么条件时，我们可以按照一阶随机占优原则对两个组合进行排序呢？

定 理 9.1 The following statements are equivalent:



- $A \succsim_{FSD} B$
- $F_A(x) \le F_B(x)$, $\forall x$
- $\tilde{r}_A \sim_d \tilde{r}_B + \tilde{\alpha}$ where $\tilde{\alpha} \ge 0$

Here, $\sim_d$ means same in distribution.

依分布相等：具有相同的分布，即服从相同的分布。

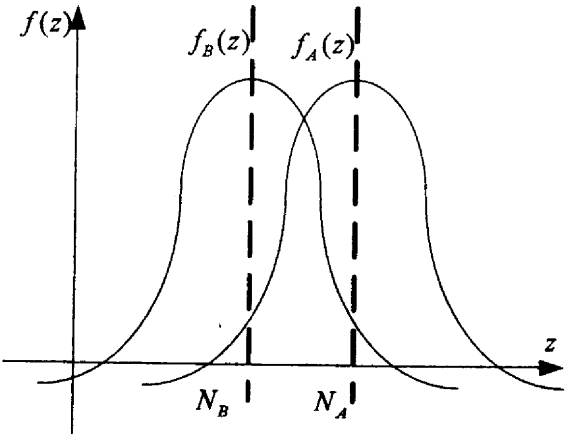
Theorem F_A dominates F_B by FSD if and only if

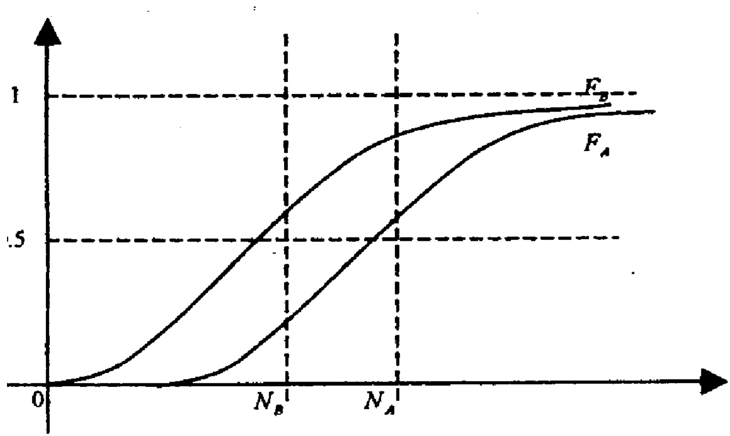
$$\int_x u(x)dF_A(x) \ge \int_x u(x)dF_B(x) \text{（即 } Eu(x_A) \ge Eu(x_B) \text{）}$$

for all strictly increasing expected utility function $u(x)$.

例：考虑两个风险资产 A 和 B，假定 $\tilde{r}_A \sim N(\mu_A,\sigma_A^2),\tilde{r}_B \sim N(\mu_B,\sigma_B^2)$，这里 $\mu_A > \mu_B,\sigma_A^2 = \sigma_B^2$；请比较它们的一阶随机占优关系。

显然有 $F_A(z) \le F_B(z) \quad \forall z \in [a,b]$，所以，$A \succeq_{FSD} B$。见下图。





一个具体例子：考虑分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<2.5\\ 0.4 & 2.5\le x<3.5\\ 1 & 3.5\le x\end{cases},\quad G(x)=\begin{cases}0 & x<2\\ 0.5 & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}$$

由于 $F(x)\le G(x)$，对所有 x，根据 FSD，$F(x)\succeq_{FSD} G(x)$（这里 $F(x),G(x)$ 为累积概率分布）。

如果两只证券或证券组合的收益率分布满足定理 9.1 的条件，一阶随机占优允许我们对它们进行排序。如果对一个集合内的组合都可以进行这种排序，那么应用一阶随机占优在集合内挑选出最优组合就十分容易了。但如果只对一部分证券存在这种排序，当我们用这些证券和其他证券形成组合时，这种排序还能保持吗？一般来说，答案是否定的。但我们有下面的有限结果。

定理 9.2 If $A\succeq_{FSD} B$, then for $u'(\cdot)>0$ *and* $u''(\cdot)<0$

$$\max_a E[u(w(1+r_F)+a(\tilde{r}_A-r_F))]\ge \max_a E[u(w(1+r_F)+a(\tilde{r}_B-r_F))]$$

Proof: Let $a_B = \text{Arg}\max E[u(w(1+r_F)+a(\tilde{r}_B - r_F))]$

Then, since $A \succeq_{FSD} B$,

$$E[u(w(1+r_F)+a_B(\tilde{r}_A - r_F))] \geq \max_a E[u(w(1+r_F)+a(\tilde{r}_B - r_F))]$$

But,

$$\max_a E[u(w(1+r_F)+a(\tilde{r}_A - r_F))] \geq E[u(w(1+r_F)+a_B(\tilde{r}_A - r_F))]$$

Thus, the inequality is proven.

定理 9.2 说的是如果 A 一阶随机占优于 B，那么参与者选择其中之一与无风险证券构造投资组合，选择 A 要比选择 B 好。

B Second Order Stochastic Dominance (SSD)

Two Investment Alternatives: Outcomes and Associated Probabilities

Investment A		Investment B	
Outcome	Probability	Outcome	Probability
6	1/4	5	1/4
8	1/4	9	1/4
10	1/4	10	1/4
12	1/4	12	1/4

If both investments turn out the worst, the investor obtains 6% from *A* and only 5% from *B*. If the second worst return occurs, the investor obtains 8% from *A* rather than 9% from *B*. If he is risk averse, then he should be willing to lose 1% in return at a higher level of return in order to obtain an extra 1% at a lower return level. If risk aversion is assumed, then *A* is preferred to *B*.

一阶随机占优反映的是（期望）收益率的占优，现在，我们转而考虑风险。

定义 9.2 A dominates B in the sense of SSD, denoted as $A \succeq_{SSD} B$, if $\forall u''(\cdot) \le 0$, $E[u(\tilde{x}_A)] \ge E[u(\tilde{x}_B)]$. Note that:

- No conditions on $u'(\cdot) > 0$
- For $u(x) = x$, $A \succeq_{SSD} B \Rightarrow E[\tilde{x}_A] \ge E[\tilde{x}_B]$; while $u(x) = -x$, $A \succeq_{SSD} B \Rightarrow E[\tilde{x}_A] \le E[\tilde{x}_B]$. $A \succeq_{SSD} B \Rightarrow E[\tilde{x}_A] = E[\tilde{x}_B]$

也就是说，二阶随机占优相对于**两个期望相等的收益率**而言，而在这个意义上，二阶随机占优仅仅比较了两只证券或组合的风险。

- For $u(x) = -x^2$, $A \succeq_{SSD} B \Rightarrow \mathrm{var}[\tilde{x}_A] \le \mathrm{var}[\tilde{x}_B]$.

定理 9.3 The following statements are equivalent

- $A \succeq_{SSD} B$
- $E[\tilde{x}_A] = E[\tilde{x}_B]$ *and* $\int_0^y [F_A(x) - F_B(x)]dx \equiv S(y) \le 0 \quad \forall y$

- $\tilde{x}_B \sim_d \tilde{x}_A + \tilde{e}$ and $E[\tilde{e} \mid \tilde{x}_A] \le 0$

如果说方差反映了风险，那么二阶随机占优意味着收益率的风险更小，But the reverse is not true。风险资产 A 二阶随机占优于 B 时，A 的期望收益率必然等于 B 的期望收益率，A 的方差则小于 B 的方差。

The Sum of the Cumulative Probability Distribution

	Cumulative Probability		Sum of Cumulative Probability	
Return	A	B	A	B
4	0	0	0	0
5	$\boxed{0}$	1/4	0	1/4
6	$\boxed{1/4}$	1/4	1/4	1/2
7	1/4	1/4	1/2	3/4
8	1/2	$\boxed{1/4}$	1	1
9	1/2	$\boxed{1/2}$	1 1/2	1 1/2
10	3/4	3/4	2 1/4	2 1/4
11	3/4	3/4	3	3
12	1	1	4	4

According to SSD, A is preferred over B since the sum of cumulative probability for A is always less than or equal to that for B.

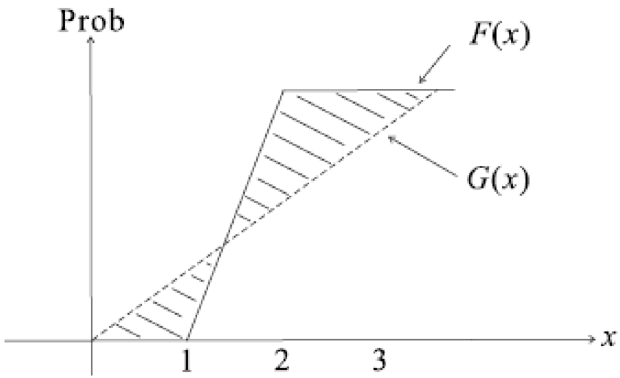
Theorem If F_A dominates F_B by SSD, then

$$\int_x u(x)dF_A(x) \geq \int_x u(x)dF_B(x)$$

for all increasing and concave expected utility function $u(x)$.

一个具体例子：以下两个分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\(x-1) & 1\leq x<2\\1 & 2\leq x\end{cases},G(x)=\begin{cases}0 & x<0\\x/3 & 0\leq x<3\\1 & 3\leq x\end{cases}$$ 根据 SSD， $F(x)\succeq_{SSD} G(x)$。



C Stochastic Dominance vs. Dominance

定义 4.6 Asset *A* dominates asset *B*, if a always out performs, $x_A(\omega) \geq x_B(\omega), \forall \omega \in \Omega$ 且在某些状态下不等式严格成立。

例 9.1

Dominance is a statement about the relative performance state-by-state. The probabilities do not matter! $A \succeq_{FSD} B$, however, does not mean that *A* always out performs *B*. It mean that the probability of A's return to exceed any given level is greater than that of *B*'s.

例 9.2

Stochastic dominance is a statement about probabilities. The relative performance in individual states does not necessarily matter. Therefore, dominance implies stochastic dominance but not the reverse. Also, different expectations about the probabilities of different states of nature can lead to disagreement in stochastic dominance, but not in absolute dominance.

市场上存在被占优证券意味着存在套利机会，随机被占优并不会导致套利机会。

9.2 Portfolio Separation Theorems

随机占优考虑直接对组合或证券进行排序。但是，它对收益率分布的限制非常严格。通常的收益率分布都不满足这些条件。即使某些证券之间满足这些条件，但在构造组合时，这些性质并不能保持不变，因而在分析投资组合选择时随机占优并不是经常适用，我们需要考虑的是限制较少、却更有用的条件。

We now explore possible restrictions on (1) agents' utility functions or (2) return distributions or (3) both that can lead to general characterizations of optimal portfolio.

特别地，我们寻找能够使参与者的组合选择表现出**某些共性的条件**。目的是：首先，组合选择受证券的风险影响。风险结构（即收益率分布的性质）可能会引致参与者组合选择的共性。第二，决定证券价格的是参与者的总需求，总需求对个体参与者的需求有平均效应，只保留了其中的共同特征。因此，我们预期这些共同特征会对价格产生重要影响。

为了区分财富对组合选择的影响，我们用每只证券的相对权重定义组合。Let $z_n = a_n / w = \frac{S_n\theta_n}{\sum_n S_n\theta_n}, n = 1, \cdots, N$ where a_n is the \$ amount invested in asset *n* and *w* is the amount of wealth to be invested. Then z_n is the percentage of wealth invested in *n* and $z = [z_1; \cdots; z_N]$ is the portfolio vector. Note that $z^T \iota = 1$. Define $\tilde{z}$ to be the gross rate of return on portfolio *z*:

$$\tilde{z} = z^T \tilde{x} = \sum_n z_n x_n$$

where $\tilde{x}$ is the vector of gross rate of returns. Then, $\tilde{w} = w\tilde{z}$. The portfolio problem is

$$\max_{z^T \iota = 1} E[u(\tilde{w})] = E[u(w\tilde{z})]$$

For simplicity in notation, we state the portfolio problem in terms of returns as follows:

$$\max_{z^T \iota = 1} E[v(\tilde{z})]$$

显然，定义于收益率上的效用函数$v(\cdot)$，不仅取决于定义于支付上的效用函数$u(\cdot)$的形式，还依赖于财富水平 w。也就是说，两个$u(\cdot)$相同但财富水平不同的参与者，他们的$v(\cdot)$可以不一样。显然，对应于 u 的不满足性和凹性，v 也具有不满足性和凹性。

A 共同基金分离

定义 9.4 If the set of optimal portfolios z of different agents lies in ***F*-1** dimensional affine subspace of $\mathbb{R}^N$, then we say that ***F*-fund** separation holds for the economy.

记 Z_F 为（F-1）维线性子空间。那么对于所有参与者，我们有 $z_k \in Z_F$，其中 z_k 是参与者 k 的最优组合（$k=1,\cdots,K$）。令 $z_{f_1},\cdots,z_{f_F}$ 为 Z_F 中的 F 个线性独立组合或基金。那么 F－基金分离意味着

$$z_k = \sum_{i=1}^{F} \lambda_i z_{f_i}, \sum_{i=1}^{F} \lambda_i = 1 \qquad (9.1)$$

这也就是说，每一个参与者的最优组合都是 F 只基金的线性组合。这就意味着参与者只需要考虑这 F 只基金及其组合，而不需要考虑整个组合空间。这 F 只基金就叫做 separating fund 或 mutual fund，而这种情形就叫做 mutual-fund separation。显然，分离基金的集合不是唯一的。给定一个分离基金的集合，这些基金的线性组合也可以作为分离基金。

当存在无风险证券时，它通常是分离基金之一。因为无风险证券有时也和货币相联系，它作为分离基金之一的情况也叫做 monetary separation。

定义 9.5 如果所有参与者都持有 F 只基金的组合，其中（1）“货币”基金是无风险证券，（2）另外 $F-1$ 只基金只由风险证券构成，则我们称 $F-$基金货币分离成立。

显然，$N-$基金分离总是成立，我们感兴趣的是 $F<N$ 的情形。如果存在很少数目的分离基金，那么组合选择问题就会显著地简化。这种现象只有当收益率或偏好满足一定条件时才会发生。

B Return Distributions and Two-Fund monetary Separation

We consider distributional assumptions that yield two-fund monetary separation. We assume again that agents all have non-satiable and concave utility functions.

定理 9.4 假设存在总利率为 x_F 的无风险证券。Two-fund monetary separation holds for any non-satiable and concave utility function if and only if the return distributions satisfy the following:

$\exists \beta_n, w_n, \tilde{y}, \tilde{e}_n,$ for $n = 1, \cdots, N-1$ s.t.

1. $\tilde{x}_n = x_F + \beta_n \tilde{y} + \tilde{e}_n$

2. $E[\tilde{e}_n \mid \tilde{y}] = 0$

3. $\sum_{n=1}^{N-1} w_n \tilde{e}_n = 0,$ where $\sum_{n=1}^{N-1} w_n = 1$

而且，无风险证券是分离基金之一。

Before we provide a proof, note that the distribution assumptions give the following characteristics:

- One common factor, $\tilde{y}$ which may affect all returns (1 & 2)
- The residual risks $\tilde{e}_n$ are noises (1 & 2)
- The residual risks can be completely eliminated (3)

证明：

C Preferences and Portfolio Separation

We only consider restrictions on utility functions. We will assume for simplicity that the utility functions are non-satiable and concave. 我们并不事先假设存在无风险证券。

定理 9.5 One-fund separation holds (under any asset set) if and only if all agents have the same utility function over returns up to a linear transformation.

单基金分离是一个很强的结论，它要求对于任意的证券集合以及一般的收益率分布所有参与者持有相同的组合。只有当所有参与者的偏好实质上相同时这一点才能成立。

定理 9.6 Two-fund separation holds (under any asset set) if and only if all agents have quadratic preference.

当存在无风险资产时，我们可以得到关于两基金分离的一些一般性结论。

定理 9.7 （Cass-Stiglitz） Monetary Separation holds if and only if for every agent k，$u_k'(w) = (d_k + w/\gamma)^{-\gamma}$ where $d_k > 0, \gamma \geq -1$（γ is the same for all agents）.

9.3 Portfolio Separation and Risky Investments

上面讨论表明，如果对收益率分布或偏好加以一定的条件限制，我们就可以得到关于参与者最优组合选择的更加具体的性质，如共同基金分离。这能极大地简化组合选择问题的求解且使得我们能够得到更加鲜明的结论。比如说，当两基金货币分离成立时，有一只无风险证券和多只风险证券的组合选择问题就简化成了只有一只无风险证券和一只风险证券也就是分离基金的组合选择问题。这就使得在单只风险证券情形下得到的结论现在也可以运用于多风险证券的情形。

Chapter 10 Asset Pricing in A complete Market

10.1 Equilibrium of A complete Market

当市场是完全的，交易证券的支付矩阵 X 的秩为 $N=\Omega$。如果没有冗余证券，X 是一个方阵。因此，所有支付都是 marketed，且 $M=\mathrm{R}^N=\mathrm{R}^\Omega$，$M$ 是市场化的消费/支付空间 $M=\left\{X\theta:\theta\in\mathrm{R}^N\right\}$。记这些证券的价格向量为 S。由资产定价第一定理，存在状态价格向量 $\phi>>0$ 使得任意支付 $y=[y_1;\cdots;y_\Omega]$ 有市场价格 $\phi^T y$。另外，在第 4 章已经讨论过，在完全市场中 ϕ 是唯一的。特别地，对于任一 $\omega\in\Omega$，存在**状态或有组合** θ_ω，它在状态 ω 下的支付为 1，而在其他状态下的支付全部为 0。并且，$\theta_\omega=X^{-1}1_\omega$，而它的市场价格为 $\phi_\omega=S^T\theta_\omega=S^TX^{-1}1_\omega$，也就是 ω 的状态价格。

$$X\theta_\omega = 1_\omega \Rightarrow \theta_\omega = X^{-1}1_\omega \Rightarrow \theta = X^{-1}$$
$$\phi_\omega = S^T\theta_\omega = S^T X^{-1}1_\omega \Rightarrow \phi^T = S^T\theta = S^T X^{-1}$$

从而，我们可以把包括初始证券组合在内的**任意支付表示成状态或有组合的组合**。比方说，可以用状态或有组合的组合复制任意支付 $y: y_\omega$ 单位的 θ_ω， $\omega = 1,\cdots,\Omega$。它的市场价值为 $\phi^T y$。特别地，每个参与者在 1 期的禀赋 $e_{k,1}$，与市场价值为 $\phi^T e_{k,1}$ 的状态或有组合的组合等价。他的预算集合变成 $B(e_k) = \left\{c \ge 0 : \hat{\phi}^T c_k = w_k\right\}$，其中 $\hat{\phi} = [1;\phi]$。

$$B(X,S) = \left\{c \ge 0 : c_0 = e_0 - S^T\theta, c_1 = e_1 + X\theta, \theta \in \mathrm{R}^N\right\}$$
$$\exists\phi, w = e_0 + \phi^T e_1 = \hat{\phi}^T e = \hat{\phi}^T c$$

与在 A－D 市场中讨论的一样，在一个完全市场中，参与者的预算集合只取决于他的财富——即禀赋现在的市值 $w_k = \hat{\phi}^T e_k$，而与禀赋在时间和状态上的具体分布无关。

因此，我们可以把**参与者的优化问题表述成选择这些状态或有组合的组合，只受到一个预算约束的限制**，而用**这些组合的市场出清来表述市场均衡**。

这就变成了与在第 3 章的 A－D 证券市场中求解完全一样的问题，唯一的区别是这里的**效用函数取期望效用函数的形式**。在求解均衡的时候，我们可以把状态或有组合当成基本证券，用它们而非原始证券来表示禀赋、组合选择以及消费。这就得到了下面的定理：

定理 10.1 当市场完全时，均衡配置与状态价格和具有相同财富分布的 A－D 经济中的一样，而与实际的市场价格以及参与者的禀赋在时间和状态上的分布无关。

现在我们考虑参与者的消费/组合选择问题。赋予每一个参与者当前禀赋 $e_{k,0}$ 以及交易证券的组合 $\overline{\theta}_k$（这里，我们假设参与者在 1 期的禀赋就是赋予他的交易证券）。参与者在 1 期收到的总支付 $e_{k,1}=X\overline{\theta}_k$，可以用状态或有组合的组合表示。他的总财富为 $w_k=e_{k,0}+\phi^T e_{k,1}=e_{k,0}+\phi^T X\overline{\theta}_k=e_{k,0}+S^T X^{-1}X\overline{\theta}_k=e_{k,0}+S^T\overline{\theta}_k$。

他的消费/组合选择问题可以表述成选择现在的财富以及未来每一状态下的消费，只受到预算约束的限制。即，

$$\max_{c_{k,0}+\phi^T c_{k,1}=w_k} u_{k,0}(c_{k,0})+\sum_{\omega} p_{\omega} u_{k,1}(c_{k,1\omega}) \tag{10.1}$$

这里，我们忽略了消费非负的约束，即假定这些约束不起作用。否则，我们可以回到第 3 章中的一般解。建立拉格朗日方程：

$$L = u_{k,0}(c_{k,0})+\sum_{\omega} p_{\omega} u_{k,1}(c_{k,1\omega}) - \lambda(c_{k,0}+\phi^T c_{k,1}-w_k)$$

F.O.C.

$$\frac{\partial L}{\partial c_{k,0}} = u'_{k,0}(c_{k,0}) - \lambda_k = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_{k,1\omega}} = p_{\omega} u'_{k,1}(c_{k,1\omega}) - \lambda_k \phi_{\omega} = 0, \forall \omega \in \Omega$$

得到优化的条件是

$$u'_{k,0}(c_{k,0}) = \lambda_k \qquad (10.2a)$$

$$p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega}) = \lambda_k \phi_\omega, \forall \omega \in \Omega \qquad (10.2b)$$

这意味着，$\forall k$:

$$\frac{p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega})}{u'_{k,0}(c_{k,0})} = \phi_\omega, \frac{p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega})}{p_{\omega'} u'_{k,1}(c_{k,1\omega'})} = \frac{\phi_\omega}{\phi_{\omega'}}, \forall \omega, \omega' \in \Omega \qquad (10.3)$$

（10.3）式表示的是不同时期/状态下消费的边际效用之比等于它们的相对价格。进一步，（10.2b）式可写成

$$u'_{k,1}(c_{k,1\omega}) = \lambda_k \frac{\phi_\omega}{p_\omega} = \lambda_k \rho_\omega, \forall \omega \in \Omega$$

状态价格除以它的概率，ϕ_ω / p_ω 也叫做 **state price density**。

当$u_{k,t}(\cdot)(t=0,1)$严格为凹函数（单调递增）时，$u'_{k,t}(\cdot)$严格单调递减，所以$u'_{k,t}{}^{-1}(\cdot)$存在（严格单调递减）。因此，我们有

$$c_{k,0}=u'_{k,0}{}^{-1}(\lambda_k), c_{k,1\omega}=u'_{k,1}{}^{-1}(\lambda_k\phi_\omega/p_\omega)=u'_{k,1}{}^{-1}(\lambda_k\rho_\omega) \qquad (10.4)$$

其中，λ_k由预算约束决定：

$$\begin{aligned} c_{k,0}+\sum_{\omega\in\Omega}\phi_\omega c_{k,1\omega} &= u'_{k,0}{}^{-1}(\lambda_k)+\sum_{\omega\in\Omega}\phi_\omega u'_{k,1}{}^{-1}(\lambda_k\phi_\omega/p_\omega) \\ &= w_k = e_{k,0}+\sum_{\omega\in\Omega}\phi_\omega e_{k,1\omega} \end{aligned} \qquad (10.5)$$

形式上，（10.4）式和（10.5）式给出了在给定证券价格集合$\{\phi_\omega,\omega\in\Omega\}$下参与者优化问题的解。以上的解揭示了参与者最优消费/投资选择的一个重要性质。

定理 10.2 在完全市场中，参与者具有（6.3）式形式的递增且严格凹的期望效用函数，$\forall k$以及$\omega,\omega'\in\Omega$，$c_{k,1\omega}<c_{k,1\omega'}$当且仅当$\phi_\omega/p_\omega>\phi_{\omega'}/p_{\omega'}$。

由（10.4）式，且$u'_{k,t}{}^{-1}(\cdot)$严格单调递减。

因此，最优性意味着当且仅当**概率重整化**后的状态价格相对较低时，这个状态下的消费相对较高，因为它较便宜。

如果证券市场出清，市场达到均衡，也就是

$$\sum_k \theta_k = \sum_k \bar{\theta}_k = \theta_M$$

其中，θ_M为市场组合。给定参与者k对状态或有组合的需求为$c_{k,1}$（即为了在 1 时有$c_{k,1}$单位的消费，应持有$c_{k,1}$单位的状态证券），转换成原始证券，其需求为$\theta_k = \theta c_{k,1} = X^{-1} c_{k,1}$。

因此，**原始证券的市场出清条件变为**

$$\sum_k X^{-1} c_{k,1} = \sum_k \bar{\theta}_k \text{，或} \sum_k c_{k,1} = \sum_k X\bar{\theta}_k = \sum_k e_{k,1}$$

我们可以把市场出清的条件重新写成

$$\sum_k c_{k,0} = \sum_k e_{k,0}, \sum_k c_{k,1} = \sum_k e_{k,1} \tag{10.6}$$

其中，我们在第二个等式两边乘以 ϕ^T 并代入参与者的预算约束就得到了第一个等式：

$$\sum_k \phi^T c_{k,1} = \sum_k \phi^T e_{k,1} \Rightarrow \sum_k \left(w_k - c_{k,0}\right) = \sum_k \left(w_k - e_{k,0}\right) \Rightarrow \sum_k c_{k,0} = \sum_k e_{k,0}$$

因此，第一个等式是多余的。这也就是前面提到的 Walras 法则。

给定参与者由（10.4）式和（10.5）式给出的最优消费/组合的解，对于均衡我们有下面的结论：

定理 10.3 均衡存在且唯一。

例 10.1：

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow w_1=1, w_2=2\phi_a+\phi_b=S$$

$$X=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \theta=X^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_S & \theta_B\end{bmatrix}$$

$$\phi^T=S^T\theta=\begin{bmatrix}S & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S-B & 2B-S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_a & \phi_b\end{bmatrix}$$

$$B=\phi_a+\phi_b, S=2\phi_a+\phi_b$$

$$u_1=\log x, u_2=2\sqrt{x}$$

由 $u'_{k,0}(c_{k,0})=\lambda_k$ 和 $p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega})=\lambda_k\phi_\omega, \forall\omega\in\Omega$，我们有

参与者 1：0 时，$\frac{1}{x}=\lambda_1\Rightarrow c_{1,0}=\frac{1}{\lambda_1}$；1 时 $\frac{1}{2}\frac{1}{x}=\lambda_1\phi_\omega\Rightarrow c_{1,\omega}=\frac{1}{2\lambda_1\phi_\omega}$。参与者 2：0 时，$x^{-\frac{1}{2}}=\lambda_2\Rightarrow c_{2,0}=\frac{1}{\lambda_2^2}$；1 时 $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\lambda_2\phi_\omega\Rightarrow c_{2,\omega}=\left(\frac{1}{2\lambda_2\phi_\omega}\right)^2=\frac{1}{4\lambda_2^2\phi_\omega^2}$。

由每个参与者的约束条件$c_{k,0}+\sum_{\omega\in\Omega}\phi_\omega c_{k,1\omega}=w_k=e_{k,0}+\sum_{\omega\in\Omega}\phi_\omega e_{k,1\omega}$，有

$$\frac{1}{\lambda_1}+\phi_a\frac{1}{2\lambda_1\phi_a}+\phi_b\frac{1}{2\lambda_1\phi_b}=\frac{2}{\lambda_1}=w_1$$

$$\frac{1}{\lambda_2^2}+\phi_a\frac{1}{4\lambda_2^2\phi_a^2}+\phi_b\frac{1}{4\lambda_2^2\phi_b^2}=w_2$$

第二个式子也可写为$\frac{1}{\lambda_2^2}(1+\frac{1}{4\phi_a}+\frac{1}{4\phi_b})=\frac{\alpha}{\lambda_2^2}=w_2,\alpha=1+\frac{1}{4\phi_a}+\frac{1}{4\phi_b}$，即

$$\lambda_1=\frac{2}{w_1}\Rightarrow c_{1,0}=\frac{w_1}{2},c_{1,\omega}=\frac{w_1}{4\phi_\omega}$$

$$\lambda_2^2=\frac{\alpha}{w_2}\Rightarrow c_{2,0}=\frac{w_2}{\alpha},c_{2,\omega}=\frac{w_2}{4\alpha\phi_\omega^2}$$

根据市场出清条件$\sum_k c_{k,0}=\sum_k e_{k,0},\sum_k c_{k,1}=\sum_k e_{k,1}$，有

$$c_{1,0}+c_{2,0}=\frac{w_1}{2}+\frac{w_2}{\alpha}=\frac{1}{2}+\frac{2\phi_a+\phi_b}{\alpha}=1$$

$$c_{1,a}+c_{2,a}=\frac{w_1}{4\phi_a}+\frac{w_2}{4\alpha\phi_a^2}=\frac{1}{4\phi_a}+\frac{2\phi_a+\phi_b}{4\alpha\phi_a^2}=2$$

$$c_{1,b}+c_{2,b}=\frac{w_1}{4\phi_b}+\frac{w_2}{4\alpha\phi_b^2}=\frac{1}{4\phi_b}+\frac{2\phi_a+\phi_b}{4\alpha\phi_b^2}=1$$

解出 $\phi_a=\frac{1}{16}(1+\sqrt{17}),\phi_b=\frac{1}{2}$

10.2 Pareto Optimality and Risk Sharing

A Optimality

引用在 A－D 经济中得到的结论，我们已经证明完全市场中的均衡配置是最优的（定理 23.3）。但是在一般情况下，我们如何判断某一配置是否是最优配置？也就是说，是否存在可以用来鉴别最优配置的条件？下面的定理给出答案的一部分。

定理 10.4 配置$\{c_k\}$是 Pareto 最优的，如果存在一组权重$\mu_k > 0(k=1,\cdots,K)$，使得$\{c_k\}$是下面问题的解：

$$\begin{aligned}\max_{\{c_k,\forall k\}} \quad & U = \sum_k \mu_k \left[u_{k,0}(c_{k,0}) + \sum_\omega p_\omega u_{k,1}(c_{k,1\omega}) \right] \\ s.t. \quad & \sum_k c_k = \sum_k e_k \equiv C = [C_0; C_1]\end{aligned} \tag{10.7}$$

其中，C_t 为 $t=0,1$ 期的总消费。

称（10.7）式为中央计划者问题，因为它可以被理解成一个面临经济总资源约束的中央计划者，对所有参与者的效用函数的加权平均进行优化。

因为每一参与者的效用函数是他自身消费的凹函数，（10.7）式所给出的计划者的目标函数也是它所有变量的凹函数。因此，优化问题（10.7）的一阶条件也是它的充分条件。构造拉格朗日方程

$$L = U - \phi_0'(\sum_k c_{k,0} - C_0) - \sum_\omega \phi_\omega'(\sum_k c_{k,1\omega} - C_{1\omega})$$

假设存在内部解，则一阶条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_{k,0}} &= \mu_k u'_{k,0}(c_{k,0}) - \phi'_0 = 0 \quad \forall k \\ \frac{\partial L}{\partial c_{k,1\omega}} &= \mu_k p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega}) - \phi'_\omega = 0 \quad \forall k,\omega \end{aligned}$$

，即

$$\mu_k u'_{k,0}(c_{k,0}) = \phi'_0 \quad \forall k \tag{10.8a}$$

$$\mu_k p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega}) = \phi'_\omega \quad \forall k,\omega \tag{10.8b}$$

$$\frac{\mu_k p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega})}{\mu_k u'_{k,0}(c_{k,0})} = \frac{p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega})}{u'_{k,0}(c_{k,0})} = \frac{\phi'_\omega}{\phi'_0} = \phi_\omega \quad \forall k,\omega$$

这里，$\phi'_0, \{\phi'_\omega, \omega \in \Omega\}$ 是对应于资源约束 $\sum_k c_k = C$ 的 Lagrangian 乘子。因此，所有参与者的相对边际效用（相对于 0 期消费的边际效用）相等。（10.8）式是 Pareto 最优的充要条件。

对于所有 k 和 $t=0,1$，$u_{k,t}(\cdot)$ 是严格凹的。所以，对于中央计划者的问题我们有如下解：

$$c_{k,0} = u'^{-1}_{k,0}(\phi'_0/\mu_k = \lambda_k), c_{k,1\omega} = u'^{-1}_{k,1}(\phi'_\omega/(\mu_k p_\omega) = \lambda_k \phi_\omega / p_\omega) \tag{10.9}$$

把（10.9）式和前一节导出的市场均衡相比，很明显，如果我们令 $\phi'_{\omega}/\phi'_{0}=\phi_{\omega},\omega=1,\cdots,\Omega$，且 $\lambda_k=\phi'_0/\mu_k(k=1,\cdots,K)$，其中 λ_k 是对应于参与者 k 的财富约束的 Lagrangian 乘子，那么由中央计划者问题得到的配置和相应财富分布下的均衡配置完全一样。因而我们有下面的定理：

定理 10.5 对于定义 2.5 中描述的经济，任何一个 Pareto 最优配置都可以由完全证券市场下，相对于财富在参与者之间的某个配置的市场均衡来达到。

定理 10.5 也称为福利经济学第二定理。

First Welfare Theorem: If asset markets are complete and if the agents' utility functions are strictly increasing, then every equilibrium consumption allocation is Pareto optimal.

Second Welfare Theorem: If asset markets are complete and if the agents' utility functions are strictly quasi-concave and strictly increasing, then every Pareto optimal consumption allocation is an equilibrium allocation under an appropriate distribution of the aggregate endowment.

B risk Sharing

由（10.9）式我们有

$$C_{1\omega}=\sum_k c_{k,1\omega}=\sum_k u'_{k,1}{}^{-1}(\phi'_\omega/(\mu_k p_\omega))$$

因为$u_{k,1}(\cdot)$是凹的，所以$u'_{k,1}(\cdot)$单调（递减），因而$u'_{k,1}{}^{-1}(\cdot)$也是单调（递减）的。因此，上式右边是ϕ'_ω的单调函数。这意味着ϕ'_ω是$C_{1\omega}$和中央计划者目标函数中参与者的权重组合$\{\mu_k, k=1,\cdots,K\}$的函数：

$$\phi'_\omega=g(C_{1\omega};\mu)$$

其中，$\mu\equiv[\mu_1;\cdots;\mu_k]$。另外，$g(C;\mu)$对 $\boldsymbol{C}$ 单调且与ω无关。

把$\phi'_\omega=g(C_{1\omega};\mu)$代入每一参与者最优配置的解（（10.4）式或（10.9）式），我们得到

$$c_{k,1\omega} = f_{k,1}(C_{1\omega};\mu) \quad \tilde{c}_k = f_{k,1}(\tilde{C}_1;\mu), \forall k \tag{10.10}$$

其中， $f_{k,1}$ 与 ω 无关。出于同样的理由，我们还有 $\{f_{k,0}, k=1,\cdots,K\}$ 使得 $c_{k,0} = f_{k,0}(C_0;\mu)$ 。称函数集合 $\{(f_{k,0}, f_{k,1}), k=1,\cdots,K\}$ 为 optimal sharing rule，达到最优配置时，它决定了所有时间和状态下每一参与者的消费与总消费之间的函数关系。显然，

$$\sum_k f_{k,0}(C_0;\mu) = C_0, \sum_k f_{k,1}(\tilde{C}_1;\mu) = \tilde{C}_1 \tag{10.11}$$

最优分担原则具有如下性质：

定理 10.6 $\quad$ *if* $C_{1\omega} > C_{1\omega'}$, *then* $c_{k,1\omega} > c_{k,1\omega'} \ \forall k$

证明：由式（10.9），有

$$c_{k,1\omega} = u'^{-1}_{k,1}(\phi'_\omega/(\mu_k p_\omega)) = u'^{-1}_{k,1}(\lambda_k \phi_\omega / p_\omega)$$

$$\sum_k c_{k,1\omega} = \sum_k u'^{-1}_{k,1}(\lambda_k \phi_\omega / p_\omega) = C_{1\omega}$$

$$\frac{\phi_\omega}{p_\omega} = g_\omega\left(C_{1\omega}, \{\lambda_k, \forall k\}\right)$$

$$C_{1\omega}\uparrow \Rightarrow \frac{\phi_\omega}{p_\omega}\downarrow \Rightarrow c_{k,1\omega}\uparrow$$

定理 10.6 给出了市场完全时，风险通过市场在参与者之间进行分担的两个重要特性：第一，**每个参与者的消费只与总禀赋有关**，总禀赋较高的状态下所有参与者的消费也较多。也就是说，他们都**分担了未来总禀赋的风险**。第二，这是**达到均衡时他们承担的唯一风险**。他们的消费与他们各自禀赋的风险没有任何关系，在证券市场上的交易使得他们完全消除了与总禀赋无关的风险。因此，在完全市场中，风险分担是最优的。

完全市场下风险分担的有效性对于资产价格的决定有着重要的意义。尤其我们看到，给定参与者的财富分布，证券价格只与 aggregate risk——即总禀赋/消费中的风险有关，与 individual risk——即个体参与者禀赋中的风险无关。

C Linear Sharing Rule

除了单调性以外，我们对于 sharing rule 并没有更多一般性的结论。分担规则本身可以具有多种形式。但是，在特定的偏好条件下，分担规则可以取简单的形式。我们现在考虑一个可以求出分担规则显示解的例子。而且，它是线性的，也就是说，对于所有的 k， $f_{k,1}$ 是 $\tilde{C}_1$ 的线性函数。为了记号的简化，本节我们省略分担规则的时间指标 1。

定理 10.7 当且仅当

$$\forall k : u'_{k,1}(c) = \rho_k (d_k + c / \gamma)^{-\gamma}$$

时，线性分担原则成立。其中， $\rho_k > 0, \gamma \geq -1$ 。

证明：略

定理 10.7 中，线性分担规则的条件要求所有参与者的效用函数都是 HARA 类且具有相同的指数 γ 。

10.3 Representative Agent

假设单个参与者有时间可分离（即时间可加）的期望效用函数，作为个体参与者效用的加权和，中央计划者的目标函数也是时间可分离的且具有期望效用函数的形式。因此，我们可以把中央计划者的问题（10.7）式分解成每一时间和每一状态下的问题：

$$\begin{aligned}\max_{\{c_k,\forall k\}} \ U &= \sum_k \mu_k\left[u_{k,0}(c_{k,0}) + \sum_\omega p_\omega u_{k,1}(c_{k,1\omega})\right] \\ &= \sum_k \mu_k u_{k,0}(c_{k,0}) + \sum_k \mu_k\left[\sum_\omega p_\omega u_{k,1}(c_{k,1\omega})\right] \\ &= \sum_k \mu_k u_{k,0}(c_{k,0}) + \sum_\omega p_\omega\left[\sum_k \mu_k u_{k,1}(c_{k,1\omega})\right]\end{aligned}$$

$$u_0(C_0) \equiv \max_{\sum_k c_{k,0}=C_0} \sum_k \mu_k u_{k,0}(c_{k,0}) \qquad （10.12a）$$

$$u_1(C_{1\omega}) \equiv \max_{\sum_k c_{k,1\omega}=C_{1\omega}} \sum_k \mu_k u_{k,1}(c_{k,1\omega}), \forall \omega \in \Omega \qquad （10.12b）$$

中央计划者的目标函数在某一时期、某一状态下的最大值取决于相应时期和状态下的总禀赋。我们可以把它定义成总禀赋也即总消费的效用函数，并定义 representative agent 为具有如下形式的时间可分离的期望效用函数的假想参与者：

$$u_0(C_0)+\sum_{\omega} p_{\omega} u_1(C_{1\omega}) \tag{10.13}$$

定理 10.8 如果所有参与者都具有递增且严格凹性的效用函数，由（10.13）式中定义的代表性参与者的效用函数也是递增且严格凹性的。

证明：由（10.12）式和中央计划者问题（10.7）的最优条件（10.8）式。我们有

$$\begin{aligned} u'_0(C_0) &= \sum_k \frac{\mu_k u'_{k,0}(c_{k,0})}{\phi'_0} \frac{f'_{k,0}(C_0)}{\sum_k f_{k,0}(C_0;\mu)=C_0} \\ &= \phi'_0 \sum_k f'_{k,0}(C_0) = \phi'_0 = \mu_k u'_{k,0}(c_{k,0}) \end{aligned} \tag{10.14a}$$

$$u'_1(C_{1\omega}) = \sum_k \frac{\mu_k p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega})}{\phi'_\omega} \frac{f'_{k,1}(C_{1\omega})}{\sum_k f_{k,1}(\tilde{C}_1;\mu)=\tilde{C}_1}$$

$$= \phi'_\omega \sum_k f'_{k,1}(C_{1\omega}) = \phi'_\omega = \mu_k p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega}), \forall \omega \in \Omega \qquad (10.14b)$$

其中，$\phi'_0, \phi'_\omega > 0$；又由（10.11）式两边对总消费求导可得

$$\sum_k f'_{k,0}(C_0) = \sum_k f'_{k,1}(C_{1\omega}) = 1$$

所以

$$u'_0(C_0) = \phi'_0 > 0$$
$$u'_1(C_{1\omega}) = \phi'_\omega > 0$$

对于二阶导数，我们有

$$u''_0(C_0) = \sum_k \mu_k u''_{k,0}[f'_{k,0}(C_0)]^2 + \sum_k \mu_k u'_{k,0} f''_{k,0}(C_0)$$
$$= \sum_k \mu_k u''_{k,0}[f'_{k,0}]^2 < 0$$

因为$u''_{k,0}(\cdot)<0,\forall k$ （其中$\sum_k f''_{k,0}(C_0)=0$ ）。同样， $u''_{k,1}(\cdot)<0,\forall k$

现在我们考虑经济中只有代表性参与者的情形，他的禀赋是经济的总禀赋$[C_0;C_1]$。给定状态价格向量ϕ，代表性参与者的优化问题是

$$\max_{\phi^T c=\phi^T C} u_0(c_0)+\sum_{\omega} p_\omega u_1(c_{1\omega})$$

这就要求
$$\frac{p_\omega u'_1(c_{1\omega})}{u'_0(c_0)}=\phi_\omega,\forall\omega\in\Omega$$

市场出清条件要求$c_0=C_0,c_1=C_1$。由此立即得到均衡状态价格如下：

$$\frac{p_\omega u'_1(C_{1\omega})}{u'_0(C_0)}=\phi_\omega,\forall\omega\in\Omega$$

因此，当经济中只有一个参与者时，立即可以求得均衡：他的消费就是他的禀赋，而均衡状态价格则是这些状态下的相对边际效用。

如果单一参与者就是代表性参与者，得到的均衡价格和由初始的有多个参与者的经济所得的均衡价格完全一样。由（10.14）式，我们有

$$\begin{aligned} &\mu_k u'_{k,0}(c_{k,0}) = u'_0(C_0) = \phi'_0 \\ &\mu_k p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega}) = p_\omega u'_1(C_{1\omega}) = \phi'_\omega, \forall \omega \in \Omega \end{aligned} \tag{10.15}$$

因为个体参与者的消费由上面等式的均衡配置设定，因而 ϕ'_ω / ϕ'_0 就是市场中状态 ω 的状态价格。

因此，当市场完全时，对于给定财富分布的有多个参与者的市场，我们可以构造一个对应的市场，在这个市场中，只有一个参与者即**代表性参与者**。他**的效用函数是所有个体参与者效用函数权和**，而他的禀赋就是经济的总禀赋。由单个代表性参与者的市场所得到的均衡价格和由初始的多个参与者市场中的价格完全一样。因此，如果我们的目的是资产定价，**只需分析由代表性参与者构成的市场即可**。特别地，我们只需确定代表性参与者的效用函数和总禀赋。如上所示，求解这个经济的均衡尤其是均衡证券价格是轻而易举的。

在上面的讨论中，我们从（有多个参与者的）市场均衡出发，接着定义代表性参与者。尽管给定了代表性参与者（即他的效用函数），我们可以很容易地得到均衡价格。但一般来说，他的效用函数却不是事先给定的，而是依赖于他所代表的经济。如果为了构造代表性参与者我们必须首先了解整个均衡，那么它的存在对于求解均衡特别是均衡价格的作用就十分有限了。在下面的例子中，我们将证明事实并非完全如此，我们往往可以利用代表性参与者的存在性和他的性质求解均衡。

例 10.2 代表性参与者的效用函数 $u_0 = u_1 = \log c_1 + 2\mu\sqrt{C - c_1}$ ，目标函数为

$$\log c_{1,0} + 2\mu\sqrt{C_0 - c_{1,0}} + \frac{1}{2}\left[\log c_{1,a} + 2\mu\sqrt{C_{1,a} - c_{1,a}}\right] + \frac{1}{2}\left[\log c_{1,b} + 2\mu\sqrt{C_{1,b} - c_{1,b}}\right]$$

F.O.C 为

$$\frac{\partial u}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} - \mu(C - c_1)^{-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \mu^2 c_1^2 + c_1 - C = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2\mu^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4\mu^2 C}\right) = \frac{\sqrt{1 + 4\mu^2 C} - 1}{2\mu^2}$$

10.4 Aggregation

代表性参与者的效用函数不仅依赖于个体参与者的效用函数，也依赖于他们之间的财富分布。因此，**均衡证券价格也依赖于初始财富分布**，这就使得如果不求解均衡，事先就难以知道代表性参与者的效用函数。一般情形下，它并不具有对个体参与者的效用函数的简单依赖关系。即使所有参与者的效用函数都相同，代表性参与者的效用也常会是其他形式，并取决于财富在个体参与者之间的分布。但是，在一定条件下，个体参与者的效用函数以一种简单的方式决定了代表性参与者的效用函数，且与财富在他们之间的分布无关。尤其在代表性参与者的效用函数与个体参与者的效用函数形式相同时，我们称这种情况为简单的 **aggregation**。

定理 10.9 如果经济中的参与者都具有如下的效用函数：

$$u_k(c) = \frac{1}{1-\gamma}(d_k + c)^{1-\gamma}$$

其中，$\gamma > 0$，那么代表性参与者的效用函数具有相同的形式：

$$u(C) = \frac{1}{1-\gamma}(d+C)^{1-\gamma}$$

且与财富在参与者之间的分配无关。

这里，我们忽略了时间指标，因为$u_k(\cdot)$可以表示 0 或 1 期的效用函数，只是相差一个正线性变换（即时间折现系数）。

在定理 10.9 考虑的情形中，代表性参与者的效用函数与个体参与者的效用函数具有相同的形式，这使得我们不要求解均衡就可以得到均衡价格。

令$u_0(C) = \frac{1}{1-\gamma}(d+C)^{1-\gamma}, u_1(C) = \rho u_0(C)$，我们有

$$\phi_\omega = \frac{p_\omega u'_1(C_{1\omega})}{u'_0(C_0)} = \rho p_\omega \left(\frac{d+C_0}{d+C_{1\omega}}\right)^\gamma$$

10.5 基于消费的资本资产定价模型

给定市场的均衡，我们现在来进一步分析资产的均衡价格和经济基本面之间的关系，比如经济的总体风险、市场的风险厌恶程度等。我们尤其希望对风险的经济意义有一个更为明确的认识。

A 基于消费的定价关系

由优化条件（10.3）式，对于支付为 $\tilde{X}_n = X_{\cdot,n} = [x_{1,n};\cdots;x_{\Omega,n}]$ 的证券，它的价格为

$$S_n = \phi^T \tilde{X}_n = \sum_{\omega} \phi_\omega x_{\omega,n} = \sum_{\omega} p_\omega \frac{u'_{k,1}(c_{k,1\omega})}{u'_{k,0}(c_{k,0})} x_{\omega,n} = E\left[\frac{u'_{k,1}(\tilde{c}_{k,1})}{u'_{k,0}(c_{k,0})}\tilde{X}_n\right]$$

用代表性参与者的边际效用重新表述这个等式，我们有

$$S = E\left[\frac{u'_1(\tilde{C}_1)}{u'_0(C_0)}\tilde{X}\right] = E[\tilde{\pi}\tilde{X}], \tilde{\pi} \equiv \frac{u'_1(\tilde{C}_1)}{u'_0(C_0)} = \frac{\phi_\omega}{p_\omega} \qquad (10.16)$$

（10.16）式给出了一个我们所说的定价模型：从证券支付到它的价格的映射。这里，$\pi_\omega = \dfrac{u'_1(C_{1\omega})}{u'_0(C_0)}$ 是代表性参与者（在状态 ω 下）的相对边际效用。

首先让我们考虑具有确定支付为 1 的无风险证券。那么，（10.16）式给出

$$B = \frac{1}{1+r_F} = E[\tilde{\pi}] \qquad (10.17)$$

对于风险证券 n，我们有

$$\begin{aligned} S_n &= E[\tilde{\pi}\tilde{X}_n] = E[\tilde{\pi}]E[\tilde{X}_n] + Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n] \\ &= \underbrace{\frac{E[\tilde{X}_n]}{1+r_F}}_{\text{个体风险}} + \underbrace{Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n]}_{\text{总体风险}} \end{aligned} \qquad (10.18)$$

如果没有风险，证券的价格就是它的（预期）支付以无风险利率折现。即上面定价公式中的第一项。当它的支付有风险时，证券的价格会因此进行调整，这就是第二项。第二项给出了风险的经济定义以及风险和资产价格之间的关系。

首先让我们考虑一只证券，其支付与代表性参与者（以及所有个体参与者）的（**相对）边际效用** $\tilde{\pi}$ 不相关，即 $Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n] = 0$。由定价公式（10.18），我们有 $S_n = \frac{E[\tilde{X}_n]}{1+r_F}$。因此，这只证券的定价和无风险证券一样：对预期支付用无风险利率折现。要特别指出的是，它的支付并非无风险—— $\tilde{X}_n$ 是一个随机变量。但我们看到，由于**这类风险与参与者的边际效用不相关，它们对定价的影响也为零**。

因为在完全市场情形下，参与者未来的边际效用完全由未来的总消费/禀赋决定，因此，未来边际效用的不确定性来自于未来总消费/禀赋的风险，所以，我们可以把由未来边际效用的不确定性所反映的风险称为 **aggregate risk**，而把与之不相关的风险称为 **idiosyncratic risk**。那么，上面的讨论说明，资产的定价只与总体风险有关，而与个体风险无关。

接着，我们来考虑资产定价与总体风险之间的关系。为此，我们考虑一只支付与参与者的边际效用 $\tilde{\pi}$ 负相关的证券，即 $Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n] < 0$。这意味着**较低边际效用状态下它的支付较高，而较高边际效用状态下它的支付反而较低**。因为边际效用对消费单调递减，低边际效用的状态也是高消费的状态。因此，这只证券在资源相对充裕、额外消费价值相对较低时支付较高，而在资源相对稀缺、额外消费价值相对较高时支付却较低。对于参与者而言，这类支付所带来的风险是他所不希望的。由（10.18）式，价格中相应的风险调整项是负的，即这个证券价格含有折价以补偿它所带来的总体风险。

折价的大小取决于协方差 $Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n]$ 的绝对值，也就是说，支付与参与者边际效用的协方差为负且绝对值越大，证券风险越大且所要求的风险折价也越大。因此 $Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n]$ 反映了证券 n 所承担的总体风险的大小。

对于支付与参与者边际效用正相关即$Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n] > 0$的证券，我们有相反的结论。**当边际效用较高时证券支付较高，当边际效用较低时证券支付较低**。对于这类证券来说，尽管它的支付有不确定性，它的价格却含有溢价。

$Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n] < 0$：总体消费$\tilde{C}_1$高（$\tilde{\pi}$小）、证券收益高$\tilde{X}_n$时，负相关，证券折价。

$Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n] > 0$：总体消费$\tilde{C}_1$低（$\tilde{\pi}$大）、证券收益高时，正相关，证券溢价。经济形式不好时，为我们提供了保险。

定价关系（10.18）式使得我们对风险的经济含义有了更明确的认识。

第一，风险分为两类：总体风险和个体风险。总体风险为与参与者边际效用相关的部分，而个体风险为与边际效用不相关的部分。

第二，一个资产的价格与它所承担的总体风险有关，而与它的个体风险无关。

第三，一个资产所承担的总体风险依赖于它的支付与边际效用的协方差，而它的风险溢价则与它所承担的总体风险的大小成正比。这样，我们从金融的角度对风险有了一个严格的定义和分类，并给出了它的度量以及它对价格的影响。

因为（10.16）式中的定价模型是用支付与参与者的消费的边际效用的关系来度量风险并为它定价的，因而被称为 **Consumption-Based Capital Asset Pricing Model**，CCAPM。

CCAPM 更方便的形式是使用收益率而不是支付和价格表述。记证券 n 的总收益率为 $\tilde{x}_n \equiv \tilde{X}_n / S_n$，净收益率为 $\tilde{r}_n \equiv \tilde{x}_n - 1$。我们可以把（10.16）式重新写成

$$E[\tilde{\pi}\tilde{x}_n] = 1, \forall n \tag{10.19}$$

对于无风险证券，我们有 $E[\tilde{\pi}x_F] = 1$。因此，

$$E[\tilde{\pi}(\tilde{r}_n - r_F)] = 0 \tag{10.20}$$

$$E[\tilde{\pi}(\tilde{r}_n - r_F)] = 0 \Rightarrow E[\tilde{\pi}]E[\tilde{r}_n - r_F] + Cov(\tilde{\pi}, \tilde{r}_n - r_F) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{1}{1+r_F} E[\tilde{r}_n - r_F] + Cov(\tilde{\pi}, \tilde{r}_n) = 0 \Rightarrow$$

$$E[\tilde{r}_n] - r_F = -(1+r_F)Cov[\tilde{\pi}, \tilde{r}_n] \tag{10.21}$$

$$S_n = \frac{E[\tilde{X}_n]}{1+r_F} + Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n] \Rightarrow 1 = \frac{1+E[\tilde{r}_n]}{1+r_F} + Cov[\tilde{\pi}, 1+\tilde{r}_n] \Rightarrow$$
$$1 = \frac{1+E[\tilde{r}_n]}{1+r_F} + Cov[\tilde{\pi}, \tilde{r}_n] \Rightarrow E[\tilde{r}_n] - r_F = -(1+r_F)Cov[\tilde{\pi}, \tilde{r}_n] \tag{10.21a}$$
$$\Rightarrow E[\tilde{r}_n] = \overline{r}_n = r_F - (1+r_F)Cov[\tilde{\pi}, \tilde{r}_n]$$

这也就是说，证券的风险溢价即 $E[\tilde{r}_n] - r_F$ 与它的收益率和代表性参与者的相对边际效用之间的协方差成负相关关系。当协方差为正时溢价为负。

（10.18）式有时也写成

$$S_n = \frac{E[\tilde{X}_n]}{1+r_F} + Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n] = \frac{E[\tilde{X}_n]}{1+\bar{r}_n} = \frac{E[\tilde{X}_n]}{E[\tilde{x}_n]} \qquad (10.22)$$

其中，$\bar{r}_n = E[\tilde{r}_n] = r_F - (1+r_F)Cov[\tilde{\pi}, \tilde{r}_n]$。这就是著名的 present value 公式，它表示证券价格就是证券的期望支付对一个**风险调整后的折现率折现**。对于无风险证券，它的折现率就是无风险利率 r_F，而 r_F 反映了市场中货币的时间价值。对于风险证券，折现率则包括时间价值和风险溢价两部分。

$$S_n = \frac{E[\tilde{X}_n]}{1+r_F} + Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n] = E[\tilde{X}_n]\left(\frac{1}{1+r_F} + \frac{Cov[\tilde{\pi}, \tilde{X}_n]}{E[\tilde{X}_n]}\right)$$

$$= E[\tilde{X}_n]\left(\frac{1}{1+r_F} + Cov[\tilde{\pi}, \frac{\tilde{X}_n}{E[\tilde{X}_n]}]\right) = E[\tilde{X}_n]\left(\frac{1}{1+r_F} + Cov[\tilde{\pi}, \frac{\tilde{x}_n}{E[\tilde{x}_n]}]\right)$$

$$= E[\tilde{X}_n]\left(\frac{1}{1+r_F} + Cov[\tilde{\pi}, \frac{1+\tilde{r}_n}{1+\overline{r}_n}]\right) = E[\tilde{X}_n]\left(\frac{1}{1+r_F} + \frac{1}{1+\overline{r}_n}Cov[\tilde{\pi}, \tilde{r}_n]\right)$$

$$= \frac{E[\tilde{X}_n]}{1+\overline{r}_n}\left(\frac{1+\overline{r}_n}{1+r_F} + Cov[\tilde{\pi}, \tilde{r}_n]\right) = \frac{E[\tilde{X}_n]}{1+\overline{r}_n}$$

$$\because \frac{1+\overline{r}_n}{1+r_F} + Cov[\tilde{\pi}, \tilde{r}_n] = 1 \qquad from\,(10.21a)$$

$$\therefore \overline{r}_n = r_F - (1+r_F)Cov[\tilde{\pi}, \tilde{r}_n]$$

式（10.22）也可以写为

$$S_n = \frac{1+Cov\left(\frac{\tilde{\pi}}{E[\tilde{\pi}]}, \frac{\tilde{X}_n}{E[\tilde{X}_n]}\right)}{1+r_F}E[\tilde{X}_n] = \frac{1+Cov\left(\frac{u'_1(\tilde{C}_1)}{Eu'_1(\tilde{C}_1)}, \frac{\tilde{X}_n}{E[\tilde{X}_n]}\right)}{1+r_F}E[\tilde{X}_n]$$

B 基于消费的实利率理论

为了加深对资产价格和经济基本面之间关系的认识，我们进一步考虑上述以消费为基础的定价模型。

为简单起见，我们作一些简化。令$\tilde{C}_1 \equiv C_0(1+\tilde{g})$，则$\tilde{g}$为消费的增长率。我们假设$\tilde{g}$为小量。则

$$u'(\tilde{C}_1) = u'(C_0(1+\tilde{g})) = u'(C_0) + C_0 u''(C_0)\tilde{g} + o(\tilde{g})$$

我们还假设$u_0(\cdot) = u(\cdot), u_1(\cdot) = \rho u(\cdot)$。

这样，参与者的相对边际效用$\tilde{\pi}$即可写成

$$\tilde{\pi} = \rho \frac{u'(\tilde{C}_1)}{u'(C_0)} = \rho\left[1 - \left(-\frac{C_0 u''(C_0)}{u'(C_0)}\right)\tilde{g} + o(\tilde{g})\right] \approx \rho(1 - R\tilde{g}) \qquad （10.23a）$$

这里，$o(\tilde{g})$ 表示 $\tilde{g}$ 的高阶项。我们注意到，圆括号中的项代表参与者的相对风险厌恶系数，记为 R。R 同时也反映了边际效用对消费水平的依赖程度（即 $u'(C)$ 对 C 的导数）。在下面的讨论中，为了方便我们将省略所有 $\tilde{g}$ 的高阶项。因此，

$$E[\tilde{\pi}] \approx \rho\left(1 - RE[\tilde{g}]\right) = \rho\left(1 - R\bar{g}\right) = \frac{1}{1 + r_F} \qquad (10.23\text{b})$$

这里，$\bar{g} = E[\tilde{g}]$ 是总消费（亦即总禀赋）的预期增长率。

由（10.23b）式，我们立即有 $1 + r_F = \dfrac{1}{\rho\left(1 - R\bar{g}\right)}$

$$r_F = \frac{1}{\rho\left(1 - R\bar{g}\right)} - 1 \qquad (10.24)$$

（10.24）式明确给出了无风险利率与经济基本面之间的关系。基本面的因素包括两方面：总消费/禀赋和参与者的偏好。

首先，我们看到，**利率与预期的消费增长率成正比**。这是个很直观的结果。当参与者预期到将来消费的增长较多时，它们的储蓄动机则较弱，因此市场的均衡利率应该较高。其次，**利率与参与者总体的时间折现系数 ρ 成反比关系**。这也很直观：参与者的时间折现系数越小，他们对未来的消费越是看轻。因此，市场利率应该越高，这样才能吸引他们的储蓄并平衡他们增加目前消费的欲望。同样，**当 R 较大时，给定未来消费的增长，相应的边际效用较低，也即对未来的消费更为看轻**。所以，市场利率应较高，即它与 R 成正比。

上述这些由经济基本面来确定实利率的结果是经典的实利率理论的基本内容。它主要说明**实利率依赖于市场对经济增长的预期**，其依赖的程度取决于市场的总体偏好，尤其是其时间偏好和边际效用对消费水平的依赖程度。之所以称为 **real interest rate** 是为了有别于 **nominal interest rate**。实利率是以实物来计算的利率，而名义利率则是以货币来计算的利率。我们的讨论都是以实物为单位的。

C 风险的测度及其溢价

在讨论了无风险利率即无风险资产的收益率后，我们再来考虑有风险资产的收益率。由（10.21）和（10.23）式，我们立即得到

$$\bar{r}_n - r_F = -(1+r_F)Cov[\tilde{\pi}, \tilde{r}_n] \approx -\frac{1}{\cancel{\rho}\left(1-R\bar{g}\right)}Cov[\cancel{\rho}(1-R\tilde{g}), \tilde{r}_n] = \frac{R}{1-R\bar{g}}Cov[\tilde{g}, \tilde{r}_n] \quad (*)$$

我们注意到，由于市场是完全的，**整个经济在 1 期的总禀赋也可看作是所有可交易证券的支付之和，即** $\sum_k e_{k,1} = \sum_k X\bar{\theta}_k = \sum_k c_{k,1}$ 。市场中所有可交易证券之和构成一个组合，即市场组合，记作 m。那么组合 m 的支付即是经济的总消费/禀赋。

市场的完全性使得我们可用 A－D 证券来表述市场组合，即 $\theta_m = C_1$ ，其中 $C_1 = [C_{11}; \cdots; C_{1\Omega}]$ 是 1 期的总消费向量。这个组合的现值为 $v_m = \phi^T C_1$ ，其中 ϕ 为状态价格向量，组合的收益率为 $\tilde{r}_m = (\tilde{C}_1 - v_m)/v_m = [C_0(1+\tilde{g}) - v_m]/v_m$ 。因此，我们有

$$\tilde{g}=(v_m/C_0)(1+\tilde{r}_m)-1$$

（*）式可写成

$$\overline{r}_n-r_F\approx\frac{R}{1-R\overline{g}}\frac{v_m}{C_0}Cov[\tilde{r}_m,\tilde{r}_n]$$

上式对任何资产都成立。若我们取 $\tilde{r}_n=\tilde{r}_m$，则有 $\overline{r}_m-r_F\approx\frac{R}{1-R\overline{g}}\frac{v_m}{C_0}\sigma_m^2$，其中 σ_m^2 为组合 m 收益率的方差。因此，有 $\frac{R}{1-R\overline{g}}\frac{v_m}{C_0}\approx\frac{\overline{r}_m-r_F}{\sigma_m^2}$，代入上式，我们有

$$\overline{r}_n-r_F\approx\beta_{n,m}(\overline{r}_m-r_F),\forall n \qquad (**)$$

其中，$\beta_{n,m}=Cov[\tilde{r}_m,\tilde{r}_n]/\sigma_m^2$ 是 $\tilde{r}_n$ 对 $\tilde{r}_m$ 的线性回归系数。

这个表达式以更为简洁的形式表述了以消费为基础的资本资产定价模型所给出的风险的经济含义及其与定价之间的关系。

因为市场组合 m 的支付即是整个经济的总消费/禀赋，其收益率的风险也正是整个经济的总体风险。而一个资产的收益相对于组合 m 的收益的回归系数 $\beta_{n,m}$，即可定义为它所承担的总体风险的测度。因为组合 m 的 β 值为 1，其风险溢价也就是单位总体风险所获得的溢价。所以（**）式表明，一个资产的总体风险由它相对于市场组合的 β 值来衡量，它的风险溢价等于它所承担的总体风险乘以**单位总体风险的溢价** $\bar{r}_m - r_F$。这就是著名的 Capital Asset Pricing Model，CAPM。

我们要强调，这里所得到的资本资产定价模型是以消费为基础的资本资产定价模型的一个近似——它是以市场组合的收益来近似参与者的边际效用而得到的。在第 13 章，我们会看到，在证券支付的分布或参与者的偏好满足一定条件时，二者是严格等价的。这是，资本资产定价模型是严格的，成为以消费为基础的资本资产定价模型在这些条件下的特殊形式。

我们上面用市场组合的收益作为边际效用的近似，其目的是以更简洁的形式来解释以消费为基础的资本资产定价模型的经济含义。其实，我们完全可以避免这种近似而采取严格的表述。

考虑这样一个组合 q，它在状态 ω 时的支付为 $X_{q,\omega}=\pi_\omega=u'_1(C_{1\omega})/u'_0(C_0)$。如果用 A－D 证券来表示，组合 q 即为 $\theta_q=\pi=[\pi_1;\cdots;\pi_\Omega]$。它的市值为 $v_q=\pi^T\theta_q$，收益率为 $\tilde{r}_q=\tilde{X}_q/v_q-1=\tilde{\pi}/v_q-1$。这样，我们就可以用组合 q 的收益率来描述参与者的边际效用，$\tilde{\pi}=v_q(1+\tilde{r}_q)$，并把定价方程（10.21）写作

$$\overline{r}_n-r_F=-(1+r_F)v_q\sigma_{n,q}$$

其中，$\sigma_{n,q}=Cov[\tilde{r}_q,\tilde{r}_n]$ 是证券 n 与组合 q 的收益的协方差。令 $n=q$，我们有

$$\overline{r}_q-r_F=-(1+r_F)v_q\sigma_q^2$$

因此，

$$\overline{r}_n - r_F = \beta_{n,q}(\overline{r}_q - r_F) \tag{10.25}$$

其中，$\beta_{n,q} = \sigma_{n,q} / \sigma_q^2$ 为 n 相对于 q 的 β 值。这样，组合 q 的收益率即可作为总体风险的描述，而一个资产相对于 q 的 β 值即可作为它所承担的总体风险的测度，它的风险溢价则与它的 β 值成正比。因此，（10.25）式也可以作为 CCAPM 的另一个表达方式。它与 CAPM 的区别是市场组合 m 及其收益率是可以直接从市场上观察到的，而组合 q 却不然。这使得以消费为基础的资本资产定价模型的实证检验和实际应用受到限制，并促使我们探求更具操作性的定价模型。

Chapter 11 Asset Pricing in An incomplete Market

11.1 消费和证券价格

我们首先考虑参与者的最优消费/投资组合选择问题。给定支付矩阵 X，市场化的消费/支付空间 $M=\left\{X\theta:\theta\in \mathrm{R}^{N}\right\}$ 是整个支付空间 R^{Ω} 的一个 N 维线性子空间。 $N<\Omega$ 时，M 严格包含于 R^{Ω}。所以在不完全市场中，不是所有消费/支付都是市场化的。由于参与者的预算约束，我们有 $c_1=e_1+X\theta$ 或 $c_1-e_1=X\theta\in M$。因此，他在 1 期的消费只限于 N 维子空间 $\left\{e_1+x:x\in M\right\}$。

记交易证券的持有量为 θ。每一参与者的优化问题为

$$\max_{\theta}\ u_{k,0}(e_{k,0}-S^T\theta_k)+E[u_{k,1}(\tilde{e}_{k,1}+\tilde{X}\theta_k)]$$

其中， $k=1,\cdots,K$ 。和以前一样，相应的优化条件为（见式 8.2）：

$$S_n u'_{k,0}(c_{k,0}) = E[u'_{k,1}(\tilde{c}_{k,1})\tilde{X}_n], \forall n \qquad (11.1)$$

或

$$S_n = E\left[\frac{u'_{k,1}(\tilde{c}_{k,1})}{u'_{k,0}(c_{k,0})}\tilde{X}_n\right] \qquad (11.2)$$

这就意味着，$\forall k, k'$，

$$S_n = E\left[\frac{u'_{k,1}(\tilde{c}_{k,1})}{u'_{k,0}(c_{k,0})}\tilde{X}_n\right] = E\left[\frac{u'_{k',1}(\tilde{c}_{k',1})}{u'_{k',0}(c_{k',0})}\tilde{X}_n\right], \forall n$$

这就是说，对所有参与者来说，由任意交易证券的支付所得到的期望相对边际效用（相对于 0 期消费的边际效用）相等。这是均衡的一个基本条件，也是更一般情形下的 Euler 方程。但这与完全市场的情形有所差别，在完全市场中任意状态下的相对边际效用相等（式 10.3）。

类似于 CCAPM，（11.2）式建立了参与者的消费和证券价格之间相同的联系。特别地，如果我们令 $\pi_{k,\omega}=\dfrac{u'_{k,1}(\tilde{c}_{k,1\omega})}{u'_{k,0}(c_{k,0})}=\dfrac{\phi_{k,\omega}}{p_\omega}$，那么，

$$S=E\left[\tilde{\pi}_k\tilde{X}\right],\forall k \qquad （11.3）$$

我们特别注意到，这里对不同参与者 $\tilde{\pi}_k$ 是不同的（在完全市场中，π_k 对所有参与者都是一样的，即状态价格密度）。但是（11.3）式对所有的 k 都成立。如果我们令 $\phi_{k,\omega}=p_\omega\pi_{k,\omega}$，那么（11.3）式就变为

$$S_n=\sum_\omega\phi_{k,\omega}x_{\omega,n}$$

由资产定价的基本原理，无套利意味着存在 $\phi=[\phi_1;\cdots;\phi_\Omega]>>0$ 使得 $S_n=\sum_\omega\phi_{k,\omega}x_{\omega,n}$。因此，由上面的等式来看，每一个 $\phi_k=[\phi_{k,1};\cdots;\phi_{k,\Omega}]$ 都可以作为状态价格向量。正如第 4 章中提到的，市场不完全时我们可以有不止一个状态价格向量。

Euler 方程（11.3）与完全市场中的 CCPAM 之间有一个重要差别。在 CCPAM 中，我们可以用代表性参与者的相对边际效用表示状态价格（密度），而相对边际效用依赖于总消费。因为总消费是外生的，是经济的原生变量，因此，定价关系（10.16）至少在形式上允许我们由经济的原生量来决定证券或支付的价格。但是在（11.3）式中，参与者的相对边际效用依赖于他的消费，而作为均衡结论的一部分，这是内生的。除非我们知道均衡分担规则，否则（11.3）式不能作为一个完整的定价模型，即它不能只基于经济的原生变量给出由支付到价格的映射。

11.2 约束下的最优配置

当市场不完全时，均衡配置一般不是 Pareto 最优的。这时很明显的，因为很多消费/支付都不是市场化的。参与者只能在可由证券市场融资的消费计划集中选择其消费。然而，由证券市场提供的市场化的支付允许参与者在特定的范围内配置资源。因此，我们自然会产生这样的问题：给定证券市场的限制，均衡配置是否在某种有限的意义上是有效的？

定义 11.1 给定经济中参与者的禀赋 $\{e_k, \forall k\}$，配置 $\{c_k, \forall k\}$ 是 **attainable**，$\forall k, X\theta_k = c_{k,1} - e_{k,1} \in M$。

当市场完全时，$M = \mathrm{R}^{\Omega}$，任意配置都是可获得的。当市场不完全时，许多配置是不可获得的。

定义 11.2 如果没有其他可获得的配置$\{c'_k, \forall k\}$使得

$$\sum_k c'_k = \sum_k c_k \tag{11.4}$$

且$\{c'_k, \forall k\}$ Pareto 占优于$\{c_k, \forall k\}$，我们则称一个可获得的配置$\{c_k, \forall k\}$在证券市场结构 X 下是 **constraint optimal**。

首先我们注意到，均衡配置总是可获得的，因为$c_{k,1} - e_{k,1} = X\theta_k$，其中$\theta_k$是参与者 k 的组合选择。

定理 11.1 在证券市场结构 X 下的均衡是约束最优的。

约束最优与第 2 章中定义的 Pareto 最优（即无约束最优）不同，因为它只限于可从证券市场获得的配置。许多证券/资产的不可交易正反映了交换这些资产或其支付时所需承担的成本。

在考虑配置的有效性时，如果一个配置涉及到不能由交易证券生成的支付（即它相对于给定的市场结构是不可获得的），那么它们的获得也应是有成本的。因而在给定的市场结构下，只关注可获得的配置就成为自然而合理的了。

11.3 实质完全市场

尽管在一般情况下，由不完全市场只能达到约束最优，但在一定条件下，无约束最优也是可以企及的。

定义 11.3 给定参与者的禀赋和偏好，$\left\{e_k,(u_{k,0},u_{k,1}),\forall k\right\}$，如果通过一个证券市场 X 可以获得所有的 Pareto 最优配置，那么称它为 **effectively complete**。

随之，我们可以得到下面的定理：

定理 11.2 如果证券市场是实质完全的，那么均衡配置是 Pareto 最优的。

当市场结构、参与者的禀赋和偏好满足一定条件时，我们会发现市场实质完全的情形。我们感兴趣的是证券市场经济的情形。在这种情形下，可以把参与者的禀赋看成是在零时，禀赋 $e_{k,0}$ 加上交易证券的组合 $\overline{\theta}_k$ 。

我们考虑两种情形的证券市场经济，其中市场都是实质完全的。在第一种情形下，市场具有特殊的结构，而在第二种情形下，参与者的偏好满足特定条件。

A 以总禀赋为标的的期权

记参与者 k 的初始禀赋为 N_p 只可交易证券的组合 θ_k。把所有参与者持有的组合加总即得到市场组合 θ_M。记市场组合的支付为 $X_M = X\theta_M$，那么

$$X_M = X\sum_k \theta_k = \sum_k X\theta_k = \sum_k e_{k,1}$$

因此，X_M 也表示 1 期的总禀赋，等于 1 期的总消费。

假设 X_M 取 N_d 个不同的值：$X_{1,M} < \cdots < X_{N_d,M}$。我们现在假设有 $N_d - 1$ 只以市场组合为标的的期权，执行价格分别为 $X_{1,M},\cdots,X_{N_d-1,M}$。因此，市场中有 $N_p + N_d - 1$ 只证券。N_p 只原生证券和 $N_d - 1$ 只以市场组合为标的、执行价格齐备的期权。

需要指出的是，这个市场结构与我们在第 5 章中讨论的用期权来完全化市场的情形不一样，在那里我们假设存在状态指数证券从而引入以此为标的资产的期权。一般地，状态指数证券有Ω个不同的支付值，因此，我们允许有$\Omega-1$份期权。再加上状态指数证券本身，总共有Ω只证券。而这里，我们可以有以市场组合为标的的期权，而市场组合有N_d个可能的支付值。一般来讲，$N_d \leq \Omega$且N_d可能远小于Ω。如果只有以市场组合为标的的期权，总证券数可能要小于Ω从而市场一般是不完全的。然而，在一个证券市场经济中，这就足够构成实质完全化的市场。

定理 11.3 在证券市场经济中，如果证券市场包括以市场组合为标的且执行价格齐备的期权，那么市场是实质完全的。

证明：

B HARA 效用函数

我们现在考虑当参与者的效用函数满足一定条件时证券市场变成实质完全的情形。

定理 11.4 在一个证券市场经济中，如果存在无风险证券且所有参与者具有如下形式的 HARA 效用函数：

$$\forall k : u'_{k,1}(c) = \rho_k (d_k + c/\gamma)^{-\gamma} > 0$$

其中，$\rho_k > 0, \gamma > -1$，那么市场是实质完全的。

Chapter 12 Mean-Variance Analysis

Solving market equilibrium and pricing asset under general preference and distributional assumptions are no easy task. We now consider further assumptions on preferences and / or return distributions in order to obtain more concrete results on asset pricing. 下面我们考虑，参与者的偏好只取决于未来财富分布的两个特性即均值和方差，而与分布的其他特性无关，这类偏好也叫做 mean-variance preference。

$$\tilde{x} = 1 + \tilde{r}, z = \frac{a}{w}, \tilde{z} = z^T \tilde{x} \Rightarrow \tilde{w} = w\tilde{z} = wz^T \tilde{x} = a^T \tilde{x} = a^T (1 + \tilde{r})$$

期望收益为 $z^T \overline{x}$，方差为 $z^T \Sigma z, \Sigma = \left(\mathrm{cov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)\right)_{ij}$。对偏好作假设：$u$，对支付作假设：$\tilde{x}$。

考虑效用函数，预期收益的贡献应为“＋”，风险的贡献应为“－”，效用函数写为

$$u = z^T \tilde{x} - \frac{1}{2} a z^T \Sigma z$$

12.1 Mean-Variance Preference

我们再次从参与者的消费/组合选择问题开始。设市场上共有 N 只交易证券，支付矩阵为 X。不失一般性，假设 X 的秩为 N。我们把参与者的消费/储蓄决策当作是给定的，而只考虑他们的组合选择。简单起见，我们假设所有参与者的 1 期禀赋都是市场化的，即 $e_{k,1} \in M$ 。因此，我们考虑的是一个证券市场经济，而最优组合选择问题如（8.8）式 $v(w) = \max_{(\theta, S^T\theta = w)} E[u(\tilde{X}\theta)]$ 所述。一般而言，期望效用 $E[u(\tilde{w})]$ 依赖于 $\tilde{w}$ 的整个分布，under some regularity conditions, we can write

$$u(\tilde{w}) = u(E[\tilde{w}] + \tilde{w} - E[\tilde{w}]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}(E[\tilde{w}])(\tilde{w} - E[\tilde{w}])^n$$

$$= u(E[\tilde{w}]) + u'(E[\tilde{w}])(\tilde{w} - E[\tilde{w}]) + \frac{1}{2} u''(E[\tilde{w}])(\tilde{w} - E[\tilde{w}])^2 + R_3$$

$$R_3 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}(E[\tilde{w}])(\tilde{w} - E[\tilde{w}])^n$$

Expected utility

$$E\left[u(\tilde{w})\right] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}u^{(n)}(E[\tilde{w}])(\tilde{w}-E[\tilde{w}])^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}u^{(n)}(E[\tilde{w}])E(\tilde{w}-E[\tilde{w}])^n$$

$$= u(E[\tilde{w}]) + \frac{1}{2}u''(E[\tilde{w}])\sigma^2(\tilde{w}) + E(R_3)$$

$$E(R_3) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}u^{(n)}(E[\tilde{w}])E(\tilde{w}-E[\tilde{w}])^n$$

Note that $E(\tilde{w}-E[\tilde{w}])^n$ is the n-th central moment of $\tilde{w}$. In this representation, the preferences over the distribution of terminal wealth is expressed as preferences over all the moments of $\tilde{w}$. If the preferences over the whole distribution can be represented as preferences over only finite number of moments of $\tilde{w}$，则其性质和相应的组合选择就会大大简化。Since the first two moments, the mean and the variance, are the most often used ones in characterizing return distributions, we are particularly interested in the case

$$E\left[u(\tilde{w})\right]=v(E[\tilde{w}],\sigma[\tilde{w}]) \tag{12.1}$$

在这种情况下，我们说参与者的偏好有 mean-variance representation 或参与者有 mean-variance preference.

显然，(12.1)式只在$u(\cdot)$和/或$\tilde{w}$的分布满足某些特定条件时才成立。给定$\tilde{w}=\tilde{X}\theta$，$\tilde{w}$分布上的限制条件意味着$\tilde{X}$分布上的限制条件。下面我们考虑两个这类条件作为例子。简单起见，令$\bar{w}=E[\tilde{w}],\sigma_w=\sigma[\tilde{w}]$。

定理 12.1 If $u(\cdot)$ is quadratic, then $E[u(\tilde{w})] = v(\bar{w}, \sigma_w)$.

Proof: If $u(\cdot)$ is quadratic, then $u(w) = w - \frac{1}{2}aw^2$, where a>0.Thus,

$$E[\tilde{w} - \frac{1}{2}a\tilde{w}^2] = E[\tilde{w}] - \frac{1}{2}aE[\tilde{w}^2] = E[\tilde{w}] - \frac{1}{2}a\left[\left(E[\tilde{w}]\right)^2 + Var[\tilde{w}]\right] = \left(1 - \frac{1}{2}a\bar{w}\right)\bar{w} - \frac{1}{2}a\sigma_w^2 = v(\bar{w}, \sigma_w)$$

For $a > 0$, $\frac{\partial v}{\partial \bar{w}} = 1 - a\bar{w}$ which is positive if $a\bar{w} < 1$ and $\frac{\partial v}{\partial \sigma_w} = -a\sigma_w < 0$.（The condition that $a\bar{w} \le 1$ is needed to guarantee non-satiability. This then implies that $a\bar{w} \le 1$）. And

$\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{w}^2} = -a < 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \sigma_w^2} = -a < 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{w}\partial \sigma_w} = 0$. So v is concave on $\bar{w}$ and σ_w.

在上述情形中，我们对效用函数的形式作出了很强的限制而没有对支付的分布作出限制。下述情形则正相反，即只对支付的分布作出限制。

定理 **12.2** If returns are jointly normally distributed, then $E[u(\bar{w})] = v(\bar{w}, \sigma_w)$

Proof: Define $\tilde{e} = (\tilde{w} - \bar{w}) / \sigma_w$. Then $\tilde{e} \sim_d N(0,1)$ is a standard normal random variable and $\tilde{w} = \bar{w} + \sigma_w \tilde{e}$. Since the distribution belongs to a two parameter class (mean and variance), we have $E[u(\tilde{w})] = v(\bar{w}, \sigma_w)$.

Furthermore, we want the derived utility function $v(\cdot,\cdot)$ to have the "right" derivatives.

定理 **12.3** If returns are jointly normally distributed, $u'>0, u''<0$, then

1． $\partial_1 v = \dfrac{\partial v}{\partial \overline{w}} = E[u'(\overline{w}+\sigma_w \tilde{e})] > 0$

since $u'(\cdot)>0$ （"increasing utility w.r.t. mean"）

2． $\partial_{11}^2 v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial \overline{w}^2} = E[u''(\overline{w}+\sigma_w \tilde{e})] < 0$

因此 $u''(\cdot)<0$ （"decreasing marginal utility w.r.t. mean"）

3． $$\begin{aligned}\partial_2 v = \frac{\partial v}{\partial \sigma_w} &= E[u'(\overline{w}+\sigma_w \tilde{e})\tilde{e}] = E[u'(\overline{w}+\sigma_w \tilde{e})]\cdot E[\tilde{e}] + Cov[u'(\overline{w}+\sigma_w \tilde{e}), \tilde{e}] \\ &= E[u'(\overline{w}+\sigma_w \tilde{e})]\cdot 0 + Cov[u'(\overline{w}+\sigma_w \tilde{e}), \tilde{e}] = Cov[u'(\overline{w}+\sigma_w \tilde{e}), \tilde{e}] < 0\end{aligned}$$

$\tilde{e}\uparrow \rightarrow (\overline{w}+\sigma_w \tilde{e})\uparrow \rightarrow u'(\overline{w}+\sigma_w \tilde{e})\downarrow \rightarrow Cov[u'(\overline{w}+\sigma_w \tilde{e}), \tilde{e}]\downarrow$（风险大，效用低）

4. $\partial_{22}^2 v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial \sigma_w^2} = E[u''(\bar{w}+\sigma_w \tilde{e})\tilde{e}^2] < 0$

（风险厌恶程度别太大）

5. $\partial_{12}^2 v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial \bar{w} \partial \sigma_w} = E[u''(\bar{w}+\sigma_W \tilde{e})\tilde{e}]$

（交叉性质）which can be either positive or negative. If, however, $u(\cdot)$ exhibits DARA, then it will be non-negative.

6. Now, let us consider

$$(\partial_{11}^2 v)(\partial_{22}^2 v) - (\partial_{12}^2 v)^2 = E[u''(\tilde{w})]E[u''(\tilde{w})\tilde{e}^2] - (E[u''(\tilde{w})\tilde{e}])^2$$

Note that $E[\tilde{x}^2]E[\tilde{y}^2] \geq (E[\tilde{x}\tilde{y}])^2$ （Cauchy-Schwartz inequality. If we let $\tilde{x}^2 = -u''(\tilde{w})$， $\tilde{y}^2 = -u''(\tilde{w})\tilde{e}^2$, then $(\partial_{11}^2 v)(\partial_{22}^2 v) - (\partial_{12}^2 v)^2 \geq 0$ ）. Thus, $v(\bar{w}, \sigma_w)$ is concave.

Therefore, the preferences over the distribution of wealth can be expressed as preferences over its first two moments when returns are normally distributed. Furthermore, the derived utility function over the two moments exhibits nice properties.

12.2 Mean-Variance Efficient Portfolios

现在我们考虑参与者具有均值－方差偏好时的组合选择问题。记

- 证券收益向量： $\tilde{r} = [\tilde{r}_1; \cdots; \tilde{r}_N]$
- 平均收益： $\bar{r} = E[\tilde{r}] \neq 0$
- 收益的协方差矩阵： $\Sigma = E[(\tilde{r} - \bar{r})(\tilde{r} - \bar{r})^T]$
- 投资组合的权重向量： $z = [z_1; \cdots; z_N], z^T \iota = 1$
- 投资组合的收益率： $\tilde{r}_z = z^T \tilde{r}$
- 投资组合的期望收益率： $\bar{r}_z = E[\tilde{r}_z] = z^T \bar{r}$
- 投资组合的方差： $\sigma_z^2 = z^T \Sigma z$

- 总投资量：w
- 1 期支付：$\tilde{w} = w(1+\tilde{r}_z)$
- 1 期支付的均值：$\overline{w} = E[\tilde{w}] = w(1+\overline{r}_z)$
- 1 期支付的方差：$Var(\tilde{w}) = w^2\sigma_z^2$

给定 w，如果参与者具有均值一方差偏好，那么他们只关心组合收益率的均值和方差。

我们考虑这样的组合：它达到给定的期望收益率而方差最小，我们将求得这类组合的问题表述如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} z^T \sum z \\ \text{s.t.} \quad & z^T \overline{r} = \overline{r}_p \\ & z^T \iota = 1 \end{aligned} \qquad （12.2）$$

式（12.2）给出的组合叫做 **mean-variance *frontier portfolio***.

在这一节中，我们假设所有 N 只证券都是风险证券且它们的收益率不是线性相关的。因此，$\mathbf{\Sigma}$ 是严格正定的（保证二阶条件自然满足）。含有约束条件的拉格朗日方程：

$$L = \frac{1}{2} z^T \sum z - \lambda_r (z^T \overline{r} - \overline{r}_p) - \lambda_1 (z^T \iota - 1)$$

The F.O.C. is

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \sum z - \lambda_r \overline{r} - \lambda_1 \iota = 0 \text{（}n\text{ 个方程）}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_r} = \overline{r}_p - z^T \overline{r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 1 - z^T \iota = 0$$

第一个方程可写为$\sum z=\lambda_r\overline{r}+\lambda_1\iota$，得$z=\sum^{-1}(\lambda_r\overline{r}+\lambda_1\iota)=\lambda_r\sum^{-1}\overline{r}+\lambda_1\sum^{-1}\iota$，代入到约束条件中：

（1）$(\lambda_r\overline{r}^T+\lambda_1\iota^T)\sum^{-1}\overline{r}=\overline{r}_p\Leftrightarrow\lambda_r\underbrace{(\overline{r}^T\sum^{-1}\overline{r})}_{b}+\lambda_1\underbrace{(\iota^T\sum^{-1}\overline{r})}_{a}=\overline{r}_p$

（2）$(\lambda_r\overline{r}^T+\lambda_1\iota^T)\sum^{-1}\iota=1\Leftrightarrow\lambda_r\underbrace{(\overline{r}^T\sum^{-1}\iota)}_{a^T}+\lambda_1\underbrace{(\iota^T\sum^{-1}\iota)}_{c}=1$

令，

$$\begin{aligned}&a=\iota^T\sum^{-1}\overline{r}>0,\ b=\overline{r}^T\sum^{-1}\overline{r}>0\\&c=\iota^T\sum^{-1}\iota>0,\ \ d=bc-a^2\geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_r=d^{-1}(c\overline{r}_p-a)\\&\lambda_1=d^{-1}(b-a\overline{r}_p)\\&z=\sum^{-1}(\lambda_r\overline{r}+\lambda_1\iota)=d^{-1}\sum^{-1}[(c\overline{r}_p-a)\overline{r}+(b-a\overline{r}_p)\iota]\\&=\underbrace{d^{-1}(b\sum^{-1}\iota-a\sum^{-1}\overline{r})}_{z_0}+\underbrace{d^{-1}(c\sum^{-1}\overline{r}-a\sum^{-1}\iota)}_{z_1-z_0}\overline{r}_p\end{aligned}\tag{12.3}$$

对于每一个$\overline{r}_p$，存在唯一的前沿组合，它由（12.3）式给定。让$\overline{r}_p$取不同的值，我们就得到前沿组合的完全集合，称作 **mean-variance frontier**, **MVF**.

由前沿组合的来源，我们立即得出下面的结论：

定理 12.4 任何一个有均值－方差偏好的参与者的最优组合是一个均值－方差前沿组合。

12.3 Properties of M-V Frontier Portfolio

From (12.3), a MVF portfolio with $\bar{r}_p$ can be expressed as

$$z_p = z_0 + \bar{r}_p (z_1 - z_0) = (1 - \bar{r}_p) z_0 + \bar{r}_p z_1 \qquad (12.4)$$

where

$$z_0 = d^{-1}(b \Sigma^{-1} \iota - a \Sigma^{-1} \bar{r})$$
$$z_1 - z_0 = d^{-1}(c \Sigma^{-1} \bar{r} - a \Sigma^{-1} \iota)$$

Let $\bar{r}_p = 0$, then $z_p = z_0$. Thus, z_0 is a MVF portfolio with zero expected return. Let $\bar{r}_p = 1$, then $z_p = z_1$. Thus, z_1 is a MVF portfolio with $\bar{r}_p = 1$.

定理 12.5 Any MVF portfolio can be generated by the two MVF portfolios, z_0 and z_1.

证明：选择α使得$\alpha z_0 + (1-\alpha) z_1 = z_0 + \bar{r}_p (z_1 - z_0) = z_p$，即$\alpha = 1 - \bar{r}_p$。

推论 12.1 均值—方差前沿可由任意两个不同的 MVF 组合而成。

推论 12.2 Any portfolio of MVF is a MVF portfolio.

推论 12.1 意味着在均值—方差偏好下两基金分离成立，而第 9 章中的定理 9.6 则是它的一个特例。

定理 12.6 在均值—方差偏好下两基金分离成立。

给定市场中含有 N 只风险证券，组合 z 是 R^N 中满足 $z^T\iota=1$ 的一个点。组合的集合 $Z=\left\{z\in \mathrm{R}^N : z^T\iota=1\right\}$ 是 R^N 中的一个$(N-1)$维的超平面。前沿组合只是 Z 的一个子集，记做 Z_{MVF}。显然。由（12.4）式，Z_{MVF} 位于 R^N 中连接 z_0 和 z_1 的直线上。

定理 12.7 均值—方差前沿组合 Z_{MVF} 位于 R^N 中的一条直线上。

在均值一方差框架下，证券或证券组合可由其收益率的两个属性即期望收益率和度量收益率风险的方差或波动率表示。考虑期望收益率为$\bar{r}_p$的 MVF 组合 p。由（12.4）式，$z_p = z_0 + \bar{r}_p(z_1 - z_0)$且收益率的方差为

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= [z_0 + \bar{r}_p(z_1 - z_0)]^T \Sigma [z_0 + \bar{r}_p(z_1 - z_0)] \\ \sigma_p &= \sqrt{z_0{}^T \Sigma z_0 + 2 z_0{}^T \Sigma (z_1 - z_0)\bar{r}_p + (z_1 - z_0)^T \Sigma (z_1 - z_0)\bar{r}_p{}^2}\end{aligned} \tag{12.5}$$

因此，在$\bar{r}-\sigma$平面上，MVF 是一条双曲线。

由图 12.1 可以看到，在$\bar{r}-\sigma$平面上，MVF 的上半部分在均值一方差意义上占优于前沿的下半部分。位于前沿的上半部分的组合（包括 MVP）也叫做 mean-variance efficient portfolios，MVE 组合。MVF 的顶点代表 minimum variance portfolio, MVP:

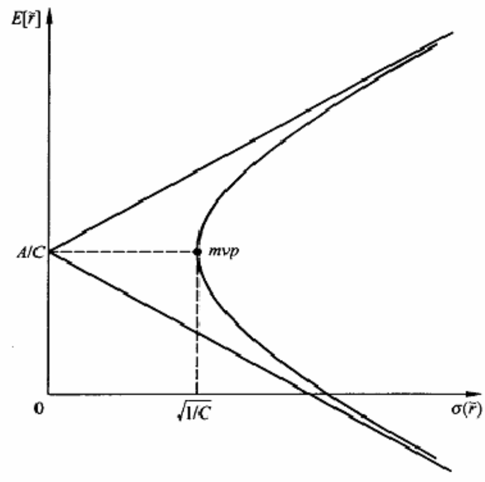


图 3.11.1 在$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$空间中的资产组合前沿

$$\frac{1}{2}\partial\sigma_p^2/\partial\bar{r}_p = 0$$

可得

$$\begin{aligned}
&(z_1 - z_0)^T \Sigma z_0 + (z_1 - z_0)^T \Sigma \bar{r}_{mvp}(z_1 - z_0) \\
&= (z_1 - z_0)^T \Sigma(z_0 + \bar{r}_{mvp}(z_1 - z_0)) \\
&= (z_1 - z_0)^T \Sigma z_{mvp} = 0
\end{aligned}$$

因此，**MVP 的充要条件是**

$$(z_1 - z_0)^T \Sigma z_{mvp} = 0$$

由此得到

$$\bar{r}_{mvp} = -\frac{(z_1 - z_0)^T \Sigma z_0}{(z_1 - z_0)^T \Sigma(z_1 - z_0)}, \sigma_{mvp}^2 = z_0{}^T \Sigma z_0 - \frac{\left[(z_1 - z_0)^T \Sigma z_0\right]^2}{(z_1 - z_0)^T \Sigma(z_1 - z_0)}$$

MVP 的期望收益率也就是a/c。

MVP 具有如下性质：

定理 12.8 For **any portfolio** p, $Cov[\tilde{r}_p, \tilde{r}_{mvp}] = \sigma^2_{mvp}$

Proof: Consider a portfolio consisting of MVP and p: $\alpha \tilde{r}_p + (1-\alpha)\tilde{r}_{mvp}$. There must be

$$
\begin{aligned}
0 &= \text{Argmin } Var[\alpha \tilde{r}_p + (1-\alpha)\tilde{r}_{mvp}] \\
&= \text{Argmin } \alpha^2 Var[\tilde{r}_p] + (1-\alpha)^2 Var[\tilde{r}_{mvp}] + 2\alpha(1-\alpha) Cov[\tilde{r}_p, \tilde{r}_{mvp}]
\end{aligned}
$$

F.O.C. reads：

$$\alpha Var[\tilde{r}_p] - (1-\alpha) Var[\tilde{r}_{mvp}] + (1-2\alpha) Cov[\tilde{r}_p, \tilde{r}_{mvp}] = 0$$

$\alpha = 0$ is the solution $\Leftrightarrow Var[\tilde{r}_{mvp}] = Cov[\tilde{r}_p, \tilde{r}_{mvp}]$.

定理 12.9 对于任意MVF组合p（≠MVP），存在一个MVF组合zcp使得$Cov[\tilde{r}_p, \tilde{r}_{zcp}] = 0$

证明：对于任意两个MVF组合p和q，我们有

$$Cov[\tilde{r}_p, \tilde{r}_q] = z_p^T \sum z_q = [(1-\tilde{r}_p)z_0 + \tilde{r}_p z_1]^T \Sigma[(1-\tilde{r}_q)z_0 + \tilde{r}_q z_1]$$

给定 p，当且仅当

$$\tilde{r}_q = -\frac{z_0^T \sum z_p}{(z_1 - z_0)^T \Sigma z_p}$$

时，$Cov[\tilde{r}_p, \tilde{r}_{zcp}] = 0$。这里我们利用了条件$z_p \neq z_{mvp}$，即$(z_1 - z_0)^T \Sigma z_p \neq 0$

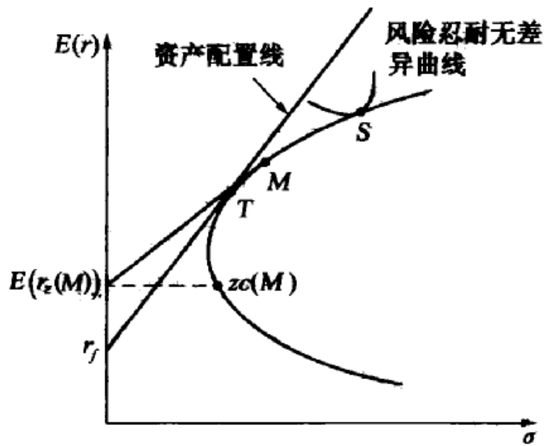
从几何上讲，zcp 的位置可以确定如下：在$\bar{r} - \sigma$平面上，经过与任何前沿组合（除了 MVP 以外）相对应的点，与前沿相切的直线在期望收益率坐标轴上的截距等于$E[\tilde{r}_{zcp}]$。

现在我们来考虑 MVF 组合和其他组合（或证券）之间的关系。

定理 12.10 令 p 为 MVF 组合。对于任意组合 q，我们有

$$\bar{r}_q - \bar{r}_{zcp} = \beta_{p,q}(\bar{r}_p - \bar{r}_{zcp}) \tag{12.6}$$

其中，$\beta_{p,q} \equiv Cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p]/\sigma_p^2$ 是组合 q 对应于组合 p 的 β 值，而 zcp 是与组合 p 的协方差为 0 的 MVF 组合。



12.4 The Case with Risk-free Asset

For the N assets we considered above, then were all risky （Σ is strictly positive definite）. Let us now assume that in addition to those N risky assets, there is a risk-free asset with rate of return r_F. Also define $\tilde{\eta} = \tilde{r} - r_F \iota$ and $\bar{\eta} = \bar{r} - r_F \iota$. Let z now be the vector of portfolio weights in risky asset and $1 - z^T \iota$ be the portfolio weight in the risk-free asset. 若$1 - z^T \iota = 0$，即为风险资产组合；若$1 - z^T \iota = 1$，即为无风险资产。Then

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= w(1 + r_F) + \sum_n a_n (\tilde{r}_n - r_F) \\ &= w\left[z^T (1 + \tilde{r}) + (1 - z^T \iota)(1 + r_F) \right] \\ &= w\left[(1 + r_F) + z^T (\tilde{r} - r_F \iota) \right] \\ &= w[(1 + r_F) + z^T \tilde{\eta}] \end{aligned}.$$

A 存在无风险证券时的 MVF

The MVF portfolios are now defined by

$$z_p = \text{Argmin} \ \frac{1}{2} z^T \sum z$$
$$\text{s.t.} \quad z^T \overline{\eta} = \overline{\eta}_p$$

Here, $\overline{\eta}_p$ is the expected excess return on *p*. The Lagrangian is then

$$L = \frac{1}{2} z^T \sum z + \lambda \left[\overline{\eta}_p - z^T \overline{\eta} \right]$$

The F.O.C.:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \sum z - \lambda \overline{\eta} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \overline{\eta}_p - z^T \overline{\eta} = 0$$

This has the solution:

$$z_p = \frac{\bar{\eta}_p}{\bar{\eta}^T \Sigma^{-1} \bar{\eta}} \Sigma^{-1} \bar{\eta} \tag{12.7}$$

where we assume that $\bar{\eta}^T \Sigma^{-1} \bar{\eta} > 0$.

当 $\bar{\eta}_p$ 取不同的值时，我们由（12.7）式就得到了存在无风险证券时的均值一方差前沿组合。

对于 $\bar{\eta}_p = 0, z_p = 0$，这也就是无风险资产。对于 $\bar{\eta}_p = (\bar{\eta}^T \Sigma^{-1} \bar{\eta}) / (\iota^T \Sigma^{-1} \bar{\eta}) \equiv \bar{\eta}_T$，我们有 $\iota^T z_p = 1$。也就是说，**这个 MVF 组合只包含风险证券**，我们称之为 tangent portfolio，记做 z_T。那么

$$z_T = \frac{1}{\iota^T \Sigma^{-1} \bar{\eta}} \Sigma^{-1} \bar{\eta}$$

对于任意 MVF 组合（存在无风险资产时的 MVF 组合）$z_p, a_p \equiv \iota^T z_p \neq 1$，因而它在风险证券中的总权重不等于 1。由（12.7）式，$a_p = \bar{\eta}_p(\iota^T \Sigma^{-1} \bar{\eta}) / (\bar{\eta}^T \Sigma^{-1} \bar{\eta}) = \bar{\eta}_p / \bar{\eta}_T$。因此，

$$z_p = a_p z_T$$

也就是说，任意 MVF 组合是无风险证券和切点组合 z_T 的线性组合。

定理 12.11 当存在无风险证券时，MVF 可由无风险证券和切点组合而成。

B Sharpe 比

上述结论也可由更直观的方法推得。考虑一个组合，它在风险证券上的权重向量为 z。令 $a=\iota^T z$ 为它在所有风险证券上的总权重，则 1－a 为它在无风险证券上的权重。定义 $q=(1/a)z$ 为一个完全由风险证券构成的组合，则 $\iota^T q=1$，因此任意一个由无风险证券和 N 个风险证券构成的组合 z，也可以等价地表示成由无风险证券和一只由风险证券构成的组合 q 组合而成：

$$\begin{bmatrix} 1-\iota^T z \\ z \end{bmatrix} = (1-a)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a \\ aq=z \end{bmatrix} \tag{12.8}$$

这个组合的期望收益率为 $a\bar{r}_q+(1-a)r_F$，标准差为 $a\sigma_q$，其中，$\bar{r}_q,\sigma_q$ 分别为风险证券组合 q 的期望收益率和标准差。

如图 12.2 所示，在$\bar{r}-\sigma$平面上，这个组合在连接无风险证券和风险证券组合 q 的直线上。

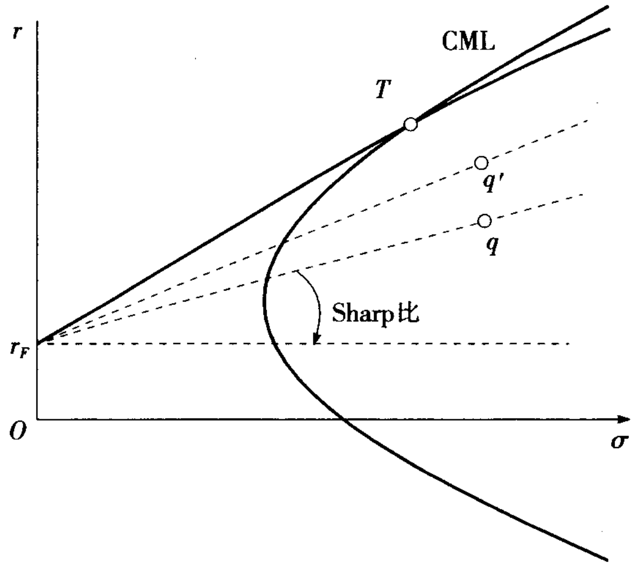


图 12.2　存在无风险证券时的均值—方差前沿组合

我们发现，只有当组合 q 位于双曲线上（组合 T），它与无风险证券构成的组合才是最优的。组合 T 被称为切点组合，由它和无风险证券构成的组合就是由无风险证券和 N 个风险证券构成的组合前沿（MVF）。

定理 12.12 当 $r_F < \overline{r}_{mvp}$ 时，切点组合是一个 MVE 组合。

存在无风险证券时，前沿组合都在 $\overline{r}-\sigma$ 平面的一条直线上，这条直线也称为**资本市场线**（capital market line，CML）。所有具有均值－方差偏好的参与者的组合选择都来自于 CML。

对于任意一个由无风险证券和风险证券组合 q 构成的组合 z，若用其收益率的标准差作为其风险的测度，其期望收益率与无风险利率之差为它的风险溢价，则单位风险所带来的风险溢价被称为 Sharpe ratio：

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{a\bar{r}_q + (1-a)r_F - r_F}{a\sigma_q} = \frac{a(\bar{r}_q - r_F)}{a\sigma_q} = \frac{\bar{r}_q - r_F}{\sigma_q}$$

（1）由无风险证券和风险组合 q 构成的组合与 q 具有相同的 Sharpe ratio，原因是：当我们增加在风险组合 q 上的权重时，得到的风险溢价和风险同时线性增加，而比值不变，为 q 的 Sharpe ratio。

（2）切点组合 T 在所有的风险证券组合中 Sharpe ratio 最高，即

$$\max \text{Sharpe ratio} = \frac{\bar{r}_T - r_T}{\sigma_T}$$

因此我们说，在均值一方差偏好下并存在无风险证券时，参与者希望选择 Sharpe ratio 最高的组合，因为它带来的单位风险溢价最高。而切点组合正是所有风险组合中 Sharpe ratio 最高的组合。

C 风险证券和切点组合之间的关系

现在市场中共有 $N+1$ 只证券，其中 N 只是风险证券。一个风险组合可以用 R^N 中的一个点表示，每一个坐标对应于一只风险证券上的组合权重。原点代表无风险证券（组合）。而 z_T 是只包含风险证券的 MVF 组合（即切点组合）。（12.8）式表示 MVF 组合位于连接原点和 z_T 的直线上。

定理 12.13 存在无风险证券时，如果 p 是一个 MVE 组合，那么对于任意组合 q，我们有

$$\overline{r}_q - r_F = \beta_{q,p}(\overline{r}_p - r_F), \beta_{q,p} = Cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p]/Var[\tilde{r}_p] \qquad (12.9)$$

证明：略

如果我们选择切点组合作为 p，（12.9）式就变为

$$\overline{r}_q - r_F = \beta_{q,T}(\overline{r}_T - r_F) \tag{12.10}$$

（12.10）式有一个很直观的经济解释：在均值－方差世界中，参与者只持有均值－方差有效组合，也就是持有无风险证券和切点组合的组合。现在，证券的风险由它对切点组合风险的贡献大小来度量——证券对切点组合的 β，最优性要求证券的风险溢价等于证券的风险与每单位风险"价格"的乘积，其中风险由证券的 β 度量，而"价格"即为切点组合的风险溢价（即单位风险溢价 $\overline{r}_T - r_F$），而切点组合的 β 值等于 1。

Chapter 13 The Capital Asset Pricing Model (CAPM)

13.1 Market Portfolio

第 12 章关注的是参与者对资产的需求，现在我们开始考虑资产的供给。如果我们把在市场上交易的证券，包括公司发行的所有股票和债券等进行加总，我们就得到资产的总供给。这个资产的总集合本身就是一个组合，即 market portfolio。在一个证券经济中，市场组合也代表了经济体未来禀赋的加总。

令 $\bar{\theta}_n$ 为资产 n 的发行总量或总股数（$n=1,\cdots,N$），则可以把市场组合写为

$$\theta_M = [\bar{\theta}_1;\cdots;\bar{\theta}_N] \tag{13.1}$$

（13.1）式用证券的总股数定义了市场组合。我们也可以用各证券的相对价值权重来定义它。记 $P=[P_1;\cdots;P_N]$ 为所有交易证券的价格向量。

证券 n 的总价值是 $v_n = P_n\bar{\theta}_n$，也叫做证券 n 的 market value 或 market capitalization。市场组合的总市值是 $v_M = P^T\theta_M = \sum_n v_n$。证券 n 在市场组合中的相对市值权重为 $z_{M,n} = v_n / v_M = P_n\bar{\theta}_n / (P^T\theta_M)$。因此，用组合权重表示的市场组合为

$$z_M \equiv \left[\frac{P_1\bar{\theta}_1}{v_M};\cdots;\frac{P_N\bar{\theta}_N}{v_M}\right] \tag{13.2}$$

13.2 Market Equilibrium

给定参与者对资产的需求和资产的供给之后，我们就可以考虑 market equilibrium。为简单起见，我们首先假设存在无风险证券，然后再回到不存在无风险证券的情形。

存在无风险证券的时候，每一个参与者对风险资产的需求都是切点组合的形式，只是需求量可能会不一样而已。结果，他们对风险资产的总需求也就是切点组合（不同量的相同组合相加仍得到同一组合）。市场均衡要求资产的总需求等于总供给，也就是市场组合。我们可以立即得到，在市场均衡的条件下，切点组合就是市场组合。

定理 13.1 在均值－方差偏好下，市场达到均衡时，市场组合就是切点组合。

证明：参与者 k 持有切点组合和无风险资产。令 a_k 为他对切点组合的需求量（价值）。他对无风险资产的投资量就是 $w_k - a_k$，其中 w_k 是参与者 k 用于投资的总财富。

风险资产的市场出清要求为

$$\sum_k a_k z_T = \underbrace{(\sum_k a_k) z_T}_{Total\ Demand} = \underbrace{v_M z_M}_{Total\ Supply}$$

无风险资产的市场出清要求

$$\sum_k (w_k - a_k) = 0\text{，或}$$

$$\sum_k a_k = \sum_k w_k = v_M$$

其中，最后一个等式是由于**经济整体投资的总财富等于所有资产的总市值**。因此，

$$z_T = z_M$$

定理 13.1 对于参与者的投资行为和资产的定价关系给出了非常具体的推论。第一，它指出市场组合 z_M 是一个 MVE 组合。市场组合是每个参与者能够直接观察到的，不依赖于任何关于资产收益的信息，这有极大的实用价值。第二，所有投资者的最优投资选择就是无风险资产和市场组合的组合。第三，它确定了一个简单的资产定价关系。

13.3 CAPM 给出的资产定价关系

给定市场组合就是切点组合，它是均值一方差有效的，由（12.10）式我们立即得出下面的结论：

定理 13.2 The market portfolio is a MVE portfolio and for any portfolio *n*,

$$\bar{r}_n - r_F = \beta_{n,M}(\bar{r}_M - r_F) \qquad (13.3)$$

where $\beta_{n,M} = Cov[\tilde{r}_n, \tilde{r}_M]/Var[\tilde{r}_M]$是证券$n$的市场$\beta$值。

证明：现有某个组合 P，我们看看风险资产 n（$n = 2, \cdots, N$）对组合 P 的贡献，贡献从两个角度看：收益和风险。

$$\tilde{r}_P = z^T\tilde{r} = (1-\sum_{n=2}^{N} z_n)r_F + \sum_{n=2}^{N} z_n\tilde{r}_n, \bar{r}_P = (1-\sum_{n=2}^{N} z_n)r_F + \sum_{n=2}^{N} z_n\bar{r}_n$$

$$\frac{\partial \bar{r}_P}{\partial z_n} = \bar{r}_n - r_F$$

$$\sigma_P^2 = z^T\Sigma z = \sum_n\sum_m z_m z_n \sigma_{mn} = \sum_{m=n} z_n^2\sigma_n^2 + \sum\sum_{m\neq n} z_m z_n \sigma_{mn}$$

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial z_n} = 2z_n\sigma_n^2 + 2\sum_{\substack{m\neq n\\ m=2}}^{N} z_m\sigma_{mn} = 2Cov(\tilde{r}_n,\tilde{r}_P) = 2\sigma_P\frac{\partial \sigma_P}{\partial z_n}$$

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial z_n} = \frac{Cov(\tilde{r}_n,\tilde{r}_P)}{\sigma_P}$$

注意：$Cov(\tilde{r}_n,\tilde{r}_P) = Cov(\tilde{r}_n, z_1 r_F + \sum_{m=2}^{N} z_m\tilde{r}_m) = \sum_{m=2}^{N} z_m Cov(\tilde{r}_n,\tilde{r}_m) = \sum_{m=2}^{N} z_m\sigma_{mn}$。

若 P 是 M（T），则在最优时，单位风险带来的收益对所有风险资产都一样，即为

$$\frac{\partial \bar{r}_M / \partial z_n}{\partial \sigma_M / \partial z_n} = \frac{\bar{r}_n - r_F}{Cov(\tilde{r}_n,\tilde{r}_M)/\sigma_M} = \frac{\bar{r}_M - r_F}{\sigma_M}$$

因此，有

$$\bar{r}_n - r_F = \frac{Cov(\tilde{r}_n, \tilde{r}_M)}{\sigma_M^2}(\bar{r}_M - r_F)$$

定理 13.2 提供了一个简洁而直观的资产定价关系：一个资产的风险溢价与其市场风险成正比，市场风险由市场组合的 β 值——即其市场 β 值来衡量。比例系数是 $\bar{r}_M - r_F$，即市场组合的风险溢价。市场组合的 β 值为 1，它的风险溢价也叫做风险的价格，即单位风险的风险溢价。

由资产定价模型所给出的定价关系（13.3）式可以更明了的由图 13.1 来表述。横轴表示每个资产相对于市场组合的 β 值，纵轴表示它的风险溢价。

由 CAPM 可知，所有资产都应位于通过原点的一条直线上，它的斜率为市场组合的风险溢价。这条直线也称为 Security Market Line，SML。它简单描述了一个证券的风险（尤其是其市场风险）与它的风险溢价之间的关系。

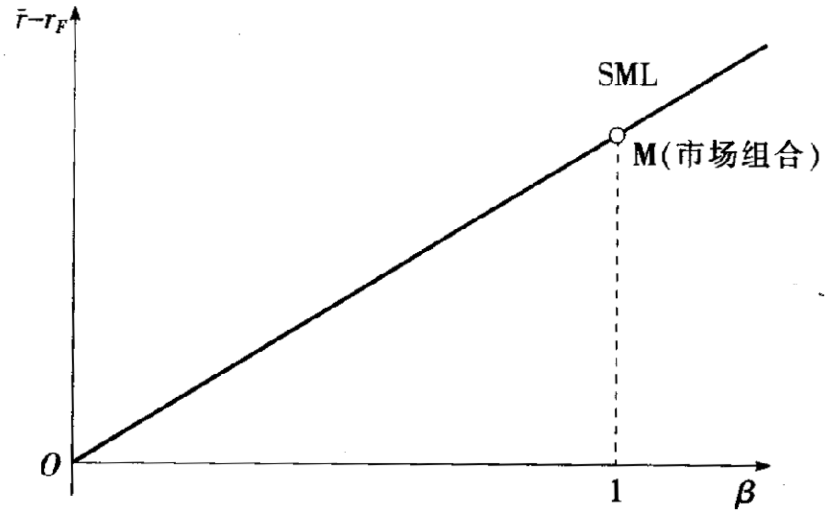


图 13.1　资本资产定价模型（CAPM）

我们注意到，在第 10 章，作为对以消费为基础的资本资产定价模型的一个近似，我们曾得到（13.3）式。这里，在均值－方差偏好下，我们又得到（13.3）式作为严格的均衡定价关系。

资产定价关系（13.3）式是关于资产的期望收益（率）的。观察资产收益的实现值（随机值）可以进一步了解其经济意义。将资产收益对市场收益 $\tilde{r}_M$ 作线性回归可以得到

$$\tilde{r}_n - r_F = \alpha_n + \beta_{n,M}(\tilde{r}_M - r_F) + \tilde{\varepsilon}_n \tag{13.4}$$

其中， $E[\tilde{\varepsilon}_n] = 0$ 且 $Cov[\tilde{r}_M, \tilde{\varepsilon}_n] = 0$ 。（13.4）式只是一个一般性的数学描述，它简单地把资产收益投影到市场收益上并得到一个与市场收益不相关的残差项。它本身并不包含特别的经济意义。但是 CAPM 要求 $\alpha_n = 0$，也就是回归的截矩项必须为 0。这意味着我们可以把资产收益率的风险分解成两个部分：

第一个部分是它所负载的市场风险。由市场组合收益的风险定义，负载的大小由资产的市场 β 值来确定。

第二个部分是 residual risk，即剩下的与市场无关的风险。

市场风险对于所有资产都是一样的，因此，也称作 systematic risk；剩余风险是各个资产所持有的与市场风险无关的风险，因此，也称作 nonsystematic risk。

另外，只有市场风险才有溢价，剩余风险没有溢价。

在均值一方差框架下，收益方差度量了资产的总风险。令 $\sigma_n^2 = Var[\tilde{r}_n]$ 以及 $\sigma_{n,\varepsilon} = Var[\tilde{\varepsilon}_n]$，我们有

$$\sigma_n^2 = \beta_{n,M}^2 \sigma_M^2 + \sigma_{n,\varepsilon}^2$$

也就是说，如果用收益率的方差作为风险的一个简单测度，资产的总风险等于其市场风险和剩余风险之和。市场风险是 $\beta_{n,M}^2 \sigma_M^2$。比率 $\beta_{n,M}^2 \sigma_M^2 / \sigma_n^2$ 给出了总风险中市场风险的相对比例。这个比率也正是 market regression （13.4）式**相应的** R^2 **值**（即拟合优度）。

需要指出的是，资产的风险溢价不仅依赖于它所负载的市场风险的大小，还取决于其负载的方向即符号。正 β 值的资产有正的风险溢价，而绝对值相同的负 β 值却有负的风险溢价。

13.4 不存在无风险资产的 CAPM

在前面的讨论中，我们假设存在无风险资产。在这种情形下，无风险资产和切点组合是两个 MVE 组合，而 MVF 前沿形成了$\bar{r}-\sigma$平面中连接它们的直线。这里，我们考虑不存在无风险资产的情形。

首先，我们注意到市场组合是一个 MVF 组合。因为每一个参与者都持有一个 MVE 组合，即相当于他持有两个 MVF 组合——z_0和z_1的组合。根据式（12.4）我们可以把参与者 k 的组合写成$z_0+\bar{r}_k(z_1-z_0)$，其中，$\bar{r}_k$是组合的期望收益。记w_k为他的总投资额，资产需求就便成了$\sum_k w_k[z_0+\bar{r}_k(z_1-z_0)]$。市场出清条件要求

$$\sum_k w_k[z_0+\bar{r}_k(z_1-z_0)]=z_0\sum_k w_k+\sum_k w_k\bar{r}_k(z_1-z_0)=v_M z_M\text{，}\quad \sum_k w_k=v_M$$

由此得出

$$z_0+[\sum_k (w_k/v_M)\overline{r}_k](z_1-z_0)]=z_M$$

这正是我们要表明的（即市场组合也可以由两个 MVF 组合——z_0 和 z_1 组合而成）。

由定理 12.10（$\overline{r}_q-\overline{r}_{zcp}=\beta_{q,p}(\overline{r}_p-\overline{r}_{zcp})$），我们有

定理 13.3 对于任意组合 q，我们有

$$\overline{r}_q-\overline{r}_{zcm}=\beta_{q,M}(\overline{r}_M-\overline{r}_{zcm}) \tag{13.5}$$

其中，zcm 是与市场组合协方差为 0 的 MVF 组合。

（13.5）式给出了不存在无风险资产时 CAPM 中的定价关系。当存在无风险资产时，它正是 zcm。

13.5 CAPM as an Equilibrium Result

在推导 CAPM 时，我们从均值－方差偏好开始，也就是参与者持有均值－方差有效组合。本章开始时，我们也讨论了将参与者偏好简化成均值－方差偏好时应该对偏好和/或资产支付作出特别限制的例子。这里，我们证明怎样由这些偏好和/或资产假设直接得到 CAPM。

A 二次型效用函数

我们首先考虑参与者至少在 1 期具有二次型效用函数的情形：

$$u_{k,0}(c_{k,0})+u_{k,1}(c_{k,1})=u_{k,0}(c_{k,0})+\frac{a_k}{2}(c_{k,1}-\overline{c}_k)^2, k=1,\cdots,K$$

其中，$a_k>0$ 是参与者 k 的绝对风险厌恶系数。由参与者 k 的组合选择的 Euler 方程（即一阶条件），对于任意证券 q，根据式（8.13）$E[u'_1(\tilde{w})(\tilde{r}_n-r_F)]=0, \forall n$，我们有

$$0 = E[u'_{k,1}(\tilde{c}_{k,1})(\tilde{r}_q - r_F)] = a_k E[(\tilde{c}_{k,1} - \overline{c}_k)(\tilde{r}_q - r_F)]$$

或

$$0 = a_k E[(\tilde{c}_{k,1} - \overline{c}_k)(\tilde{r}_q - r_F)], \forall k$$

这里，为了简单起见，我们假设存在无风险资产。对所有参与者求和，我们有

$$0 = E[(\tilde{C}_1 - \overline{C})(\tilde{r}_q - r_F)]$$

其中，$\tilde{C}_1 = \sum_k \tilde{c}_{k,1}$ 是 1 期的总消费，且 $\overline{C} = \sum_k \overline{c}_k$ 。我们可以把上面的等式重新写成

$$-(E[\tilde{C}_1] - \overline{C})(E[\tilde{r}_q] - r_F) = Cov[\tilde{C}_1, \tilde{r}_q]$$

由市场出清，1 期的总消费必须等于市场组合的总支付。因此，$\tilde{C}_1 = v_M(1 + \tilde{r}_M)$，其中，$v_M$ 是市场组合在 0 期的市值。此时我们有，

$$\bar{r}_q - r_F = \left[-\frac{v_M}{E[\tilde{C}_1] - \bar{C}} \right] Cov[\tilde{r}_M, \tilde{r}_q]$$

如果取 q 为市场组合，我们有

$$\left[-\frac{v_M}{E[\tilde{C}_1] - \bar{C}} \right] = (\bar{r}_M - r_F) / \sigma_M^2$$

将此式带入上面的等式就得到 CAPM 定价公式（13.3）。

B 正态分布的支付

在第 2 章描述的一般框架中，我们再作出如下的额外假设：

首先，证券市场由无风险证券和 N 只风险证券构成。无风险证券在 1 期得到无风险支付 1，风险证券 n 在 1 期得到风险支付 $\tilde{v}_n$（$n = 1, \cdots, N$）。记 $\tilde{v} = [\tilde{v}_1; \cdots; \tilde{v}_N]$ 为风险证券的支付向量。

我们假设$\tilde{v}$是正态分布的（一个N维的正态随机变量），均值为$\bar{v}$而协方差阵为Σ。

其次，假设有 K 个参与者。参与者 k 的初始禀赋是$e_{k,0}$以及风险证券组合$\bar{\theta}_k (k=1,\cdots,K)$。无风险组合的总供给为 0，而风险证券的总供给为

$$\bar{\theta}=\sum_k \bar{\theta}_k$$

这就是市场组合。因为所有参与者的未来禀赋全部来自于他所持有的交易证券的支付，因而这是一个证券市场经济。

第三，为了方便，我们还假设参与者具有定义在 1 期消费上的 CARA（常数绝对风险厌恶）效用函数。

$$u_k(c_{k,0},c_{k,1})=u_{k,0}(c_{k,0})-e^{-a_k c_{k,1}}$$

其中，$a_k>0$是参与者k的绝对风险厌恶系数。

为了推导出上面定义的经济的市场均衡，我们从参与者的最优组合选择开始。令 r_F 为无风险利率，而 S 为风险证券的价格向量。另外，令 $w_k = e_{k,0} + S^T\overline{\theta}_k - c_{k,0}$ 为参与者 k 投资于证券上的财富，而 θ_k 为它的最优证券持有量。他在 1 期的财富 $\tilde{w}_k$，也就是他在 1 期的消费如下：

$$\tilde{w}_k = w_k(1+r_F) + \theta_k^T[\tilde{v} - (1+r_F)S]$$

由式（8.11），我们有

$$\begin{aligned}
\tilde{w} &\equiv \sum\nolimits_n \theta_n \tilde{X}_n = \sum\nolimits_n a_n \tilde{x}_n = w(1+r_F) + a^T(\tilde{r} - r_F \cdot \iota) \\
&= w(1+r_F) + a^T\left[(1+\tilde{r}) - (1+r_F)\cdot\iota\right] \\
&= w(1+r_F) + \frac{a^T}{S}\left[(1+\tilde{r})S - (1+r_F)S\right] \\
&= w(1+r_F) + \theta^T[\tilde{v} - (1+r_F)S]
\end{aligned}$$

$\tilde{w}_k$ 的分布是正态的。特别地，

$$
\begin{aligned}
E[\tilde{w}_k] &= w_k(1+r_F) + \theta_k^T[\bar{v} - (1+r_F)S] \\
Var[\tilde{w}_k] &= \theta_k^T \sum_k \theta_k
\end{aligned}
$$

It is easy to show that

$$E[-e^{-a_k \tilde{w}_k}] = -e^{-a_k E[\tilde{w}_k] + \frac{1}{2} a_k^2 Var[\tilde{w}_k]}$$

Therefore,

$$\max_{\theta_k} E[u_k(\tilde{w}_k)] \Leftrightarrow \max_{\theta_k} E[\tilde{w}_k] - \frac{1}{2} a_k Var[\tilde{w}_k]$$

The F.O.C. is

$$\bar{v} - (1+r_F)S = a_k \Sigma \theta_k$$

It has the unique solution

$$\theta_k = \frac{1}{a_k}\Sigma^{-1}[\overline{v} - (1+r_F)S]$$

$$\underbrace{\theta_k}_{\text{对风险资产的需求}} = \underbrace{\frac{1}{a_k}}_{\text{风险系数}(-)} \underbrace{\Sigma^{-1}[\underbrace{\overline{v} - (1+r_F)\underbrace{S}_{\text{价格}(-)}}_{\text{预期回报}(+)}]}_{\text{无}k\text{,对所有人都一样}}$$

二阶条件也成立。Here, we have the two-fund monetary separation with CARA preferences and normal payoff distributions

In order to derive the equilibrium asset prices, we have to impose the market clearing condition:

$$\sum_k \theta_k = \overline{\theta}$$

Thus,

$$(\sum_k \frac{1}{a_k})\Sigma^{-1}[\overline{v} - (1+r_F)S] = \overline{\theta}$$

Define $\frac{1}{a} \equiv \sum_k \frac{1}{a_k}$, we have

$$S = \frac{1}{1+r_F}(\bar{v} - a\Sigma\bar{\theta}) = \frac{\bar{v}}{1+r_F} - \frac{a}{1+r_F}\Sigma\bar{\theta}$$

$$= \underbrace{\frac{\bar{v}}{1+r_F}}_{\text{预期收益的折现}} - \frac{\overset{a}{\text{市场总体风险厌恶}}}{1+r_F} \underset{\text{风险程度}}{\Sigma} \underset{\text{总体资产的量}}{\bar{\theta}}$$

In order to express the equilibrium pricing relation in terms of returns, let us define the market capitalization:

$$w_M = \bar{\theta}^T S = \frac{1}{1+r_F}(\bar{\theta}^T \bar{v} - a\bar{\theta}^T \Sigma \bar{\theta})$$

Then,

$$\tilde{r}_n = \frac{\tilde{v}_n}{S_n} - 1, \quad \tilde{r}_M = \frac{\bar{\theta}^T \tilde{v}}{w_M} - 1; \quad \bar{r}_n = \frac{\bar{v}_n}{S_n} - 1$$

From the equilibrium pricing equation,

$$\bar{v} - (1 + r_F)S = a\Sigma\bar{\theta} \qquad (*)$$

Thus,

$$\bar{r}_n - r_F = \frac{\alpha}{S_n}(\Sigma\bar{\theta})_n \qquad (**)$$

Note that

$$Cov[\tilde{r}_M, \tilde{r}_n] = \frac{Cov[\bar{\theta}^T\tilde{v}, \tilde{v}_n]}{w_M S_n} = \frac{1}{w_M S_n}(\Sigma\bar{\theta})_n$$

$$Var[\tilde{r}_M] = \frac{Cov[\bar{\theta}^T\tilde{v}, \bar{\theta}^T\tilde{v}]}{w_M^2} = \frac{1}{w_M^2}\bar{\theta}^T\Sigma\bar{\theta}$$

We have

$$\beta_{n,M} = \frac{Cov[\tilde{r}_M, \tilde{r}_n]}{Var[\tilde{r}_M]} = \frac{w_M}{S_n}\frac{(\Sigma\bar{\theta})_n}{(\bar{\theta}^T\Sigma\bar{\theta})}$$

From（*），两边同时乘以 $\bar{\theta}^T$ ，we have

$$E[\tilde{w}]-(1+r_F)w_M=\alpha\bar{\theta}^T\Sigma\bar{\theta}\text{，或}\bar{r}_M-r_F=\frac{\alpha}{w_M}\bar{\theta}^T\Sigma\bar{\theta}$$

from（**）, we obtain the CAPM:

$$\bar{r}_n=r_F+\beta_{n,M}(\bar{r}_M-r_F)$$

上面的两个特殊情形说明了在特殊偏好和/或分布假设下，CAPM 可以是一般均衡下的定价关系。在这个意义是，可以认为 CAPM 是我们在第 10 章和第 11 章导出的一般定价理论的特殊例子。尽管上面两种情况下作出的偏好/分布假设并不是 CAPM 成立的唯一条件，但它们也说明了 CAPM 对偏好或收益分布附加了相当强的条件。

Chapter 14 Arbitrage Pricing Theory (APT)

We now impose restrictions on asset returns in order to obtain explicit asset pricing rule.

14.1 Factor Model of Asset Returns

We assume that asset returns are characterized by a **linear factor model:**

$$\tilde{r}_n = \overline{r}_n + \sum_{k=1}^{F} b_{n,k} \tilde{f}_k + \tilde{\varepsilon}_n, n = 1, \cdots, N \tag{14.1}$$

where

(1) $E[\tilde{f}_k] = E[\tilde{\varepsilon}_n] = 0, \forall n, k$

(2) $E[\tilde{f}_k^2] = 1,\ E[\tilde{\varepsilon}_n^2] = \sigma_n^2 < \overline{\sigma}^2$

(3) $E[\tilde{f}_k \tilde{f}_{k'}] = E[\tilde{\varepsilon}_n \tilde{\varepsilon}_{n'}] = E[\tilde{f}_k \tilde{\varepsilon}_n] = 0,\quad \forall k \neq k', n \neq n'$

模型中的常数项$\overline{r}_n = E[\tilde{r}_n]$表示资产 n 的期望收益率。其他两项则描述风险。

第一个风险反映了资产所包含的由 F 个风险因子 $\tilde{f}_k (k=1,\cdots F)$ 所描述的风险。这些因子对所有资产而言都是共同的，它们反映了系统风险，因此，也称作 factor risk。每一个风险因子前的系数$b_{n,k}$给出了资产 n 所包含的第k个因子风险的大小，也称之为对于第k个因子的 loading。

第二个风险项$\tilde{\varepsilon}_n$是与因子风险无关的剩余风险。资产的剩余风险之间是不相关的，即剩余风险的协方差矩阵为**对角阵**。这些剩余风险反映了资产的非系统风险，也称为 idiosyncratic risk。$F < N$。

风险因子具有单位方差且相互之间完全不相关的要求并不是必需的，也可以在一定程度上放松非系统风险完全不相关的要求。

（14.1）式描述的因子模型有别于定理 9.4 所要求的资产收益率的因子模型。在那里，特殊风险是可以通过某一个特殊组合完全消除的，这里没有附加这样的条件。

线性因子模型（14.1）与 CAPM 中的风险分解公式（13.4）有明显的相似之处。它们的出发点是一样的，就是把风险分解成两个相加的成分，系统风险和非系统风险。然而，它们之间也存在着重要差别。首先，CAPM 确定了单一风险因子即市场收益风险，而线性因子模型只是说存在一组风险因子却没有指明是什么风险。第二，CAPM 对非系统风险的协方差矩阵没有限制条件，而线性因子模型则有。

CAPM 建立了资产风险特别是由市场 β 值来度量的系统风险及其风险溢价或期望收益之间的关系。在这个意义上，CAPM 为我们提供了一个定价模型。这里，我们希望达到同样的目的，我们要建立资产风险特别是由因子载荷度量的系统风险与其期望收益率 $\bar{r}_n$ 之间的关系。也就是说，我们要找出从 $\left\{b_{n,k}, k=1,\cdots,F\right\}$ 到 $\bar{r}_n$ 的映射。

For convenience in notation, let $\tilde{r}$ be the vector of returns ($N \times 1$), $\tilde{f}$ the vector of factors ($F \times 1$) and $\tilde{\varepsilon}$ the vector of idiosyncratic risk ($N \times 1$). Furthermore, let $\overline{r}$ be the vector of expected returns ($N \times 1$) and b the matrix of factor loading ($N \times F$).

Then, we can write the above factor model as

$$\tilde{r} = \overline{r} + b\tilde{f} + \tilde{\varepsilon} \qquad (14.2)$$

where

(1) $E[\tilde{f}] = E[\tilde{\varepsilon}] = 0$

(2) $E[\tilde{f}\ \tilde{f}^T] = I, E[\tilde{\varepsilon}\ \tilde{\varepsilon}^T] = \Sigma$

(3) $E[\tilde{f}\tilde{\varepsilon}^T] = 0$

And Σ is diagonal.

2 Exact Factor Models and APT

Consider the special case without idiosyncratic risk, in other word, 所有资产都只有因子风险而 $\tilde{\varepsilon}_n = 0, \forall n$.

2.1 Exact 1-Factor Model

我们从最简单的只有一个风险因子的情形开始，即

$$\tilde{r}_n = \overline{r}_n + b_n \tilde{f}, \forall n \qquad (14.3)$$

在下面的讨论中，我们假设至少有两个资产有非零且不同的因子载荷，下面的两个结论虽简单但有用。

引理 14.1 存在一个无风险组合。

引理 14.2 存在一个因子载荷为 1 的组合。

证明：Suppose that there exist two assets i, j s.t. $b_i \neq b_j$ and $b_i, b_j \neq 0$. Let $\tilde{r}_i = a_i + b_i \tilde{f}, \overline{r}_i = a_i$. Consider a portfolio consisting only these two assets:

$$\tilde{r}_p = w\tilde{r}_i + (1-w)\tilde{r}_j = w(a_i + b_i \tilde{f}) + (1-w)(a_j + b_j \tilde{f}) = [wa_i + (1-w)a_j] + [wb_i + (1-w)b_j]\tilde{f}$$

Choose w s.t. the factor loading of p_0 is zero:

$$wb_i + (1-w)b_j = 0$$

then $w = b_j / (b_j - b_i)$. Consequently, p_0 is risk-free:

$$\tilde{r}_{p_0} = \frac{\overline{r}_i b_j - \overline{r}_j b_i}{b_j - b_i} \equiv r_F \Rightarrow \overline{r}_i b_j - \overline{r}_j b_i = r_F b_j - r_F b_i \Rightarrow \overline{r}_i b_j - r_F b_j = \overline{r}_j b_i - r_F b_i \Rightarrow \frac{\overline{r}_j - r_F}{b_j} = \frac{\overline{r}_i - r_F}{b_i}$$

where r_F is the risk-free rate. We can write

$$\frac{\bar{r}_j - r_F}{b_j} = \frac{\bar{r}_i - r_F}{b_i} \equiv \lambda \tag{14.4}$$

λ is independent of i.

Choose w s.t. the factor loading of p_1 is one:

$$wb_i + (1-w)b_j = 1$$

then $w = (1-b_j)/(b_i - b_j)$. Consequently, p_1 具有单位风险因子：

$$\tilde{r}_{p_1} = (r_F + \lambda) + \tilde{f}$$

具有单位风险因子的组合也叫做 factor portfolio。它的风险溢价 λ 叫做 factor premium，也就是风险因子的风险价格。

由（14.4）式，我们得出如下定理：

定理 14.1 如果资产收益由精确单因子模型（14.3）式描述，那么它的风险溢价如下：

$$\bar{r}_n - r_F = b_n \lambda, \forall n \tag{14.5}$$

这就是说　Premium on asset *n* = (factor loading of *n*) × (factor premium).

这是在精确单因子模型下的资产收益的 Arbitrage Pricing Theory, APT.

（14.5）式来自于资产定价的基本原理，即资产价格不允许套利。假设存在资产 *n*，而其预期收益率不满足（14.5）式，则将存在套利机会。如果不存在套利，（14.5）式必须成立。

如果令 $\tilde{f} = (\tilde{r}_m - \bar{r}_m)/\sigma_m$，（14.5）式形式上与 CAPM 完全一样。然而，APT 背后的基本假设，也就是单因素模型以及无套利原理，而 CAPM 的假设是均值－方差偏好和市场均衡。

2.2 Exact F-Factor Models

Suppose

$$\tilde{r} = \overline{r} + b\tilde{f}$$

where $E[\tilde{f}] = 0$.

Consider an arbitrage portfolio $z : z^T \iota = 0$.

No arbitrage implies that

$$\forall z : z^T \iota = 0, z^T b = 0 \Rightarrow z^T \overline{r} = 0$$

We then have the following theorem:

定理 **14.2** Given the exact F -factor model of return, no arbitrage implies that

$$\bar{r} = \lambda_0 \iota + \sum_{k=1}^{F} b_k \lambda_k \tag{14.5}$$

where b_k is k-th column of b.

Proof: From no arbitrage $\tilde{X}_n = 0 \Rightarrow S_n = 0$, since

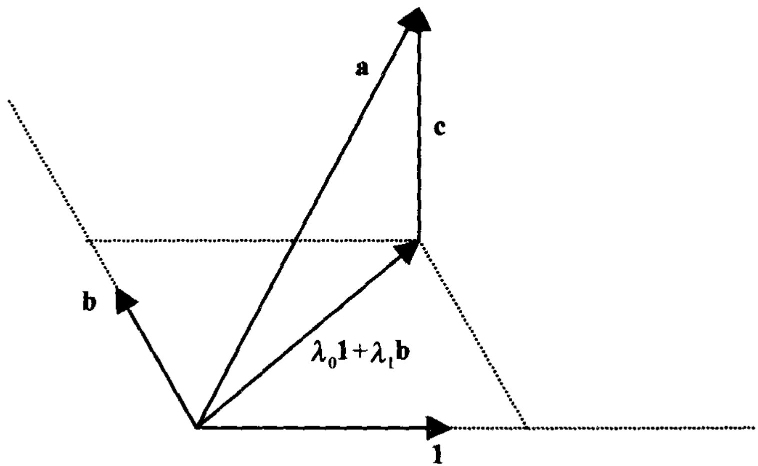
$\left\{\forall z : z^T \iota = 0, z^T b = 0\right\}$ implies $z^T \bar{r} = 0$ (), we have

$$\bar{r} \perp \{z : z \perp \iota, z \perp b_k, k = 1, \cdots, F\}$$

It then follows that $\bar{r}$ must be spanned by $\iota, b_1, \cdots, b_F$.

This is the APT in the case of exact F-factors. If there exists a risk-free, then $\lambda_0 = r_F$ (assuming $N > F$). $\lambda_k, k = 1, \cdots, F$ are the factor premium.

定理：如果集合 A 由 n-1 个线性独立但不正交的向量$(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1})$构成，它与另一向量$\mathbf{b}$正交，即：$\mathbf{a}_1^T\mathbf{b}=\cdots=\mathbf{a}_{n-1}^T\mathbf{b}=0$。向其中添加一个向量$\mathbf{a}_n$，它也与向量$\mathbf{b}$正交，即：$\mathbf{a}_n^T\mathbf{b}=0$。则向量$\mathbf{a}_n$必定可以表示为向量$(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1})$的线性组合。



14.3 Limiting Arbitrage and APT

14.4 Limiting Arbitrage and Equilibrium

14.5 作为均衡结果的APT

APT 在直觉上非常吸引人而且比较简单。它只依赖于对风险结构的简单假设（即系统和非系统风险相互分离的线性因子结构）和无极限套利的假设。但它有其自身的缺陷。例如，它本身不能确定风险因子具体是什么。另外，它只给出近似的定价关系。再有，它依赖于无极限套利的假设，而这并不是市场均衡的必要条件。尽管如此，APT 在经济结构满足一定条件时严格成立。本节中，我们证明在对经济结构作出了进一步的限制以后，APT 是我们在第 2 章中详细描述的基本框架的自然结果。

我们从对基本框架所作的限制条件开始。首先，证券市场由 1 期支付确定为 1 的无风险证券和 N 只风险证券组成。另外，证券支付具有因子结构：

$$\tilde{x} = \overline{x} + b_x \tilde{f} + \tilde{\varepsilon} \tag{14.7a}$$

$$E[\tilde{\varepsilon} \mid \tilde{f}] = 0 \tag{14.7b}$$

其中，$\tilde{x}$ 是资产的支付向量，均值为 $\overline{x}$，$\tilde{f}$ 是共同因子向量，b_x 是资产支付的因子载荷矩阵，而 $\tilde{\varepsilon}$ 是资产的特殊风险向量。

条件（14.7b）要比 $\tilde{\varepsilon}$ 和 $\tilde{f}$ 不相关的条件强（即前者可推出后者，反之则不然）。那么，我们有如下结论：

定理 14.5 假设

1．证券支付具有如（14.7）式给出的因子结构，且其中有一个是无风险的；

2．每个因子都可由证券支付线性表示；

3．参与者的 1 期消费可由证券支付线性表出；

4．1 期的总禀赋可由因子线性表出；

5．参与者是严格风险厌恶的，且

6．均衡配置是内部解。

那么，APT 定价关系（14.6）式在均衡下成立。

证明：略

Chapter 15 Corporate finance with A Complete Market

15.1 A-D Economy with Production

我们假设存在一个完全的证券市场，不失一般性，我们直接假设存在一个 A-D 证券市场。

A 生产机会

经济中的参与者，除了有消费品形式的禀赋以外，我们假设他们还占有生产机会。所谓**生产机会就是将现有资源转化成将来资源的可能**。这种转化的具体经济描述也叫做生产技术。特别地，对于参与者 k，假设他拥有的生产技术可由下面的 production function 来定义：

$$y_{k,1\omega} = y_{k,\omega}(y_{k,0}) \tag{15.1}$$

其中， $y_{k,0}$ 是 0 期投入，而 $y_{k,1\omega}$ 是 1 期在 ω 状态下的产出， $\omega \in \Omega$ 。我们假设生产函数可微且满足下列条件：

（1） $y_{k,\omega}(0)=0$ ；（2） $y'_{k,\omega}(\cdot)\geq 0$ ；（3） $y''_{k,\omega}(\cdot)<0$

条件（1）和（2）的意义很明显。（1）表明无投入也就无产出。（2）表明产出随投入而增加。条件（3）说明生产函数的边际生产率递减或规模效应为负，意味着最优的生产规模是有一定限制的。这些条件虽然很直观，但比我们需要的强。

例如，无投入的产出实际就是禀赋，所以（1）不是必需。若增加投入时产出反而降低，则我们可以不予考虑这类生产机会。因此（2）也是可以放松。（3）有着较为重要的含义。它意味着最优生产规模是有一定限制的。

为简便起见，记 $y_{k,1}$ 为参与者 k 的生产产出向量。

我们假设参与者 k 的禀赋是$e_k=[e_{k,0};e_{k,1}]$，而他的偏好由如下形式的期望效用函数描述

$$U_k(c)=u_{k,0}(c_{k,0})+\sum_{\omega}p_{\omega}u_{k,1}(c_{k,1\omega})$$

其中，$k=1,\cdots,K$。

B 最优生产策略

我们现在研究参与者的最优生产、消费以及证券组合策略，以及由此得到的均衡证券价格和配置。记ϕ为状态价格向量。如果相对于一个给定的生产技术y_k的投入是$y_{k,0}$，则其产出向量为$y_{k,1}=y_k(y_{k,0})$。而这些产出的现市值就是$\phi^T y_{k,1}$。那么，相应于给定的投入水平，这个生产技术在 0 期的净市值记作v_k，即

$$v_k=\phi^T y_{k,1}-y_{k,0} \tag{15.2}$$

需要注意的是：第一，生产技术的净市值不仅依赖于生产技术 y_k（我们假设它是给定的），而且依赖于投资水平 $y_{k,0}$。第二，它不一定总为正，可以是负的。尤其是，因为边际生产率递减，当投资规模超出一定范围以后，即明显的得不偿失。

因此，参与者 k 在 0 期的**财富 w_k，就应该是他禀赋的总市值加上他的生产技术在相应投资水平下的净市值**（财富依赖于生产选择）

$$c_{k,0}+\phi^T c_{k,1}=e_{k,0}+\phi^T e_{k,1}+\underbrace{(\phi^T y_{k,1}-y_{k,0})}_{\text{生产创造的}}=e_{k,0}+\phi^T e_{k,1}+v_k=w_k(y_{k,0}) \tag{15.3}$$

这样，他的优化问题变成了

$$\begin{aligned}\max_{y_{k,0},c_{k,0},c_{k,1}} \quad & u_{k,0}(c_{k,0})+\sum_{\omega} p_\omega u_{k,1}(c_{k,1\omega}) \\ \text{s.t.} \quad & c_{k,0}=e_{k,0}-S^T\theta-y_{k,0} \\ & c_{k,1}=e_{k,1}+X\theta+y_{k,1}\end{aligned} \tag{15.4}$$

我们分两步求解这个优化问题：

首先选择投资水平 $y_{k,0}$ 以**使得他现在的财富最大化**。然后在给定的最大财富范围内选择现在的消费和证券组合以达到最大期望效用，即最大程度地满足他的经济需要。

财富最大化要求我们最大化生产技术的净市值，即

$$\max_{y_{k,0}} w_k(y_{k,0}) \Leftrightarrow \max v_k = \phi^T y_{k,1} - y_{k,0}$$

对应的一阶条件是

$$\phi^T y'_{k,1}(y_{k,0}) = 1 \tag{15.5}$$

由于 $y_{k,1}(\cdot)$ 是严格凹的，（15.5）式有唯一解，它就是最优生产决策。（15.5）式给出的就是生产决策的所谓价值最大化，它的经济意义是当生产所创造的边际价值 $\phi^T y'_k(y_{k,0})$，恰与其投入相等（即净边际价值为零）时，生产规模最佳。这个结论可由图 15.1 来表示。其中，横轴表示投资规模，纵轴表示产出的市值。

图中的实曲线表示生产技术（即其产出的市值和投入之间的关系）。当它的斜率恰好为 1 时，生产技术的净市值最大。

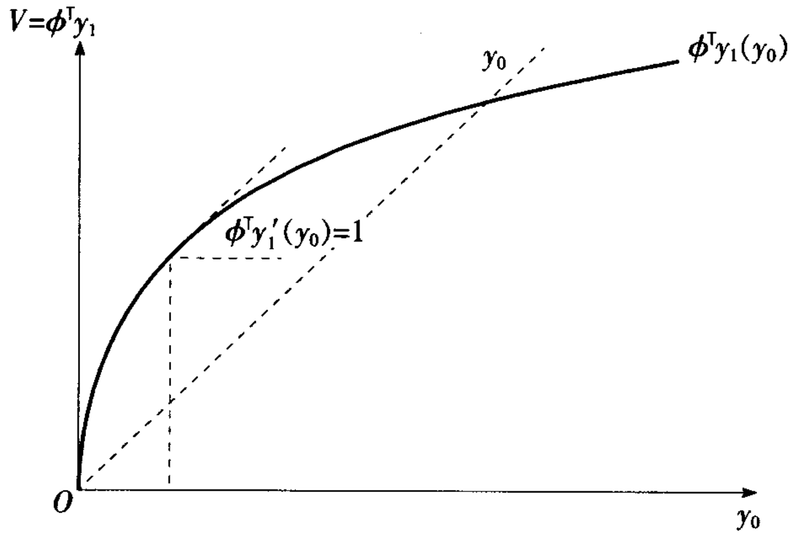


图 15.1　最佳生产决策：市值最大化

我们可以将价值最大化规则和 net present value（NPV）规则联系起来。我们可以把生产机会当成一系列小项目：$i=1,2,\cdots$。（把每个水平的投资都看成 1 个项目：第 1 个 1 万元，第 2 个 1 万元（合计 2 万元），等等。）当某个项目的支付可以补偿投资时，参与者才投资，否则不投资。

每个项目要求一个很小的投资增量 δ。由第 i 个项目得到的支付向量为：$\frac{y(i\delta)-y\left[(i-1)\delta\right]}{i\delta-(i-1)\delta}\cdot\delta=y'(i\delta)\delta$（我们忽略生产技术的下标 k）。第 i 个项目的 NPV 是：

$$NPV_i=\phi^T y'(i\delta)\delta-\delta=[\phi^T y'(i\delta)-1]\delta$$

由于生产函数是凹的，NPV_i 随着 i 递减（随着投资水平的增加，边际产出<0，NPV 将减少）。NPV 规则表明应该投资于所有 NPV 为正的项目。

考虑第 i 个项目，使得所有 $j<i$ 的项目 NPV 都为正，而所有 $j>i$ 的项目 NPV 都为负。那么，对于项目 i，我们有

$$\phi^T y'(i\delta)\delta-\delta=0$$

即它的 NPV 为 0，也就是

$$\phi^T y'(y_0)=1$$

其中， y_0 是到 i 为止所有项目的总投资额。这与价值最大化法则相同，因此，我们正式地确立了生产决策的净现值法则：

定理 15.1 （NPV 法则）参与者应该选择所有净现值为正的项目。

项目的净现值也可以表示成它的净折现现金流。利用前面得到的定价结论（$S=E[\tilde{\pi}\tilde{X}]$），我们可以写成

$$NPV_i = E\left[\frac{u'_1}{u'_0}\tilde{y}_i\right] - \delta$$

其中，u'_t 是**代表性参与者**在时间 t 的边际效用 $(t=0,1)$，而 $\tilde{y}_i$ 是项目 i 的产出。或

$$NPV_i = \frac{E[\tilde{y}_i]}{1+\mu_i} - \delta$$

其中，μ_i 是项目 i 的风险调整后的折现率：

$$\mu_i = \frac{1+r_F}{1+Cov\left[\frac{u'_1}{E[u'_1]}, \frac{\tilde{y}_i}{E[\tilde{y}_i]}\right]} - 1 = r_F - (1+r_F)Cov(\tilde{\pi}, \tilde{r}_i)$$

而 r_F 是无风险利率。

例 15.1

由最优条件$\phi^T y'(y_0)=1$，有

$$\phi_a y_{1a}'(y_0)+\phi_b y_{1b}'(y_0)=1 \Rightarrow \phi_a \frac{1}{2}k_a y_0^{-\frac{1}{2}}+\phi_b \frac{1}{2}k_b y_0^{-\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow \frac{1}{2}(\phi_a k_a+\phi_b k_b)y_0^{-\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow$$

$$y_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\phi_a k_a+\phi_b k_b) \Rightarrow \phi_a k_a+\phi_b k_b=2y_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y_0=\frac{1}{4}(\phi_a k_a+\phi_b k_b)^2$$

$$\begin{aligned} w&=e_0+\phi^T e_1+\phi^T y_1-y_0=\phi^T y_1-y_0=\phi_a k_a y_0^{\frac{1}{2}}+\phi_b k_b y_0^{\frac{1}{2}}-y_0 \\ &=y_0^{\frac{1}{2}}(\phi_a k_a+\phi_b k_b)-y_0=y_0^{\frac{1}{2}}\cdot 2y_0^{\frac{1}{2}}-y_0=y_0=\frac{1}{4}(\phi_a k_a+\phi_b k_b)^2 \end{aligned}$$

C 市场均衡

有了财富和 A-D 证券，参与者 k 的最优消费/投资策略由如下的一阶条件给出（即式 10.2）

$$u'_{k,0}(c_{k,0})=\lambda_k \tag{15.6a}$$

$$p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega})=\lambda_k\phi_\omega, \forall \omega\in\Omega \tag{15.6b}$$

其中，λ_k 是对应于预算约束的 Lagrange 乘子。给定交易证券的价格，（15.5）式、（15.6）式和（15.4）式中的约束条件决定了参与者 k 的最优生产、消费和组合选择。

$$\sum_k c_{k,0}=\sum_k e_{k,0}-\sum_k y_{k,0} \tag{15.7a}$$

$$\sum_k c_{k,1}=\sum_k e_{k,1}+\sum_k y_{k,1} \tag{15.7b}$$

由（15.7b）式和（15.3）式可以导出（15.7a）式。（15.7b）式给出了均衡证券价格。

我们可以很容易地把在完全市场下得到的结论拓展到存在生产机会的情形。

定理 15.2 假定（1）存在一个完全的证券市场，（2）参与者具有严格凹的期望效用函数，以及（3）他们的生产函数$\{y_k(y_{k,0})\}(k=1,\cdots,K)$是严格凹的。那么，（i）均衡配置是 Pareto 最优的；（ii）存在一个代表性参与者，他的期望效用函数$u_0(C_0)+\sum_\omega p_\omega u_1(C_{1\omega})$定义为：

$$
\begin{aligned}
& u_0(C_0)+\sum_\omega p_\omega u_1(C_{1\omega})=\max_{\{c_k,y_{0,k},\forall k\}}\sum_k \lambda_k[u_{k,0}(c_{k,0})+\sum_\omega p_\omega u_{k,1}(c_{k,1\omega})] \\
s.t.\ & \sum_k c_{k,0}=\sum_k(e_{k,0}-y_{k,0})=C_0 \\
& \sum_k c_k=\sum_k[e_{k,1}+y_{k,1}(y_{k,0})]=C_1
\end{aligned}
$$

其中，$\forall k,\lambda_k\geq 0$，他在参与者的消费和生产之间的配置和市场达到均衡时的配置一样，并且（iii）均衡状态由下式决定

$$\phi_{\omega} = \frac{p_{\omega} u'_1(C_{1\omega})}{u'_0(C_0)}, \forall \omega$$

定理 15.2 清晰阐明了证券市场在不同生产机会之间配置资源的有效性。特别地，所有参与者都会选择所有 NPV 为正即创造正价值的项目，而拒绝 NPV 为负即消灭价值的项目。拥有 NPV 为正的项目的参与者可以通过证券市场筹集他们生产所需资本，从而使得资源有效地配置到能创造价值的项目中去。

15.2 公司的投资决策

在上面的讨论中，我们假设个体参与者直接拥有生产机会。但更常见的情形是公司拥有生产机会并作出生产决策，而参与者只是拥有公司的股份。本节，我们正式地把公司纳入我们的框架并分析它们的金融行为。

我们先假设有 F 家公司或企业。每一公司拥有一个生产函数 $y_f(\cdot)(f=1,\cdots,F)$，它给出了在 1 期每一可能状态下的产出向量。我们假设每一企业的股份均由参与者持有。特别地，参与者 k 持有企业 f 的股份比例为 $s_{k,f}$。因此，对于 $f=1,\cdots,F$，有

$$\sum_k s_{k,f}=1$$

对于公司 f，全体参与者持股比例之和为 1。和前面一样，给定企业计划投资 $y_{f,0}$，它在 0 期的市场净值为

$$v_f=\phi^T y_f(y_{f,0})-y_{f,0},\forall f$$

第 k 个参与者的净收益为$s_{k,f}v_f$。因此，参与者 k 的总财富是

$$w_k = e_{k,0} + \phi^T e_{k,1} + \sum_f s_{k,f} v_f$$

这显然依赖于他所持股的各公司的投资决策。

现在让我们来考虑企业的投资决策。我们先考虑参与者 k 完全拥有企业 f 的情形 $s_{k,f} = 1$。我们前面已经证明，这时他做投资决策的目的是要使得企业的净市值v_f 最大化。而最大化条件是

$$\phi^T y'_f(y_{f,0}) = 1$$

我们注意到，这个条件即**最优投资决策，与决策者的禀赋和偏好无关，它只依赖于证券价格和生产函数**。也就是说，无论公司归谁所有，所做的最优投资决策都应该是一样的。因此，在更一般的股权分散持有的情形下，大家对企业的投资决策意见都是一致的。因此，我们有如下的重要结论：

定理 15.3 在一个完全和竞争的证券市场中，企业股东对企业的投资决策有一致的目标，那就是最大化企业的市场价值。

这个结论背后的直觉如下：给定证券市场是完全的，参与者能得到任意想要的消费计划，而唯一受到的制约来自于他的预算约束也就是财富的多寡。

而他所拥有的企业或生产机会的经济价值正好可以创造他的财富。因此，所有股东对企业的要求都是相同的，即为他们创造最多的财富。至于如何使用这些财富来满足他们自身不同的经济需要，则完全可以依赖于证券市场的各自安排。

股东目标一致的一个具体应用就是，只要遵循价值最大化法则，由谁管理企业都没有关系。因此，企业的管理权可以从所有者那里剥离出来交给代理者，只要他们是为了股东的利益来最大化公司的价值。

15.3 Financing Decisions

到目前为止，我们假设企业只由它的股东所有。因此，初始投资 y_0 来自于企业的原始股东（按照持股比例分摊）。当然，投资得到的支付也只由股东（按持股比例）分享。企业如何筹集投资资金叫做 **financing decision**。企业为运营融资而发行的证券组合，叫做它的 **capital structure**。

假设一个企业使用两种证券融资：债权和股权。记 d_0 为公司发行债权的市场价值。剩余投资 $e_0 = y_0 - d_0$ 用股权融资。此时，

$$y_0 = d_0 + e_0$$

当然，公司必须承诺给债权人以确定的未来支付作为回报。记 $d_1 = [d_{11};\cdots;d_{1\Omega}]$ 为债权在 1 期的支付向量。为了使参与者（潜在的债权持有人）愿意持有债权，我们必须有

$$d_0 = \phi^T d_1 = \frac{1}{1+r_f} d_1$$

企业的总支付在债权持有人和股权持有人之间瓜分：

$$y_1 = d_1 + e_1$$

其中，e_1 是所有股权持有人的支付向量。

记 D 为债权的现时市场价值，即债权的未来支付的现值，并记 E 为股权的现时市场价值。我们有

$$D = \phi^T d_1$$
$$E = \phi^T e_1$$

企业资产的价值，即企业未来支付的现值为

$$V = D + E = \phi^T y_1$$

现在，股东所有的权益净值为

$$v = E - e_0 = \phi^T (y_1 - d_1) - e_0 = \phi^T y_1 - (d_0 + e_0) = \phi^T y_1 - y_0$$

和以前一样，**股东的最终目的是最大化股东权益净值**。但上式表明，**股东权益净值与如何融资——即 d_1, d_0 的选择无关**（受到 $d_0 = \phi^T d_1$ 的约束）。这也就是说，公司的投资决策不依赖于它的融资方式，这就是著名的 Modigliani-Miller 定理：

定理 15.4 在完全证券市场下，企业价值只由它的投资决策决定而与其融资决策无关

Modigliani-Miller 定理背后的直觉是：企业资产的价值 V 由它的投资决策决定，而投资决策是为了最大化企业现值。给定它的投资决策，不同的融资方式只涉及如何以公平市价出售它的部分未来现金流以筹集现在所需的资金。在债权和股权的情况下，d_1, e_1 的划分只涉及划分给定大小的“馅饼”y_1。

15.4 基本框架外的公司财务

在基本框架中，我们忽略了两个重要的因素：参与者之间的信息不对称以及交易成本。这两个因素的出现会引起参与者之间的利益冲突，而通过证券或金融合约的交易不能有效地调和这些利益冲突。

一个公司包括**众多的利益相关者**，从股权持有人和债权持有人、经理到雇员和顾客。他们在三个重要方面有所区别：（1）所拥有的信息以及对企业行动的控制权，（2）对企业资产的要求权，（3）他们自身的经济利益。这些差别导致他们之间存在利益冲突。

例如，经理也有他们自身的利益，股东会尝试与经理达成合约以使他们的利益和股东的利益尽量一致。但是当经理对于其自身能力、努力程度以及公司的运作有更多的信息并能控制其中的许多因素时，这种合约会产生许多局限性。

比方说，一份旨在吸引好的经理的合约可能最后吸引的是差的经理，因为经理对自身的能力比合约所能反映的要了解的多。这就是 **adverse selection**。另外，一份旨在鼓励经理为股东利益服务的合约可能并不能真正使他们这样做，甚至适得其反。这就是所谓的 **moral hazard** 的问题。逆向选择和道德风险问题引起了股东和经理之间的利益冲突。如何为经理设计激励机制以减少这类问题并设计控制机制以加强股东利益是 **corporate governance** 关注的主要问题。

企业的**不同投资者之间也存在利益冲突**，例如，债权持有人和股权持有人。由于是股东控制企业，至少在企业有偿付能力的时候是这样的，他们就有可能采取对自己有利而对债权持有人不利的行动，比方说他们会选择高风险项目，高风险项目会增加股权价值却降低债权价值。

当债权持有人不能完全识别这些行动时，他们并不能通过事前合约或即时的干预来阻止这些行动。即使在股东之前，也存在利益冲突。例如，当公司想发行新的股权时，现有的股东会把公司的前景描述得十分美好，而这样做并不一定符合新股东的利益。不同利益相关者之间存在信息、控制权和利益上的差别导致了资产估值的不同以及金融交易的额外成本。

当企业不同利益相关者之间的利益冲突不能有效地协调时，它们将影响企业的行为，特别是企业使用资源和资源整体配置的效率。

交易成本也会影响企业的行为。例如，对于公司的融资决策来说，某一特定的融资工具还有另外的成本和收益。有时，债券融资具有税收优势，因为利息是用税前收入支付的而股利是用税后收入支付的。但发债也有成本。由于逆向选择和道德风险的问题，股权持有人和市场上其他人之间的信息不对称也会给股权融资增加成本。这些交易成本可能会影响企业的融资决策。

上述讨论集中于**信息不对称和交易成本对企业行为的影响**。同时我们也看到，这两个因素之间也是相互关联的。从更加基本的层面上看，公司本身正是为了减少这两个因素带来的效率损失的产物。也就是说，公司是参与者为了减少上述这些缺陷特别是信息不对称和交易成本带来的效率损失而作出的制度安排。从这个角度来看，公司财务在研究公司的行为时还要研究公司本身的经济起源。

需要认识的重要一点是旨在调和利益冲突和交易成本的制度安排并不仅限于公司层面。作为整体制度环境，它们也存在于宏观层面。其中一部分原因是这些问题的普遍性和外部性。这里的所谓制度环境包括与公司和个体的财务行为相关的法律、监管和社会环境。

Lecture 11
Models of asset dynamics

Reading: Luenberger Chapter 11

11.1 Binomial Lattice Model

Δt Period length

S Price at beginning of the period

Two possibilities of change

u multiple up, with $u > 1$

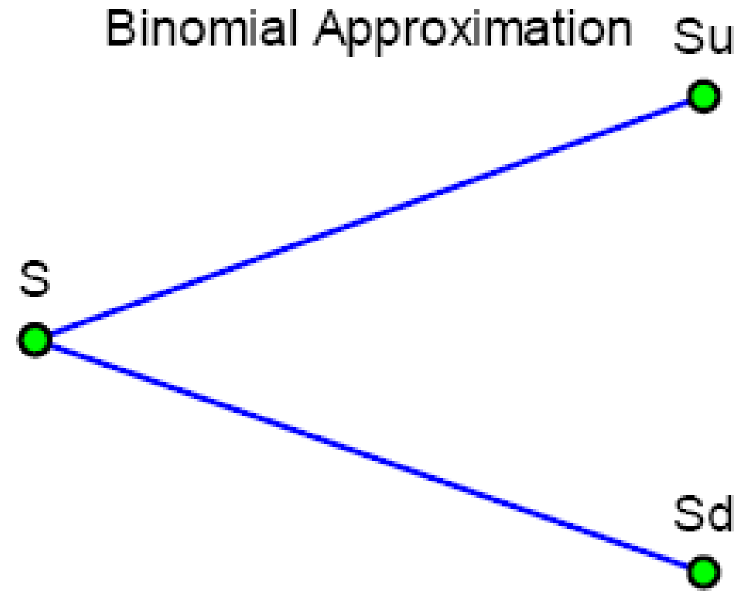
d multiple down, (usually) $d < 1$

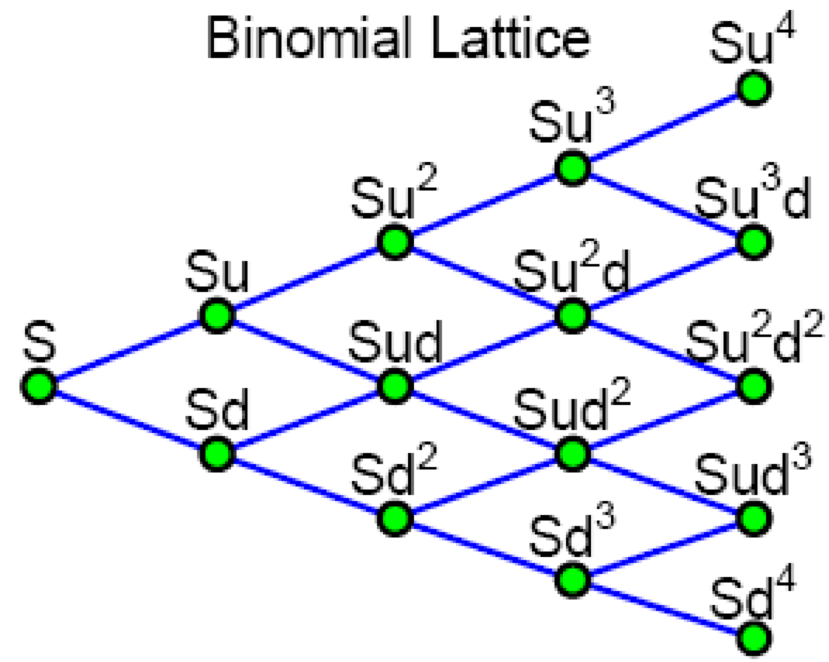
Probabilities of change

p from S upwards to uS

$1-p$ from S downwards to dS

Model continues for several periods





Complete specification of the model requires u, d and p, $u > 0$ and $d > 0$ implies that the price will never be negative. We can therefore use the logarithm of the price as the fundamental variable.

Define v as the expected yearly growth rate $v = E\left(\ln \frac{S_T}{S_0}\right)$

Define σ as the yearly standard deviation $\sigma^2 = \mathrm{var}\left(\ln \frac{S_T}{S_0}\right)$

With $\Delta t \ll 1$, the parameters of the binomial lattice can be selected as

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}, u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

With this choice, the binomial model will closely match the values of v and σ.

Example 11.1 (A volatile stock)

Consider a stock with the parameters $v = 15\%$ and $\sigma = 30\%$.

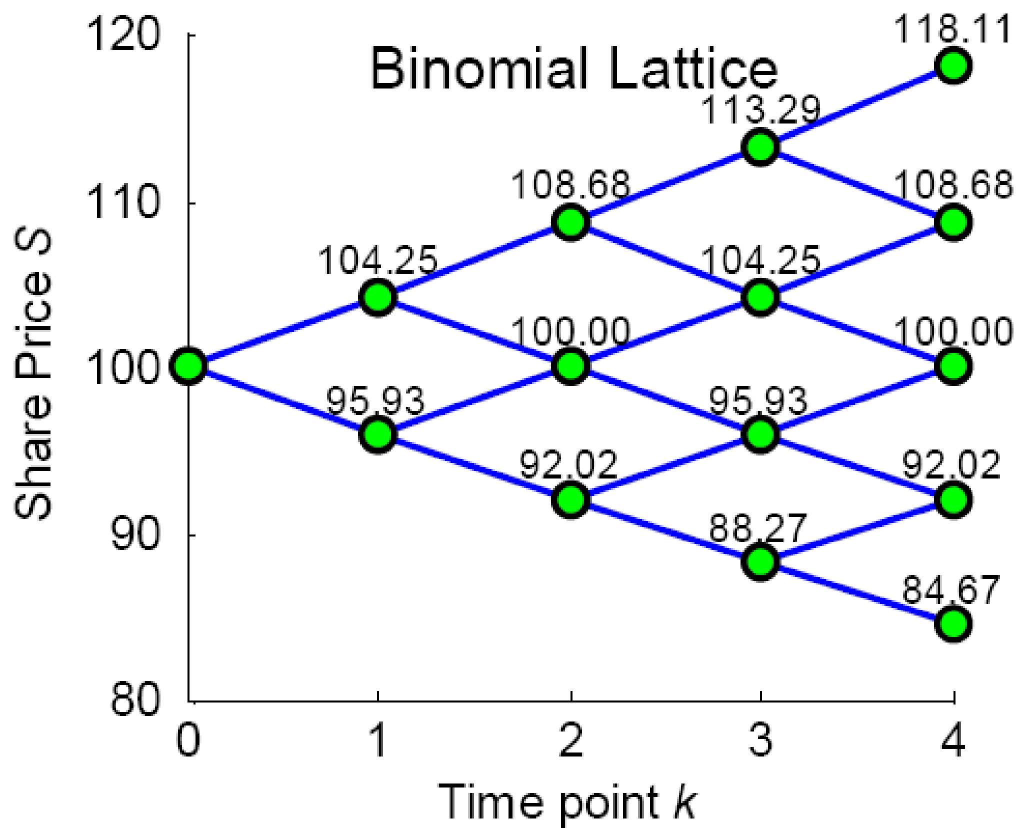
We wish to make a binomial model based on weekly periods.

$$\Delta t = 1/52$$

$$u = e^{0.30/\sqrt{52}} = 1.04248$$

$$d = 1/u = 0.95925$$

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{0.15}{0.30}\sqrt{\frac{1}{52}}\right) = 0.534669$$



11.2 The Additive Model

Now consider models for which price can range over a continuum.

$N + 1$ time points indexed by k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Price of asset at k denoted by $S(k)$. Additive model is

$$S(k+1) = aS(k) + u(k), \;\; a > 1, k = 0, \cdots, N-1$$

Normal price distribution

$$\begin{aligned}
S(1) &= aS(0) + u(0) \\
S(2) &= aS(1) + u(1) = a^2 S(0) + au(0) + u(1) \\
&\vdots \\
\Rightarrow S(k) &= a^k S(0) + a^{k-1}u(0) + a^{k-2}u(1) + \cdots + u(k-1) \\
&= a^k S(0) + \text{Sum of random variables}
\end{aligned}$$

It is sometimes assumed that $u(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N\text{-}1$ are independent normal random variables with common variance σ^2.

Then $S(k)$ is a normal random variable.

If the expected values of all the $u(k)$'s are zero then

$$E\left[\left(S(k)\right)\right] = a^k S(0)$$

$a > 1 \;\Rightarrow\;$ The expected values grows geometrically

The additive model is structurally simple and easy to work with. The expected values of the price grows geometrically and all the prices are normal random variables.

Model is seriously flawed because it lacks realism:

- Normal random variables can be negative $\Rightarrow$ prices might be negative
- Standard deviation should increase as the price increases

Now consider the multiplicative model, where we will use our understanding of the additive model.

11.3 The Multiplicative Model

$$S(k+1)=u(k)S(k),\ \ k=0,\cdots,N-1$$

with $u(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$-1 mutually independent random variables.

The relative change $u(k)=S(k+1)/S(k)$ is independent of the units and of the magnitude of $S(k)$.

When we take the natural logarithm

$$\ln S(k+1)=\ln S(k)+\ln u(k)$$

This is an additive model in terms of the logarithm of the price.

Specify random disturbances directly in terms of the $\ln u(k)$'s. Let

$$w(k) = \ln u(k), k = 0, \cdots, N-1$$

be mutually independent normal random variables each with expected value

$\overline{w}(k) = v$ and variance σ^2.

The original multiplicative disturbances

$$u(k) = e^{w(k)}, k = 0, \cdots, N-1$$

are lognormal random variables, since their logarithms are normal random

variables.

Negative values are no longer a problem: The $w(k)$'s may be negative, but the

corresponding $u(k)$'s are not. Prices remain positive.

Lognormal prices

$$S(k) = u(k-1)u(k-2)\cdots u(0)S(0)$$

$$\ln S(k) = \ln S(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \ln u(i) = \ln S(0) + \sum_{i=0}^{k-1} w(i)$$

If each $w(i)$ has expected value $\overline{w}(i) = v$ and variance σ^2, and all are mutually independent, then

$$E[\ln S(k)] = \ln S(0) + vk$$

$$\text{var}[\ln S(k)] = k\sigma^2$$

Both expected value and variance increase linearly with k.

Price distributions of most stocks are close to lognormal. Typically the tails are fatter, which imply that large price changes tend to occur more frequently than predicted by a normal distribution with the same variance.

11.5 Lognormal Random Variables

If u is a lognormal random variable, then the variable $w = \ln u$ is normal.

Suppose $w \sim N(\overline{w}, \sigma^2)$. What is the expected value of $u = e^w$?

$$\overline{u} = e^{\overline{w} + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

The extra term $\frac{1}{2}\sigma^2$ is small for low-volatility stocks.

For stocks of high volatility this correction can be significant.

11.6 Random Walks and Wiener Processes

Discrete Prices and Discrete Time: Binomial Lattice

Continuum of Prices and Discrete Time

Additive model $S(k+1) = aS(k) + u(k)$

Multiplicative model $S(k+1) = u(k)S(k)$

$$\begin{aligned}\ln S(k+1) &= \ln u(k) + \ln S(k) \\ &= w(k) + \ln S(k), \ \ w(k) = \ln u(k) \\ &= \ln S(0) + \sum_{i=0}^{k} w(i)\end{aligned}$$

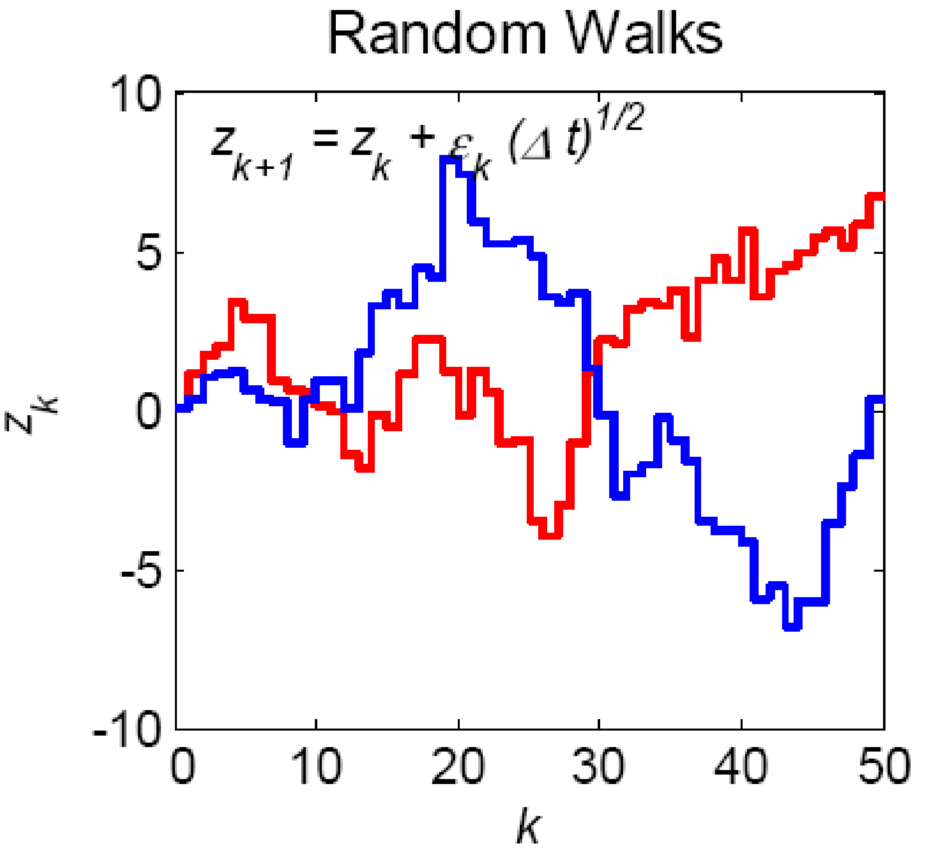
$$\begin{matrix} E[w(k)] = v \\ \mathrm{var}[w(k)] = \sigma^2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} E[\ln S(k)] = \ln S(0) + vk \\ \mathrm{var}[\ln S(k)] = k\sigma^2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow E[\ln S(k) - \ln S(j)] = v(k-j), \ j < k$$

Random Walk

Suppose that we have N periods of length Δt. We define the additive process z by

$$z(t_{k+1}) = z(t_k) + \varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t},\ \ k = 0, \cdots, N$$
$$z(t_0) = 0$$
$$t_{k+1} = t_k + \Delta t$$



Standardized normal random variable

$$\varepsilon(t_k) \sim N(0,1) \Rightarrow E[\Delta z] = 0, \mathrm{var}[\Delta z] = \Delta t$$

Mutually uncorrelated

$$E[\varepsilon(t_j)\varepsilon(t_k)] = 0, \text{ for } j \neq k$$

Consider the difference random variables $z(t_k) - z(t_j),\ j < k$

$$z(t_k) - z(t_j) = \sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon(t_i)\sqrt{\Delta t}$$

$$E[z(t_k) - z(t_j)] = 0$$

$$\operatorname{var}[z(t_k) - z(t_j)] = E\left[\sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon(t_i)\sqrt{\Delta t}\right]^2 = \Delta t \cdot E\left[\sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon(t_i)\right]^2$$

$$= \Delta t \cdot \sum_{i=j}^{k-1} E[\varepsilon(t_i)]^2 = \Delta t(k - j) = t_k - t_j$$

The variance of $z(t_k) - z(t_j)$ is exactly equal to the time difference $t_k - t_j$.

This explains the use of $\sqrt{\Delta t}$.

Wiener Process

Wiener process obtained from random walk by letting $\Delta t \rightarrow 0$.

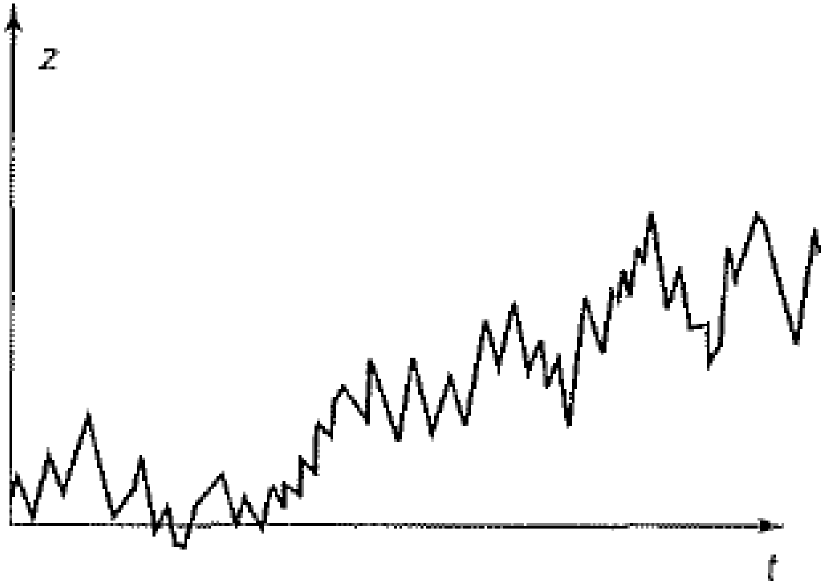
Symbolically

$$dz(t) = \varepsilon(t)\sqrt{dt}, \quad \varepsilon(t) \sim N(0,1), \ E[\varepsilon(t')\varepsilon(t'')] = 0 \text{ for } t' \neq t''$$

$$E[dz(t)] = 0$$

$$\mathrm{var}[dz(t)] = E[dz(t)]^2 = dt$$

	dt	dz
dt	0	0
dz	0	dt



Required properties of Wiener process or Brownian motion

1. $z(s) - z(t) \sim N(0, s-t), s > t$

2. $z(t_2) - z(t_1)$ and $z(t_4) - z(t_3)$ are uncorrelated for $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$

3. $\text{Prob}[z(t_0) = 0] = 1$

A Wiener process is not differentiable, roughly motivated by

$$E\left[\frac{z(s) - z(t)}{s-t}\right]^2 = \frac{s-t}{(s-t)^2} = \frac{1}{s-t} \to \infty \text{ as } s \to t$$

$\dfrac{dz}{dt}$ is white noise.

Generalized Wiener Processes and Ito Processes

The Wiener process is the fundamental building block for more general processes, obtained by inserting white noise in an ordinary differential equation.

Generalized Wiener Process

$$dx(t) = adt + bdz$$

The coefficients a and b are constants.

$$E[x(t)] = adt$$

$$\text{var}[x(t)] = b^2 dt$$

If we integrate both sides we obtain the explicit solution

$$x(t) = x(0) + at + bz(t) \tag{11.13}$$

For the **Ito process**

$$dx(t) = a(x,t)dt + a(x,t)dz$$

The coefficients $a(x, t)$ and $b(x, t)$ may depend on x and t.

A special form of the Ito process is frequently used to describe share price processes.

11.7 A Stock Price Process

Extend multiplicative model to continuous-time model

Multiplicative model

$$\ln S(k+1) - \ln S(k) = w(k)$$

with the $w(k)$'s uncorrelated normal random variables and $w(k) \sim N(v, \sigma^2)$

Continuous-time version

$$d \ln S(t) = v dt + \sigma dz \qquad (11.15)$$

v and σ constants, with $\sigma \geq 0$ and z is a standard Wiener process.

The whole right-hand side plays the role of $w(k)$ in the discrete-time model.

Right-hand side is a constant plus a normal random variable with zero mean.

Distinction differentials dt and dz, and small changes Δt and Δz.

Mean value

Right-hand side vdt, proportional to dt

Discrete-time $E[\ln S(k) - \ln S(j)] = v(k-j), \;\; j < k$

Standard deviation

Right-hand side σ times standard deviation of dz,

$\Rightarrow$ order of magnitude $\sigma\sqrt{dt}$

Discrete-time $\text{stdev}\,[\ln S(k)] = \sigma\sqrt{k}$

Explicit solution of continuous-time model (a generalized Wiener process)

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \nu t + \sigma z(t) \qquad (11.13)$$

$$\Rightarrow E[\ln S(t)] = E[\ln S(0)] + \nu t$$

Since the expected value of the logarithm grows linearly, like a continuously compounding savings account, this process is called geometric Brownian motion.

Lognormal Prices

The Geometric Brownian motion process is a lognormal process.

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \nu t + \sigma z(t) \sim N(\ln S(0) + \nu t, \sigma^2 t)$$

$S(t)$ has a lognormal distribution.

We can write

$$S(t) = e^{\ln S(t)} = S(0)e^{\nu t + \sigma z(t)}$$

but note that

$$E[S(t)] = S(0)e^{(\nu + \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

Define

$$\mu = \nu + \frac{1}{2}\sigma^2$$

so that

$$E[S(t)] = S(0)e^{\mu t}, \ \text{stdev}[S(t)] = S(0)e^{\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1)^{1/2}$$

Standard Ito Form

Random process in terms of $\ln S(t)$ generalized the multiplicative model.

It would be nice to express the process in terms of $S(t)$ itself.

Calculus: $d \ln S(t) = \dfrac{dS(t)}{S(t)}$

Transformation of variables in Ito processes requires an extra term.

In the next section we will see that Ito's lemma generalizes the chain rule.

The standard Ito form for price dynamics is (from 11.15)

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dz = (v + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dz$$

The term dS / S can be interpreted as the instantaneous rate of return.

Example 11.2 (Bond price dynamics)

$P(t)$ is the price of a bond that pays 1 at $t = T$, assume interest rate constant at r.

Price satisfies

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = r\,dt \;\Rightarrow\; P(t) = P(0)e^{rt} \;\Rightarrow\; P(t) = e^{-r(T-t)}$$

Relations for geometric Brownian motion

Suppose the geometric Brownian notion process $S(t)$ is governed by

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dz$$

where z is a standard Wiener process. Define $v = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$. Then $S(t)$ is lognormal and

$$E\{\ln[S(t)/S(0)]\} = vt, \quad \text{stdev}\{\ln[S(t)/S(0)]\} = \sigma\sqrt{t}$$

$$E[S(t)/S(0)] = e^{\mu t}, \quad \text{stdev}[S(t)/S(0)] = e^{\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1)^{1/2}$$

Simulation

Choose a basic period length Δt, set $S(t_0) = S_0$, a given initial price at $t = t_0$.

Eqn (11.18) Standard Ito form

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dz, \mu = \nu + \frac{1}{2}\sigma^2$$

$$S(t_{k+1}) - S(t_k) = \mu S(t_k)\Delta t + \sigma S(t_k)\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}$$

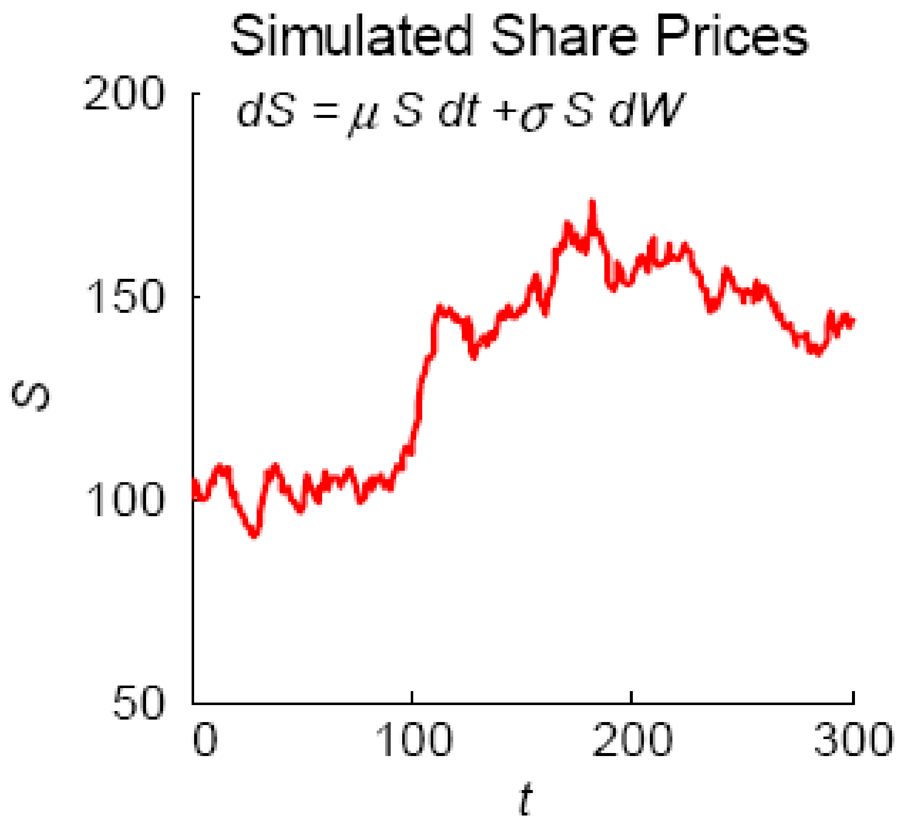
$$S(t_{k+1}) = \left[1 + \mu\Delta t + \sigma\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}\,\right]S(t_k)$$

Eqn (11.15) Log of prices

$$d\ln S(t) = \nu dt + \sigma dz = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz$$

$$\ln S(t_{k+1}) - \ln S(t_k) = \nu\Delta t + \sigma\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}$$

$$S(t_{k+1}) = e^{\nu\Delta t + \sigma\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t}}S(t_k)$$



Simulated Share Prices
$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW$
200
150
100
50
S
0
100
200
300
t

11.8 Ito's Lemma

There is a systematic way for making transformations of random processes.

Ito's Lemma

Suppose that the random process x is defined by the Ito process

$$dx(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

where z is a standard Wiener process. Suppose also that the process $y(t)$ is defined by $y(t) = F(x,t)$. Then $y(t)$ satisfies the Ito equation

$$dy(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x} b dz$$

where z is the same Wiener process as previously.

Example 11.4 (Stock dynamics)

Suppose that $S(t)$ is governed by the geometric Brownian motion

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Use Ito's lemma to find the equation governing the process

$$F(S(t)) = \ln S(t)$$

With $a = \mu S, b = \sigma S, \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{S}, \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ it follows that

$$\begin{aligned} d\ln S &= \left(\frac{a}{S} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{S^2} \right) dt + \frac{b}{S} dz \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dz \end{aligned}$$

11.9 Binomial Lattice Revisited

The binomial lattice is analogous to the multiplicative model, since at each step the price is multiplied by a random variable.

This random variable takes only two possible values u and d.

Therefore find values for u, d and p that match the multiplicative model as closely as possible.

Do this by matching both the expected value of the logarithm of the price change and the variance of the logarithm of the price change.

Sufficient to ensure that S_1, the price after the first step, has the correct properties.

Use $S_0 = 1$, then we require

$$E[\ln S_1] = v\Delta t, \ \ \mathrm{var}[\ln S_1] = \sigma^2 \Delta t$$

$$E[\ln S_1] = p \ln u + (1-p)\ln d$$
$$\mathrm{var}[\ln S_1] = p(\ln u)^2 + (1-p)(\ln d)^2 - [p\ln u + (1-p)\ln d]^2$$
$$= p(1-p)(\ln u - \ln d)^2$$

Matching equations become

$$pU + (1-p)D = v\Delta t$$
$$p(1-p)(U-D)^2 = \sigma^2 \Delta t$$

where $U = \ln u, D = \ln d$.

These are two equations in three unknowns. One way to use this degree of freedom is to set $D = -U$, which is equivalent to $d = 1/u$.

With this choice the solution is

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sigma^2/(v^2\Delta t)+1}}$$

$$\ln u = \sqrt{\sigma^2\Delta t + (v\Delta t)^2}$$

$$\ln d = -\sqrt{\sigma^2\Delta t + (v\Delta t)^2}$$

For small Δt these equations can be approximated by

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

which are the values used earlier.